ELOSZTÓSZÁM-TÁBLÁZAT KÉSZÍTÉSE A GANZ–BOTKA FOGAZÁSHOZ

KOLONITS FERENC

[Beérkezett 1967. március 21-én]

Folytonos fogazattartományban számolva a GANZ—BOTKA-rendszer szerinti elosztó számokat, az egyetlen fogazat számításához képest egyszerűsítési lehetőségek adódnak. A dolgozat vizsgálja ezeket és ferde fogazat esetén gazdaságosabb táblázatszerkesztésre tesz javaslatot.

Jelölések

(Az *1* index a kiskerékre, a *2* a nagykerékre utal)

A, E	a kapcsolószakasz kezdő- és végpontja;
u	a fogszámviszony (z_2/z_1);
r_f	a fejkörsugár;
r_a	az alapkörsugár;
r_g	a gördülőkörsugár;
α_g	a kapcsolószög;
α_0	a szerszám-kapcsolószög;
α_h	a homlokkapcsolószög;
β	a fogferdeség;
a	a tengelytávolság;
h_k	az elméleti közös fogmagasság;
z	a fogszámösszeg;
X	$= \sqrt{r_f^2 - r_a^2}/(a \sin \alpha_g)$;
$A(\alpha_0; \alpha_g; \beta)$, $B(\alpha_0; \alpha_g; \beta)$	rövid jelölés az a, ill. a h_k kifejezésében z szorzóira;
$C = 1 + h_k/a$	értéke $X_{1,2}$-vel, α_g-vel és u-val kifejezve;
q_2	elosztószám.

A q_2 elosztószám ferde fogazatnál a β fogferdeség, valamint a z fogszámösszeg, α_g kapcsolószög és u fogszámviszony függvénye: meghatározásához $r_{f1,2}$-re a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$r_{f_1} + r_{f_2} = a + h_k, \tag{1a}$$

és

$$\frac{\sqrt{r_{f2}^2 - ra_2^2}}{a \sin \alpha_g - \sqrt{r_{f2}^2 - r_{a2}^2}} = u^2 \frac{\sqrt{r_{f1}^2 - r_{a1}^2}}{a \sin \alpha_g - \sqrt{r_{f1}^2 - r_{a1}^2}} . \tag{1b}$$

Átalakítás és rendezés után nyolcadfokú algebrai egyenletre jutunk, melyet előírt pontossággal csupán numerikusan, sorozatos közelítésekkel tudunk megoldani [1].

Kérdés, hogy ha nem egy fogazatot kell számítanunk, hanem a teljes fogazattartományt kívánjuk feltérképezni, nem rendezhetjük-e el célszerűbben a számítási munkát?

Vezessük be az

$$X_i = \frac{\sqrt{r_{fi}^2 - r_{ai}^2}}{a \sin \alpha_g} \quad (i = 1,\ 2) \tag{2}$$

új változókat. Az (1) rendszer a következő alakú:

$$\frac{X_2}{1 - X_2} = \frac{X_1}{1 - X_1} u^2, \tag{3a}$$

$$\sqrt{X_1^2 a^2 \sin \alpha_g + r_{a1}^2} + \sqrt{X_2^2 a^2 \sin^2 \alpha_g + r_{a2}^2} = a + h_k. \tag{3b}$$

Vegyük figyelembe viszont, hogy (l. pl. [3]) modulfajlagosan

$$a = z \frac{\cos \alpha_h}{2 \cos \beta \cos \alpha_g} = z A(\alpha_0; \alpha_g; \beta), \tag{4a}$$

$$h_k = 2 - z \left(\frac{1}{2 \cos \beta} - A + \frac{\operatorname{inv} \alpha_g - \operatorname{inv} \alpha_h}{2 \tan \alpha_0} \right) = 2 - zB(\alpha_0, \alpha_g, \beta) \tag{4b}$$

(3b)-t a-val végigosztva megfelelő átalakítások után (A és B argumentumait rövidség kedvéért elhagyva):

$$\sin \alpha_g \left[\sqrt{X_1^2 + \frac{1}{[(u+1) \tan \alpha_g]^2}} + \sqrt{X_2^2 + \frac{u^2}{[(u+1) \tan \alpha_g]^2}} \right] = 1 + \frac{h_k}{a}.$$

A bal oldalt jelöljük C-vel és helyettesítsük be a (4) alatti formulákat:

$$C = 1 + \frac{2 - Bz}{zA} = 1 - \frac{B}{A} + \frac{2}{zA},$$

$$z = \frac{2}{A(C-1) + B}. \tag{5}$$

Vizsgáljuk meg, mit tehetünk, ha rögzített α_g, u és β mellett z értékek sorozatára kívánjuk az elosztószámot meghatározni.

