

A KÖRSZIMMETRIKUSAN TERHELT VASTAG KÖRLEMEZ PROBLÉMÁJA

CSONKA PÁL

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA
AZ MTA ÉPÍTÉSTUDOMÁNYI MUNKAKÖZÖSSÉGE, BUDAPEST

[Beérkezett 1966. július 27-én]

A dolgozat a körszimmetrikusan terhelt vastag körlemez problémáját a Kirchhoff-féle egyszerűsítő feltevések igénybevétele nélkül tárgyalja. A terhelést a feladat saját függvényei szerint haladó sorba fejt, s a sor általános tagjáról nézve megadja a feladat megoldását. A dolgozat a sor első tagjának megfelelő pontosabb megoldást a Kirchhoff-féle közelítő megoldással egybevetve, megállapítja, hogy vastagabb lemezek esetében a két megoldás lényegesen eltér egymástól.

1. Bevezetés

A Kirchhoff-féle lemezelmélet az állandó vastagságú rugalmas síklemez problémájának tárgyalásakor a klasszikus rugalmasság elmélet szokásos feltevésein felül több további egyszerűsítő feltevéseket alkalmaz. Ezek az egyszerűsítő feltevések a technikai gyakorlatban leginkább használt *vékony* lemezek esetében minden képpen indokoltak, *vastag* lemezek esetében azonban általában nem alkalmazhatók. Ily esetekben a lemezprobléma megoldására a rugalmasságtan szigorú módszereihez kell folyamodni. Ezzel a problémával MICHELL [1], LOVE [2] és DOUGALL [3] foglalkoztak, s ugyanezt a problémát tárgyalta szerző [4] is egyik előző dolgozatában. Ebben a rugalmasságtan alapegyenleteinek egy különleges megoldásrendszeréből kiindulva [5], a vastag lemez problémájának megoldására általános érvényű eljárást dolgozott ki. Jelen dolgozat az említett eljárásnak körszimmetrikus megoszlású merőleges erőkkel terhelt befogott körlemez esetére való alkalmazását mutatja be. A szabadon felfekvő körlemez problémája az itt előadandókhoz hasonló módon tárgyalható.

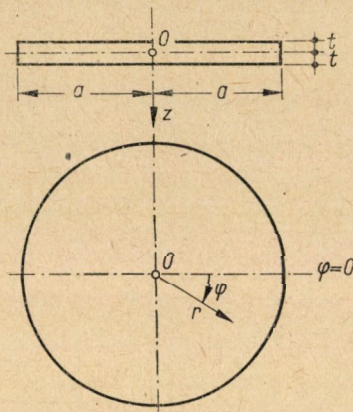
2. Alapfogalmak, jelölések

Vizsgálatainkhoz az 1. ábrán feltüntetett $0(r, \varphi, z)$ hengeres koordináta-rendszert használjuk.

Terhelésként a lemez $z = \pm t$ lapjain működő z irányú, körszimmetrikus megoszlású erőket veszünk számításba. A tárgyalás egyszerűsítésére a terhelő erőrendszert két erőrendszerre bontjuk szét. Az első (I. jelű) erőrendszer a $z = 0$ síkra nézve antimetrikus, a második (II. jelű) erőrendszer pedig a $z = 0$

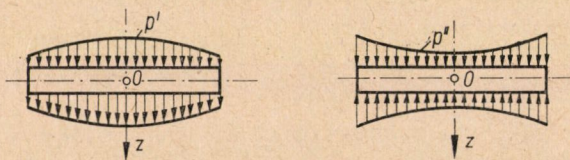
síkra nézve szimmetrikus elrendezésű. A szóban forgó két teherrendszer intenzitását a 2. ábra szerint a $p^I = p^I(r)$, illetve $p^{II} = p^{II}(r)$ teherfüggvényekkel jellemezzük.

A lemez pontjai a terhek hatására eltolódásokat szenvednek. A létrejövő eltolódások sugárirányú alkotóját a $\varrho = \varrho(r)$ eltolódásfüggvénnyel, a z irányú eltolódásalkotókat pedig a $\zeta = \zeta(r)$ eltolódásfüggvénnyel jellemezzük. Az eltolódásalkotókat pozitív koordináta irányokban tekintjük pozitívoknak.



1 ábra. Az $O(r, \varphi, z)$ koordinátarendszer

A lemez feszültségi állapotát a lemezből a 3. ábra szerint kimetszett elemi részecske lapjaira ható koordináta irányú feszültségalkotókkal jellemezzük. E feszültségalkotókat a 3. ábrán feltüntetett betűjelekkel jelöljük, s az ábrán látható nyíliránnyal tekintjük pozitívoknak.



