HORVÁTH IMRE

AZ INVARIÁNS FÜGGVÉNY, MINT A HASONLÓSÁG FELTÉTELE

1. *Bevezetés*

A természettudományos kutatás módszerei között az elméleti megfontolásokon kívül — mint ismeretes — a kísérleti munkának rendkívül jelentős szerepe van. De a természettudományok egyes ágazatai közül is némelyek — mint az áramlástan, hőtan, anyagátadási problémák stb. — e szempontból még inkább kiemelkednek.

A kísérleti módszerre — a problémák sokoldalúsága miatt — egységes metodika nem alakulhatott ki. De bizonyos rokon vonatkozások az egyes kísérletek lefolytatásánál mégis felismerhetők. Ennek pedig véleményem szerint hasonlóság-elméleti alapja van. Ez talán legszemléletesebben abból következtethető, hogy végső soron *minden kísérlet, minden mérés hasonlósági problémának fogható fel. Igy a hasonlóság-elmélet a kísérletezés elmélete.* Mindez akkor válik különös tekintettel nyilvánvalóvá, ha áttekintésében és részleteiben ismerjük az egyes feladatoknál lejátszódó alapfolyamatokat, azoknak reprodukálhatósági és regisztrálási lehetőségeit.

A klasszikus hasonlóság-elmélet alkalmazásával azonban nagyon sok esetben a kísérletezés során *akadályokba* ütközünk — különösen összetettebb feladatok esetében — ami főként abban nyilvánul meg, hogy a kérdéses jelenséget befolyásoló változókat, illetőleg az azokból képezhető dimenzió nélküli számokat nem vehetjük kivétel nélkül egyidejűleg figyelembe, mert akkor ellentmondásokhoz jutunk. A legismertebb példát említve: az olyan hidromechanikai jelenség esetében, amely a tehetetlenségi, nehézségi és surlódási erők hatása alatt játszódik le, azaz a folyamat a *Froude-* és a *Reynolds-számokkal* jellemezhető, — mint a hajóvontatási kísérleteknél is — e két dimenzió nélküli számból következő hasonlósági feltételek ($\lambda_t = \lambda_l^{1/2}$, ill. $\lambda_t = \lambda^2$, és az ezekből számítható többi fizikai mennyiség átszámítási tényezői is) ellentmondóak. Hasonlóképpen hőátadási folyamatoknál pl. a *Peclet* és a *Nusselt* számokból következő hasonlósági feltételek egyidejűleg nem vehetők figyelembe. Fokozottabb mértékben merül fel e nehézség, ha a kérdéses jelenséget még anyagátadási, kémiai, stb. folyamatok is kísérik.

Adott esetekben a kutatók igyekeztek a nehézséget áthidalni különböző módszerekkel — mint *William Froude* a hajóvontatási kísérleteknél [18], vagy a különböző léptékű berendezésekben eltérő fizikai tulajdonságokkal rendelkező anyagok alkalmazásával stb. — de e módszerek *nem általánosíthatók*.

Korábbi tanulmányomban egy eljárás alapgondolatait ismertetem, amellyel a fenti nehézségek — véleményem szerint *általánosabban* — kiküszöbölhetők [4, 6, 7]. Ennek a következménye természetesen az, hogy *a klasszikus hasonlóság-elmélet által előírt feltételeket adott esetben részben módosítani kell.*

Jelen dolgozatom *célkitűzése* kettős. Egyrészt a főbb hasonlóság-elméleti alapfogalmakat — mint a *hasonlóság, analógia, invariancia, méretarányhatás, törvényszerűség* — értelmezzük a javasolt módszer tételei segítségével, másrészt *kísérleten alapuló példával* kívánom igazolni az eljárás alkalmazhatóságát.