Ha felvesszük X_1-et, a (3a)-ból meghatározhatjuk X_2-t. A és B értékek a fentebb rögzített alapadatok mellett állandók, így $X_{1,2}$ birtokában kiszámítva C-t, az (5)-ből megkapjuk a fogszámösszeget. X_2 (2) definiáló egyenletéből megkapjuk r_{f2}-t; innen

$$q_2 = \frac{r_{f2} - r_{g2}}{h_k}.$$

Ez az eljárás részben „fordítva" oldja meg az (1) egyenletet: felvesz egy közbülső részeredményt, amiből visszaszámol a kiinduló adatokra; mindezekből meghatározza a keresett értéket.

Hogyan vegyük fel azonban X_1-et? Alakítsuk át (3a)-t és határozzuk meg dx_2/dx_1-et:

$$\frac{1}{X_2} - 1 = \frac{1}{u^2}\left(\frac{1}{X_1} - 1\right),$$

$$-\frac{1}{X_2^2}\,dX_2 = -\frac{1}{u^2}\frac{1}{X_1^2}\,dX_1; \qquad (7)$$

$$\frac{dX_2}{dX_1} = \frac{1}{u^2}\left(\frac{X_2}{X_1}\right)^2 > 0.$$

Tehát, ha a felvett X_1-et növeljük, X_2 is nő. C defíniciójából nyilvánvaló, hogy növekvő $X_{1,2}$-vel nő, (5)-ből pedig következik, hogy ez esetben z csökken. Valamennyi változás szigorúan monoton.

Ha az előbbiekben rögzített α_g, u és β mellett a számba jöhető legnagyobb és legkisebb fogszámösszegre valamilyen módszerrel meghatározzuk az elosztószámot és így X_1-et, ezen X_1-ek a lehetséges legkisebb és legnagyobb értékek lesznek, közbülső értékek monoton változnak.

Az adott tartományban előírt pontossággal lineárisan interpolálható $z - q_2$ táblázatot kell előállítanunk. Felvesszük z kívánt értéksorát, ami várhatóan elég sűrű az interpolációhoz — ez a nagy fogszámösszegek felé ritkább [2].

Ha egy görbe lineárisan interpolálható, az érintő jól simul a görbéhez, a vizsgálatok során jó pontossággal alkalmazható a „véges növekmények tétele". Határozzuk meg dz/dX_1-et. Az (5)-ből

$$\frac{dz}{dX_1} = -\frac{2A}{[A(C-1)+B]^2}\frac{dC}{dX_1} = -\frac{A}{2}z^2\frac{dC}{dX_1},$$

és a C definíciós egyenletéből az $1/[(u+1)\tan\alpha_g) = t$ jelöléssel:

$$\frac{dC}{dX_1} = \sin\alpha_g\left[X_1/\sqrt{X_1^2+t^2} + X_2\left(\frac{dX_2}{dX_1}\right)/\sqrt{X_2^2+u^2t^2}\right].$$

Behelyettesítve (7)-ből, és figyelembe véve, hogy

$$\frac{dz}{dX_1} = \frac{dz}{dC}\frac{dC}{dX_1},$$

kapjuk, hogy

$$\frac{dz}{dX_1} = -\frac{A}{2}z^2\left(\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+t^2}} + \frac{1}{u^2X^2}\frac{X_2^3}{\sqrt{X_2^2+u^2t^2}}\right)\sin\alpha_g. \qquad (8)$$

Ha egy konkrét fogazatot számolunk, dz/dX_1 meghatározása nem jelent sok többletmunkát, hiszen a kifejezés legtöbb „építőkövét" C számításánál már meghatároztuk.

Kiindulunk a tartomány egyik végétől, pl. a legnagyobb z_0 fogszámösszegből, melyhez numerikusan meghatároztuk a — legkisebb — X_{10} értékét. Számítsuk ki a soron következő z_1 fogszámösszeghez tartozó fogazatot.

Nyilván $dz/dX_1 = 1/(dX_1/dz)$. Ha felveszünk

$$X_{11} = X_{10} + (dX_1/dz)(Z_1 - z_0)$$

X_1 értéket, és ezzel z_1' értéket számolunk, ez a véges növekmények tétele értelmében igen közel esik z_1-hez. A z_1-hez tartozó X_1 értéket, vagy a kiinduló és a most számolt pontra végzett lineáris interpolációval, vagy dX_1/dz helyi kiszámításával és

$$X_1 = X_{11} + (dX_1/dz)(Z_1 - z_1')$$

formulával határozzuk meg. Az így kapott X_1 már valószínűen elég pontos megoldása lesz a feladatnak. Ha nem vagyunk elégedettek az eredménnyel, úgy ezt egy iterációs számítás (amilyet a határponton végeztünk) kezdő értékének tekinthetjük. Mivel a közelítés igen jó, sokkal kevesebb lépésre lesz szükség, mintha pl. $q_2 = 0{,}5$-től indítottuk volna az iterációt.

Ily módon lépésről-lépésre végigszámolhatjuk a teljes szóba jöhető tartományt. Mindössze egy — a kezdeti — fogazatot kell minden támpont nélkül, egyedileg számítani.

Az elvi alapok változatlanul hagyásával másféle lebonyolítási formát is választhatunk.