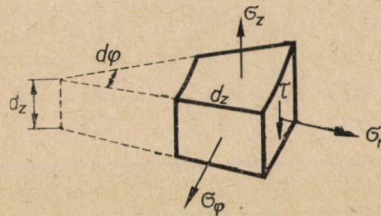
2. ábra. A $p^I(r)$ és $p^{II}(r)$ teherrendszer

3. Alapösszefüggések

Az eltolódások és feszültségek kapcsolatát kifejező általános rugalmasságtani összefüggések az általunk tárgyalandó körszimmetrikus esetben a következő egyszerűbb alakban jelentkeznek:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{2G}{m-2} \left[(m-1) \frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{\varrho}{r} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right], \\
 \sigma_\varphi &= \frac{2G}{m-2} \left[\frac{\partial \varrho}{\partial r} + (m-1) \frac{\varrho}{r} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right], \\
 \sigma_z &= \frac{2G}{m-2} \left[\frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{\varrho}{r} + (m-1) \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right], \\
 \tau &= G \left[\frac{\partial \varrho}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right].
 \end{aligned} \tag{1}$$

A fenti képletekben G a lemezanyag nyíró rugalmassági tényezőjét, m pedig a Poisson-féle számot jelenti.



3. ábra. A σ_r , σ_φ , σ_z feszültség

Természetesen, a σ_r , σ_φ , σ_z , τ változását kifejező függvények kielégíteni tartoznak az egyensúlyi feltételeket, melyek a jelen körszimmetrikus esetben a következő egyenletekkel fejezhetők ki:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\sigma_r}{r} - \frac{\sigma_\varphi}{r} &= 0, \\
 \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\tau}{r} &= 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Az egyensúlyi feltételeken kívül, természetesen, a feladat kerületi feltételeit is ki kell elégíteni. Ezek a feltételek az *I. teherrendszer* esetében a

$$\tau(r, \pm t) = 0, \quad \sigma_z(r, \pm t) = \pm p^I(r), \tag{3}$$

$$\int_{-t}^{+t} \sigma_r(a, z) dz = 0, \quad \frac{d\zeta(a, 0)}{dr} = 0, \quad \zeta(a, 0) = 0 \tag{4}$$

képletekkel fejezhetők ki, a *II. teherrendszer* esetében pedig így fogalmazhatók:

$$\tau(r, \pm t) = 0, \quad \sigma_z(r, \pm t) = -p^{II}(r), \tag{5}$$

$$\int_{-t}^{+t} \sigma_r(a, z) dz = 0, \quad \frac{d\zeta(a, 0)}{dr} = 0, \quad \zeta(a, 0) = 0. \tag{6}$$

4. A tehertagok

A $p^I = p^I(r)$ és $p^{II} = p^{II}(r)$ teherfüggvényeket a

$$\Delta\Phi + \lambda^2\Phi = \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr} + \lambda^2\Phi = 0 \quad (7)$$

differenciálegyenletnek az $r = a$ helyen eltűnő megoldásait — *sajátfüggvényeit* — tartalmazó sorba fejtjük.

A fenti differenciálegyenlet az $J_0(\lambda r)$ -jelű nulladrendű Bessel-féle függvény ismert differenciálegyenlete, a benne szereplő λ faktor pedig tetszőlegesen választható paraméter, melynek alkalmas kijelölésével elérhető, hogy az $J_0(\lambda r)$ függvény az $r = a$ helyen eltűnjék. E különleges λ értékek meghatározásához természetesen ismernünk kell az

$$J_0(\lambda r) = 0$$

egyenlet (pozitív) gyökeit. Utóbbiakat nagyságuk sorrendjében

$$x_1 < x_2 < \dots < x_k < \dots$$

betűkkel jelölvén, minden $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ gyökhöz rendelhető egy-egy megfelelő λ paraméter:

$$\lambda_1 = \frac{x_1}{a}, \quad \lambda_2 = \frac{x_2}{a}, \dots, \quad \lambda_k = \frac{x_k}{a}, \dots$$

Az így nyert $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots$ értékeknek megfelelő nulladrendű Bessel-féle függvényeket

$$J_0(\lambda_1 a), \quad J_0(\lambda_2 a), \dots, \quad J_0(\lambda_k a), \dots$$

betűkkel jelöljük.

Ismervén a fenti sajátfüggvényeket, a $p^I(r)$ és $p^{II}(r)$ teherfüggvényeket a következő sorokkal helyettesíthetjük:

$$p^I(r) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k^I(r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^I J_0(\lambda_k r), \quad (8)$$

$$p^{II}(r) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k^{II}(r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{II} J_0(\lambda_k r). \quad (9)$$

A fenti képletekben szereplő c_k^I , illetve c_k^{II} együtthatók értéke:

$$c_k^I = \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_k a)} \int_0^a r p^I(r) \cdot J_0(\lambda_k r) \cdot dr, \quad (10)$$

$$c_k^{II} = \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_k a)} \int_0^a r p^{II}(r) \cdot J_0(\lambda_k r) \cdot dr. \quad (11)$$

Itt $J_1(\lambda_k r)$ az elsőrendű Bessel-függvény értéket jelenti a $\lambda_k r$ helyen.

A (8) és (9) sorok egyes tagjainak megfelelő terheket *teher-tagoknak* fogjuk nevezni, s a következőkben a feladat megoldását csupán ezen teher-tagokra nézve fogjuk bemutatni. Adott esetben a keresett megoldást az egyes teher-tagoknak megfelelő megoldások összegezésével lehet előállítani.

5. A feladat megoldása a középsíkra nézve antimetrikus megoszlású teher esetében

Az alábbiakban elegendő a csupán

$$p_k^I = c_k^I J_0(\lambda_k r), \quad c_k = \text{konst}$$

teher-taghoz tartozó megoldást ismertetni. A megadandó képletek valamennyi teher-tag esetében alkalmazhatók, annak ellenére, hogy a vonatkozó képletekben az említett tag sorszámára utaló k -indexet nem írjuk ki.

A [4] dolgozatban közölt általános megoldást szem előtt tartva, eltolódás-függvényekül a következőket választjuk:

$$\begin{aligned} \varrho &= A^I \frac{dJ_0(\lambda r)}{dr} (\lambda t \cdot \sinh \lambda t \cdot \sinh \lambda z - \\ &\quad - \frac{m-2}{m} \cosh \lambda t \cdot \sinh \lambda z - \lambda z \cdot \cosh \lambda t \cdot \cosh \lambda z) - 2B^I r z, \\ \zeta &= A^I \lambda J_0(\lambda r) (\lambda t \cdot \sinh \lambda t \cdot \cosh \lambda z + \\ &\quad + \frac{2m-2}{m} \cosh \lambda t \cdot \cosh \lambda z - \lambda z \cdot \cosh \lambda t \cdot \sinh \lambda z) + \\ &\quad + B^I \left(r^2 + \frac{2z^2}{m-1} \right) + C^I. \end{aligned} \quad (12)$$

Itt A^I , B^I és C állandót jelent.

Ha a fenti eltolódás-függvényeket az (1) képletekbe behelyettesítjük, s tekintettel vagyunk a (7) alattiak alapján felírható

$$\frac{d^2 J_0(\lambda r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dJ_0(\lambda r)}{dr} + \lambda^2 J_0(\lambda r) = 0$$

összefüggésre, a feszültségalkotókra a következő képleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2GA^I \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dJ_0(\lambda r)}{dr} \left(-\lambda t \cdot \sinh \lambda t \cdot \sinh \lambda z + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m-2}{m} \cosh \lambda t \cdot \sinh \lambda z + \lambda z \cdot \cosh \lambda t \cdot \cosh \lambda z \right) + \\ &\quad + 2GA^I \lambda^2 J_0(\lambda r) (-\lambda t \cdot \sinh \lambda t \cdot \sinh \lambda z + \\ &\quad + \cosh \lambda t \cdot \sinh \lambda z + \lambda z \cdot \cosh \lambda t \cdot \cosh \lambda z) - \frac{4GB^I}{m-2} \left(m - \frac{2}{m-1} \right) z, \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\varphi} &= 2GA^1 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dJ_0(\lambda r)}{dr} \left(\lambda t \cdot \sinh \lambda t \cdot \sinh \lambda z - \right. \\
&\quad \left. - \frac{m-2}{m} \cosh \lambda t \cdot \sinh \lambda z - \lambda z \cdot \cosh \lambda t \cdot \cosh \lambda z \right) + \\
&\quad + 2GA^1 \lambda^2 J_0(\lambda r) \cdot \frac{2}{m} \cosh \lambda t \cdot \sinh \lambda z - \frac{4G B^1}{m-2} \left(m - \frac{2}{m-1} \right) z, \\
\sigma_z &= 2GA^1 \lambda^2 J_0(\lambda r) \cdot (\lambda t \cdot \sinh \lambda t \cdot \sinh \lambda z + \\
&\quad + \cosh \lambda t \cdot \sinh \lambda z - \lambda z \cdot \cosh \lambda t \cdot \cosh \lambda z), \\
\tau &= 2GA^1 \lambda \frac{dJ_0(\lambda r)}{dr} (\lambda t \cdot \sinh \lambda t \cdot \cosh \lambda z - - \lambda z \cdot \cosh \lambda t \cdot \sinh \lambda z).
\end{aligned} \tag{13b}$$

Egyszerű próba azonnal meggyőzhet arról, hogy a (13) feszültségrendszert pontosan megfelel a (2) *egyensúlyi egyenleteknek*, miéértis áttérhetünk a lemez $z = \pm t$ lapjaira vonatkozó (3) *jelű kerületi feltételek* vizsgálatára.

A (3) alatti *első feltétel* nyilvánvalóan eleve teljesítve van, ennek betartása érdekében tehát semmi intézkedés sem szükséges.

A (3) alatti *második feltétel* a (8) alattiak figyelembevételével

$$\sigma_z = (r \pm t) = \pm c^1 J_0(\lambda r) \tag{14}$$

alakban írható, ahol a (13) alattiak szerint

$$\begin{aligned}
\sigma_z(r, \pm t) &= 2GA^1 \cdot \lambda^2 J_0(\lambda r) (\pm \lambda t \cdot \sinh^2 \lambda t \pm \\
&\quad \pm \cosh \lambda t \cdot \sinh \lambda t \mp \lambda t \cdot \cosh^2 \lambda t) = \\
&= 2GA^1 \cdot \lambda^2 J_0(\lambda r) \cdot (\pm \cosh \lambda t \cdot \sinh \lambda t \mp \lambda t) = \\
&= \pm 2GA \cdot \lambda^2 J_0(\lambda r) (\cosh \lambda t \cdot \sinh \lambda t - \lambda t).
\end{aligned}$$

Ezt az értéket a (14) feltételegyenletbe behelyettesítve, az eddig határozatlan A^1 állandóra az

$$A^1 = \frac{c^1}{2G \lambda^2 (\cosh \lambda t \cdot \sinh \lambda t - \lambda t)},$$

illetve az

$$A^1 = \frac{c^1}{G \lambda^2 (\sinh 2\lambda t - 2\lambda t)} \tag{15}$$

értéket kapjuk.