Ha a fentebbi módszernél a sorra következő z-re „véges növekmények tételével" kapott közelítő érték és a kiindulási érték alapján a pontos z-hez tartozó X_1 értéket lineáris interpolációval kívánjuk számolni, javíthatunk azzal, hogy a közelítő z-hez tartozó X_1 környékén a szándékolt z-javításnak megfelelő irányban felveszünk néhány X_1-et, számoljuk a hozzájuk tartozó z-ket, és a legjobban közelítő értékek közt interpolálunk.

Ha „véges növekmények tételével" túlmegyünk a szándékolt z-n, igen valószínű, hogy ismételt alkalmazásával visszakerülünk a kiindulási oldalra (a számított szakaszban sima függvényt feltételezve). Ekkor a kétoldali közelítés között interpolálhatunk. Ha viszont a közelítéssel nem érjük el a szándékolt z-t, analóg módon végül is extrapolációt alkalmazhatunk (ez azonban kevésbé megbízható).

Nem szükséges okvetlenül arra törekednünk, hogy a felvett X_1-ekből számolt z-k jól közelítsék a szándékolt értékeket. Eljárhatunk úgy is, hogy a kiinduló $z - X_1$-től kezdve ΔX_1 (esetleg menetközben változó) lépésenként kiszámítjuk z-t, amíg a szóba jöhető másik z-határt át nem lépjük. Az így keletkező z — X_1 táblázatból interpolálhatunk a keresett z-kre; ha túl nagy ΔX_1-et vettünk, a kérdéses helyek környékén sűríthetjük a beosztást, hogy a kívánt pontosságot elérjük.

E módszerek közül a probléma konkrét számítási vizsgálata alapján választhatunk; esetleg alkalmas kombinációjukból alakíthatjuk ki a legmegfelelőbb eljárást.

Számolni kell a lehetőséggel, hogy bizonyos fogszámösszegeknél kerek fogszámokkal csak megközelíteni lehet a számítani kívánt előírt fogszámviszonyt. Mivel ez a közelítés általában elég jó, az előírt fogszámviszony melletti eredményeket a ténylegesre végzett iteráció kezdő értékének tekinthetjük. Ha azonban tekintetbe vesszük, hogy ([1] deriválásából) a többi független változót állandónak véve,

$$\frac{dX_1}{du} = \frac{\dfrac{t^2}{\sqrt{X_1^2+t^2}} + \dfrac{t^2 - ut - 2X_2^3 u^3 X_1}{\sqrt{X_2^2+u^2t^2}}}{\dfrac{X_1}{\sqrt{X_1^2+t^2}} + \dfrac{1}{u^2 X_1^2} \dfrac{X_2^3}{\sqrt{X_2^2+u^2t^2}}},$$

úgy számolhatunk a véges növekmények tételével is. E kifejezés „építőkövei" is kiadódnak a részletszámítások során.

A kezdeti értékek (z_{max} — $X_{1_{max}}$) számítását is lehet célszerűbben elrendezni. Így például rögzített α_g mellett különböző u-kra a szóba jöhető maximális fogszám legyen ugyanaz. Ez esetben nem számolunk egyedileg valamennyi u-nál, hanem — nem túl nagy lépésenként — vizsgálunk egyetegyet és a közbeesőkre lineárisan interpolálunk. Mivel különböző α_g-nél ugyanazokra a módosításokra kell a vizsgálatot elvégezni, az előbb említett lépésenkénti u-kat se minden α_g-re számoljuk ki. Képletesen szólva: az u — α_g síkot a maximális fogszám és rögzített fogferdeség mellett „leborítjuk egy nem túl nagy lyukbőségű hálóval", a csomópontokon számolunk, a többit interpoláljuk és az interpolált értékből kiindulva iterálunk. Ha bizonyos (u—α_g) párok más maximális fogszámtól kezdve jutnak gyakorlati szerephez, és ezeknek tartománya elég nagy, úgy az előbb mondottakat értelemszerűen itt is alkalmazhatjuk. Ha ezeknek maximális fogszáma nem sokkal kisebb, mint az abszolút maximum, némi felesleges munka árán egyszerűsíthetünk azzal, hogy ezeket is az abszolút maximumtól számoljuk. Esetleg a z-tartomány belsejében is berendezhetünk „indító szinteket" egy bizonyos (abszolút maximumnál sokkal kisebb) fogszámösszeg és attól kisebb z-től számítandó fogazatoknak. Végül elvben kiterjeszthetjük ezt a gondolatmenetet β- ra is. Hogy e módszereket milyen kombinációban alkalmazzuk, azt a gyakorlati táblázatszerkesztés igényei döntik el.

IRODALOM

1. Kolonits F.: Fogazathelyesbítés számítása iterációval. *MTA VI. Oszt. Közleményei* **35** (1965); 83, valamint az ott idézett irodalom.
2. Botka I.: Profilkiválasztási táblázat, 2. kiadás. Szerző kiadása, Budapest 1961.
3. Vörös I.: Gépelemek, III. Fogaskerekek; 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest 1961.