Ezek után rátérhetünk a lemez peremére vonatkozó (4) kerületi feltételek tárgyalására.

A (4) alatti első feltétel esetünkben a terhelés antimetrikus volta folytán eleve teljesítve van.

A (4) alatti második feltétel (12) figyelembevételével így fejezhető ki:

$$A^I \lambda \frac{dJ_0(\lambda a)}{dr} \left(\lambda t \cdot \sinh \lambda t + \frac{2m-2}{m} \cosh \lambda t \right) + 2B^I a = 0.$$

Innen

$$B^I = -\frac{1}{2a} \lambda \frac{dJ_0(\lambda a)}{dr} \left(\lambda t \cdot \sin \lambda t + \frac{2m-2}{m} \cosh \lambda t \right) \cdot A^I,$$

illetve a

$$\frac{dJ_0(\lambda a)}{dr} = -\lambda J_1(\lambda a)$$

összefüggés behelyettesítésével

$$B^I = \frac{1}{2a} \lambda^2 J_1(\lambda a) \cdot \left(\lambda t \cdot \sinh \lambda t + \frac{2m-2}{m} \cosh \lambda t \right) \cdot A^I. \quad (16)$$

A (4) alatti harmadik feltétel a (12) alattiak figyelembevételével a következőképp fogalmazható:

$$+ B^I a^2 + C^I = 0.$$

Innen

$$C^I = -a^2 B^I. \quad (17)$$

Az A^I , B^I , C^I értékét meghatározván, feladatunkat tulajdonképp megoldottuk. Nehézség csupán az $r = 0$ helyen mutatkozik, itt ti. a (13) alatti első két képlet határozatlanná válik. E helyeken a σ_r , illetve σ_φ feszültséget az $r \rightarrow 0$ határátmenettel kell meghatározni, figyelembe véve, hogy

$$J_0(0) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{dJ_0(\lambda r)}{dr} \right] = -\frac{\lambda^2}{2}. \quad (18)$$

Ezt tudva, a σ_r és σ_φ feszültségre az $r = 0$ helyen a következő képletet kapjuk:

$$\begin{aligned} \sigma_r(0, z) = \sigma_\varphi(0, z) = GA^I \lambda^2 & \left(-\lambda t \cdot \sinh \lambda t \cdot \sinh \lambda z + \right. \\ & \left. + \frac{m+2}{m} \cosh \lambda t \cdot \sinh \lambda z + \lambda z \cdot \cosh \lambda t \cdot \cosh \lambda z \right) - \\ & - \frac{4GB^I}{m-2} \left(m - \frac{2}{m-1} \right) z. \end{aligned}$$

A lemezlapok középpontjában, vagyis az $r = 0$, $z = \pm t$ pontokban

$$\begin{aligned} \sigma_r(0, \pm t) = \sigma_\varphi(0, \pm t) &= \pm GA^I \lambda^2 \left(\lambda t + \frac{m+2}{2m} \sinh 2\lambda t \right) \mp \\ &\mp \frac{4GB^I}{m-2} \left(m - \frac{2}{m-1} \right) t, \end{aligned}$$

illetve a (15) és (16) alattiak figyelembe vételével

$$\begin{aligned} \sigma_r(0, \pm t) = \sigma_\varphi(0, \pm t) &= \pm \frac{c^I \lambda t}{\sinh 2\lambda t - 2\lambda t} \left[1 + \frac{m+2}{m} \cdot \frac{\sinh 2\lambda t}{2\lambda t} - \right. \\ &\left. - \frac{2}{m-2} \left(m - \frac{2}{m-1} \right) \frac{t}{a} J_1(\lambda a) \cdot \left(\sinh \lambda t + \frac{2m-2}{m} \frac{\cosh \lambda t}{\lambda t} \right) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

6. A feladat megoldása

a középsíkra nézve szimmetrikus megoszlású teher esetében

A következőkben a megoldást csupán a k -adik

$$p_k^{II} = c_k^{II} J_0(\lambda_k r), \quad c_k^{II} = \text{konst.}$$

tehertag esetére mutatjuk be, de az egyszerűbb írásmód kedvéért az idevonatkozó képletekben a szóban forgó tehertag sorszámára utaló k indexet nem tesszük ki.

Most a [4] dolgozatban közölt általános megoldást szem előtt tartva, eltolódásfüggvényekül az alábbiakat választjuk:

$$\begin{aligned} \varrho &= A^{II} \frac{dJ_0(\lambda r)}{dr} \cdot \left(\lambda t \cdot \cosh \lambda t \cdot \cosh \lambda z - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m-2}{m} \sinh \lambda t \cdot \cosh \lambda z - \lambda z \cdot \sinh \lambda t \cdot \sinh \lambda z \right) + B^{II} r, \\ \zeta &= A^{II} \lambda J_0(\lambda r) (\lambda t \cdot \cosh \lambda t \cdot \sinh \lambda z + \\ &\quad + \frac{2m-2}{m} \sinh \lambda t \cdot \sinh \lambda z - \lambda z \cdot \sinh \lambda t \cdot \cosh \lambda z - \\ &\quad - B^{II} \frac{2}{m-1} z + C^{II}. \end{aligned} \quad (20)$$

A fenti képletekben A^{II} , B^{II} és C^{II} határozatlan állandó.

A (20) alatti eltolódásfüggvényeket a (1) képletekbe behelyettesítve, a feszültségalkotókra az alábbi képleteket kapjuk:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r = & 2GA^{II} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dJ_0(\lambda r)}{dr} \left(-\lambda t \cdot \cosh \lambda t \cdot \cosh \lambda z + \right. \\
 & \left. + \frac{m-2}{m} \sinh \lambda t \cdot \cosh \lambda z + \lambda z \cdot \sinh \lambda t \cdot \sinh \lambda z \right) + \\
 & + 2GA^{II} \lambda^2 J_0(\lambda r) (-\lambda t \cdot \cosh \lambda t \cdot \cosh \lambda z + \\
 & + \sinh \lambda t \cdot \cosh \lambda z + \lambda z \cdot \sinh \lambda t \cdot \sinh \lambda z) + \\
 & + \frac{2GB^{II}}{m-2} \left(m - \frac{2}{m-1} \right), \\
 \sigma_\varphi = & 2GA^{II} \frac{1}{r} \cdot \frac{dJ_0(\lambda r)}{dr} \left(\lambda t \cdot \cosh \lambda t \cdot \cosh \lambda z - \right. \\
 & \left. - \frac{m-2}{m} \sinh \lambda t \cdot \cosh \lambda z - \lambda z \cdot \sinh \lambda t \cdot \sinh \lambda z \right) + \\
 & + 2GA^{II} \lambda^2 J_0(\lambda r) \cdot \frac{2}{m} \sinh \lambda t \cdot \cosh \lambda z + \frac{2GB^{II}}{m-2} \left(m - \frac{2}{m-1} \right), \\
 \sigma_z = & 2GA^{II} \cdot \lambda^2 J_0(\lambda r) (\lambda t \cdot \cosh \lambda t \cdot \cosh \lambda z + \\
 & + \sinh \lambda t \cdot \cosh \lambda z - \lambda z \cdot \sinh \lambda t \cdot \sinh \lambda z), \\
 \tau = & 2GA^{II} \lambda \frac{dJ_0(\lambda r)}{dr} (\lambda t \cdot \cosh \lambda t \cdot \sinh \lambda z - \lambda z \cdot \sinh \lambda t \cdot \cosh \lambda z).
 \end{aligned} \tag{21}$$

A fenti feszültségrendszer egyszerű próbával igazolhatóan pontosan megfelel a (2) egyensúlyi egyenleteknek, miértis ezek után rátérhetünk a lemez lapjaira vonatkozó (5) alatti kerületi feltételek vizsgálatára.

Az (5) alatti első feltétel minden külön intézkedés nélkül eleve teljesítve van.

Az (5) alatti második feltétel a (9) alattiakra való tekintettel

$$\sigma_z(r, \pm t) = -c^{II} J_0(\lambda r) \tag{22}$$

alakban írható. Itt a (21) egyenletrendszer harmadik egyenlete szerint

$$\begin{aligned}\sigma_z(r, \pm t) &= 2GA^{II} \lambda^2 J_0(\lambda r) (\lambda t \cdot \cosh^2 \lambda t + \\ &+ \sinh \lambda t \cdot \cosh \lambda t - \lambda t \cdot \sinh^2 \lambda t) = \\ &= GA^{II} \lambda^2 J_0(\lambda r) (\sinh 2\lambda t + 2\lambda t).\end{aligned}$$

Ha ezt az értéket a (22) képletbe behelyettesítjük, s az így nyert egyenletet A^{II} -ra megoldjuk, azt találjuk, hogy

$$A^{II} = -\frac{c^{II}}{G\lambda^2(\sinh 2\lambda t + 2\lambda t)}. \quad (23)$$

Hátra van még a lemez peremére vonatkozó (6) kerületi feltételek vizsgálata.

A (6) alatti első feltétel σ_r (21) alatti értékének felhasználásával a kijelölt integrálás végrehajtása után a következő összefüggésre vezet:

$$\begin{aligned}4GA^{II} \frac{1}{\lambda a} \cdot \frac{dJ_0(\lambda a)}{dr} &\left(-\lambda t \cdot \cosh \lambda t \cdot \sinh \lambda t + \right. \\ &+ \left. \frac{m-2}{m} \sinh^2 \lambda t + \lambda t \cdot \cosh \lambda t \cdot \sinh \lambda t - \sinh^2 \lambda t \right) + \\ &+ 4GA^{II} \lambda J_0(\lambda a) \left(-\lambda t \cdot \cosh \lambda t \cdot \sinh \lambda t + \right. \\ &+ \left. \sinh^2 \lambda t + \lambda t \cdot \cosh \lambda t \cdot \sinh \lambda t - \sinh^2 \lambda t \right) + \\ &+ \frac{4GB^{II}}{m-2} \left(m - \frac{2}{m-1} \right) t = 0.\end{aligned}$$

Innen egyszerűsítés után az

$$\frac{B^{II}}{m-2} \left(m - \frac{2}{m-1} \right) t + \frac{A^{II}}{\lambda a} \cdot \frac{dJ_0(\lambda a)}{dr} \left(-\frac{2}{m} \sinh^2 \lambda t \right) = 0$$

egyenlet következik, ebből pedig a

$$\frac{dJ_0(\lambda a)}{dr} = -\lambda J_1(\lambda a)$$

képlet felhasználásával B^{II} -re az alábbi egyenlet adódik:

$$B^{II} = -\frac{2(m-2)}{m[m-2/(m-1)]} \cdot \frac{J_1(\lambda a)}{a} \cdot \frac{\sinh^2 \lambda t}{t} \cdot A^{II}. \quad (24)$$

A (6) alatti *második feltétel* a terhelés antimetrikus volta miatt eleve teljesítve van.

A (6) alatti *harmadik feltétel* az eddig határozatlan C^{II} állandóra a

$$C^{II} = 0 \quad (25)$$

értéket szolgáltatja.

Ismervén az A^{II} , B^{II} , C^{II} értéket, az eltolódásokat és feszültségeket a lemez minden pontjában számítani tudjuk. Nehézség csak az $r = 0$ helyen mutatkozik, ahol ti. σ_r és σ_φ képlete határozatlanná válik. Itt a σ_r és σ_φ értékeket az $r \rightarrow 0$ határátmenet segítségével kell meghatározni. Ekként eljárva, a (18) alattiak figyelembevételével a σ_r és σ_φ feszültségekre az $r = 0$ helyen az alábbi képletet kapjuk:

$$\begin{aligned} \sigma_r(0, z) = \sigma_\varphi(0, z) = GA^{II} \lambda^2 & (-\lambda t \cdot \cosh \lambda t \cdot \cosh \lambda z + \\ & + \frac{m+2}{m} \sinh \lambda t \cdot \cosh \lambda z + \lambda z \cdot \sinh \lambda t \cdot \sinh \lambda z) + \\ & + \frac{2GB^{II}}{m-2} \left(m - \frac{2}{m-1} \right). \end{aligned}$$

A lemezlapok középpontjában, vagyis az $r = 0$, $z = \pm t$ pontokban

$$\begin{aligned} \sigma_r(0, \pm t) = \sigma_\varphi(0, \pm t) = \\ = GA^{II} \lambda^2 \left(-\lambda t + \frac{m+2}{2m} \sinh 2\lambda t \right) + \frac{2GB^{II}}{m-2} \left(m - \frac{2}{m-1} \right), \end{aligned}$$

illetve a (23) és (24) alattiak behelyettesítése után

$$\begin{aligned} \sigma_r(0, \pm t) = \sigma_\varphi(0, \pm t) = \frac{c^{II} \lambda t}{\sinh 2\lambda t + 2\lambda t} \left[1 - \frac{m+2}{m} \cdot \frac{\sinh 2\lambda t}{2\lambda t} + \right. \\ \left. + \frac{4}{m} \cdot \frac{J_1(\lambda a)}{\lambda a} \cdot \frac{\sinh^2 \lambda t}{\lambda^2 t^2} \right]. \quad (26) \end{aligned}$$

7. A feladat Kirchhoff-féle megoldása

A következőkben a feladat Kirchhoff-féle megoldását mutatjuk be, de csak a

$$p_k = c_k^{III} J_0(\lambda_k r), \quad c_k^{III} = \text{konst}$$

teherrendszer esetével foglalkozunk. Az ide vonatkozó képletekben — az előzőekhez hasonlóan — a tehertag sorszámára utaló k -indexet a rövidség kedvéért ez alkalommal sem fogjuk kitenni.

A Kirchhoff-féle lemezelmélet szerint a körszimmetrikusan terhelt körlemez deformált középsíkjának differenciálegyenlete:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^2 \zeta = \frac{3(m-1)}{4mGt^3} p.$$

Ez az egyenlet a szóban forgó különleges terhelési esetben így írható:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^2 \xi = \frac{3(m-1)}{4mGt^3} c^{III} J_0(\lambda r). \quad (27)$$

Mint hogy az itt szereplő $J_0(\lambda r)$ függvény a (1) jelű Bessel-féle differenciálegyenlet sajátfüggvénye, nyilvánvaló, hogy

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^2 J_0(\lambda r) = \lambda^4 J_0(\lambda r). \quad (28)$$

Ezt tudva, a (27) differenciálegyenlet általános megoldását azonnal megadhatjuk:

$$\zeta = \frac{3(m-1)c^{III}}{4mG\lambda^3 t^3} \cdot \frac{J_0(\lambda r)}{\lambda} + B^{III} r^2 + C^{III}, \quad (29)$$

Itt B^{III} és C^{III} állandót jelent. Ezeknek oly értéket kell doníjtaltanunk, hogy a

$$\zeta(a, 0) = 0, \quad \frac{d\zeta(a, 0)}{dr} = 0 \quad (30)$$

kerületi feltételek teljesedjenek. A fenti két követelmény akkor valósul meg ha

$$B^{III} = \frac{3(m-1)c^{III}}{4mG\lambda^3 t^3} \cdot \frac{1}{2a} J_1(\lambda a), \quad (31)$$

$$C^{III} = -\frac{3(m-1)c^{III}}{4mG\lambda^3 t^3} \left[\frac{1}{\lambda} J_0(\lambda a) + \frac{a}{2} J_1(\lambda a) \right].$$

Ezen értékek figyelembevételével a lemez középsíkján fekvő pontok z irányú eltolódását kifejező egyenlet így alakul:

$$\zeta = \frac{3(m-1)}{4mG\lambda^3 t^3} c^{III} \cdot \left[\frac{1}{\lambda} J_0(\lambda r) - \frac{1}{\lambda} J_0(\lambda a) + \frac{J_1(\lambda a)}{2a} (r^2 - a^2) \right]. \quad (32)$$

Ismervén a $\zeta = \zeta(r)$ függvényt, a sugárirányú feszültségeket az ismert

$$\sigma_r = -\frac{2G}{m-1} \left(m \frac{d^2 \zeta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\zeta}{dr} \right) \cdot z$$

képlet segítségével határozhatjuk meg. Ezek szerint

$$\sigma_r = -\frac{3c^{III}}{2m\lambda^3 t^3} \left[\frac{m}{\lambda} \cdot \frac{d^2 J_0(\lambda r)}{dr^2} + \frac{m}{a} J_1(\lambda a) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dJ_0(\lambda r)}{dr} + \frac{1}{a} J_1(\lambda a) \right],$$

illetve a

$$\frac{dJ_0(\lambda r)}{dr} = -\lambda J_1(\lambda r),$$

$$\frac{d^2 J_0(\lambda r)}{dr^2} = \frac{\lambda}{r} J_1(\lambda r) - \lambda^2 J_0(\lambda r)$$

összefüggések figyelembevételével

$$\sigma_r = \frac{3c^{III}}{2m\lambda^3 t^3} \left[m\lambda J_0(\lambda r) - (m-1) \frac{1}{r} J_1(\lambda r) - \frac{m+1}{a} J_1(\lambda a) \right] \cdot z. \quad (33)$$

A (33 képlet) az $r = 0$ helyen határozatlanná válik. Itt σ_r értéke az $\rightarrow 0$ határátmenettel állapítható meg. A számítást az

$$J_0(0) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{1}{r} J_1(\lambda r) \right] = \frac{\lambda}{2}$$

összefüggések figyelembevételével végrehajtva, a σ_r feszültségre az $r = 0$ helyen a következő képlet adódik:

$$\sigma_r(0, z) = \frac{3(m+1)c^{III}}{3m\lambda^2 t^3} \left[1 - \frac{2J_1(\lambda a)}{\lambda a} \right] \cdot z.$$

A lemezlapok középpontjában, vagyis az $r = 0, z = \pm t$ pontokban

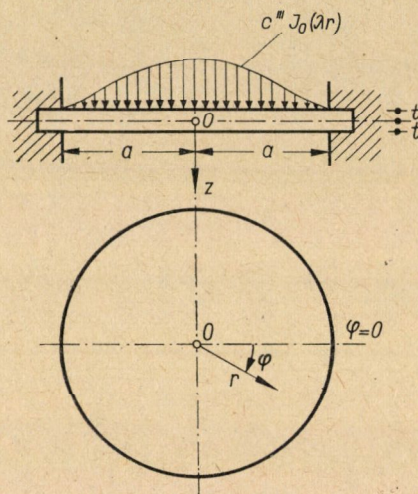
$$\sigma_r(0, \pm t) = \pm \frac{3(m+1)c^{III}}{4m\lambda^2 t^2} \left[1 - \frac{2J_1(\lambda a)}{\lambda a} \right]. \quad (34)$$

3. Az eredmények összehasonlítása

Érdekes lesz a pontosabb elmélet szerinti σ_r feszültségeket a Kirchhoff-féle lemezelméletből adódó σ_r feszültségekkel egybevetni. Az összehasonlítást az

$$m = 4$$

érték feltételezésével a lemezlapok középpontjában végezzük el, de csak a $k = 1$ tehertagból származó feszültségek összehasonlításával foglalkozunk.



4. ábra. A $p = c J_0(\lambda r)$ terherrendszer

Terhelésként a lemez $z = -t$ lapjára ható

$$p = c J_0(\lambda r)$$

intenzitású $+z$ irányban ható megoszló erőrendszert veszünk számításba (4. ábra). Ezt az erőrendszert a pontosabb számító eljárás során egy a lemez középsíkjára antimetrikus és egy szimmetrikus terherrendszerre bontjuk fel, melyek intenzitása

$$p^I = c^I J_0(\lambda r), \quad c^I = \frac{c}{2},$$

illetve

$$p^{II} = c^{II} J_0(\lambda r), \quad c^{II} = \frac{c}{2}.$$

A Kirchhoff-féle közelítő elmélet alkalmazása során viszont a két terherrend-

szert együttesen vesszük számításba, tehát a számításba veendő teherrend-
szer:

$$p^I = c^{III} J_0(\lambda r), \quad c^{III} = c.$$

Esetünkben, lévén $k = 1$, a képletekben szereplő $\lambda = \lambda_1$ sajátértéket a nul-
ladrendű $J_0(x)$ Bessel-féle függvény első zérushelye határozza meg. Minthogy
az $J_0(x) = 0$ egyenlet első gyöke [6]

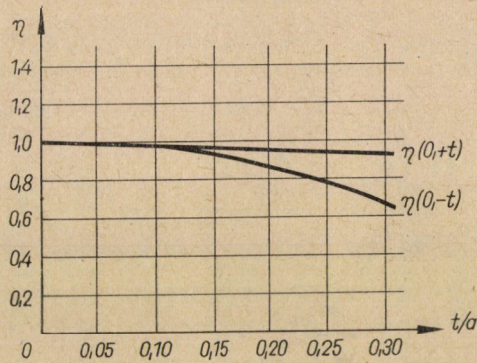
$$x_1 = 2,4048,$$

ezért

$$\lambda_1 = 2,4048/a$$

és

$$J_1(\lambda_1 a) = J_1(x_1) = 0,5191.$$



5. ábra. A pontos és közelítő feszültségértékek viszonya a $z = \pm t$ lemezlapok középpontjában

Az összehasonlító számítást különböző t/a viszonyszámok esetére el-
végezve, a $\sigma_r(0, \pm t)$ feszültségekre az I. táblázatba foglalt értékeket találtuk.
E táblázatban a $\sigma_r^I(0, \pm t)$, $\sigma_r^{II}(0, \pm t)$ és $\sigma_r^{III}(0, \pm t)$ betűjel a p^I , p^{II} , p^{III} teher-
rendszerből származó sugárirányú feszültségeknek az $r = 0$, $z = \pm t$ helyen
vett értékét jelenti. Ugyanitt az $\eta(0, \pm t)$ számoszlopok a pontosabb elmélet-
nek megfelelő $\sigma^I(0, \pm t) + \sigma^{II}(0, \pm t)$ feszültségek és a Kirchoff-féle közelítő
elmélet szerinti $\sigma^{III}(0, \pm t)$ feszültségek hányadosát tüntetik fel:

$$\eta(0, \pm t) = \frac{\sigma^I(0, \pm t) + \sigma^{II}(0, \pm t)}{\sigma^{III}(0, \pm t)}.$$

Mint az I. táblázat $\eta(0, \pm t)$ oszlopaiból, valamint az 5. ábrából meg-
állapítható, vékony lemez esetében a Kirchoff-féle közelítő képlettel számított
sugárirányú feszültség alig tér el a pontosabb elmélet szerinti sugárirányú
feszültségtől. Viszonylag vastagabb lemezek esetében a helyzet más: a pontos
és közelítő feszültségértékek jelentősen különböznek egymástól.

I. táblázat

A sugárirányú feszültségek összehasonlítása a lemez $z = \pm t$ lapjának középpontjában

t/a	$c_I^I(0, \pm t)$	$c_I^{II}(0, \pm t)$	$c_I^{III}(0, \pm t)$	$\eta(0, +t)$	$\eta(0, -t)$
$\rightarrow 0$	$\pm \frac{0,0921}{(t/a)^2} c$	0,090 c	$\pm \frac{0,0921}{(t/a)^2} c$	1,000	1,000
0,05	$\pm 36,416 c$	0,091 c	$\pm 36,843 c$	0,997	0,992
0,10	$\pm 9,012 c$	0,096 c	$\pm 9,211 c$	0,989	0,968
0,15	$\pm 3,896 c$	0,103 c	$\pm 4,094 c$	0,977	0,927
0,20	$\pm 2,109 c$	0,113 c	$\pm 2,303 c$	0,965	0,867
0,25	$\pm 1,286 c$	0,125 c	$\pm 1,474 c$	0,958	0,787
0,30	$\pm 0,842 c$	0,140 c	$\pm 1,024 c$	0,958	0,686

IRODALOM

1. MICHELL, J. H.: On the Direct Determination of Stress in an Elastic Solid, with Application to the Theory of Plates. *Proceedings of the London Mathematical Society* 31 (1899), 100–124.
2. LOVE, A. E.—TIMPE, A.: Lehrbuch der Elastizität. G. Teubner, Leipzig—Berlin 1907.
3. DOUGALL, J.: *Transactions of the Edingborough Royal Society* 41 (1904)
4. CSONKA P.: Elastic Theory of Plane Plates of Uniform Thickness. *Periodica Polytechnica. Engineering-Maschinen- und Bauwesen* 1 (1957), 103–120.
5. CSONKA P.: Ein Lösungssystem der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie. *Acta Techn. Hung.* 2 (1951), 487–490
6. JAHNKE, E.—EMDE, F.: Tables of Functions with Formulae and Curves, 4. kiadás. Dover Publications, New York 1945