Az elméleti elgondolások alkalmazására és igazolására már néhány példát ismertettem a talajban végbemenő szivárgási feladatok, és a szennyvíztisztító berendezésekben lejátszódó oxigénfelvételi folyamatok vizsgálatával kapcsolatban [5, 7]. Ezúttal egy hőátadási, tehát hőhasonlósági kérdést választottam a vizsgálat alapjául. Mielőtt azonban a részletekre rátérnék, célszerűnek tartom a már ismertetésre került elvi elgondolások alaptételeit röviden összefoglalni.

2. *Az invariáns függvény*

1. Egy tetszőleges természeti folyamat hasonlóság-elméleti és kismintakísérleti vizsgálata esetén kiindulási alapként a jelenséget egyértelműen leíró, minimális számú dimenzióval bíró változót tartalmazó egyenletet tekintjük a kezdeti és kerületi feltételek figyelembevételével. A kérdéses egyenlet lehet elméleti úton matematikai eszközökkel levezetett összefüggés, félempirikus, vagy empirikus kapcsolat. A kapcsolat leírási formája lehet egyenlet, függvényábra vagy táblázat. A jelenséget egyértelműen leíró, minimális számú dimenzióval bíró változót tartalmazó kapcsolatot a továbbiakban *alapösszefüggésnek,* az egyenletet pedig *alapegyenletnek* nevezzük. A változók minimális számának meghatározása fizikai meggondolások alapján a csoportelmélet axiómáinak figyelembevételével lehetséges [1, 4].

2. Az *alapösszefüggés,* illetőleg *alapegyenlet* minden esetben dimenzió nélküli alakra hozható. Tekintettel arra, hogy az alapegyenlet a kérdéses folyamatot jellemzi, így kell, hogy annak dimenzió nélküli alakja is jellemző legyen. Abban az esetben, ha az alapegyenletet kísérleti úton határozzuk meg, (empirikus összefüggés), akkor az már eleve dimenzió nélküli alakban írható fel. E dimenzió nélküli függvény változói dimenziómentes számok. A jelenséget egyértelműen leíró, minimális számú dimenziómentes változót tartalmazó összefüggést — amely a kérdéses alapegyenlet dimenziómentes alakjának tekinthető — *invariáns függvénynek* nevezzük. *Az invariáns függvényt tekintjük a hasonlóság feltételi egyenletének.*

3. Nem írjuk elő azt, hogy az invariáns függvényt alkotó egyes dimenzió nélküli számok értékei azonosak legyenek a különböző méretű berendezésekben (kismintában és a főkivitelben). Hiszen ezt általában nem is tudjuk megvalósítani. (Tudniillik éppen ez jelenti a klasszikus hasonlóság-elmélet alkalmazásának fentiekben már említett nehézségeit.) Csupán azt írjuk elő, hogy az invariáns függvény legyen azonos a kismintában és a főkivitelben egyaránt. Amennyiben adott esetben az invariáns függvényt alkotó egyes dimenzió nélküli számok is azonosak a különböző méretű berendezések esetében, úgy a klasszikus hasonlóság-elmélet értelmezése szerint is hasonlóság áll fenn. Ha pedig az invariáns függvény egyetlen dimenzió nélküli számból áll (pl. a *Froude*- vagy a *Reynolds*-számból stb.), akkor az *invariáns függvény speciális esetéhez,* egy klasszikus értelemben elnevezett kismintatörvényhez jutottunk.

3. *A hasonlóság-elmélet néhány alapvető fogalmának értelmezése az invariáns függvény segítségével*

Az invariáns függvénynek a 2. fejezetben leírt meghatározásával kapcsolatban az alábbi kérdés merül fel: *A klasszikus hasonlóság-elmélet szerint definiált főbb alapfogalmak értelmezése módosul-e, és ha módosul, akkor a változás milyen jellegű.* Másszóval mondva: a második fejezetben összefoglalt főbb elvi megfontolásainknak milyen következményei vannak a klasszikus hasonlóság-elmélet tételeire, alapfogalmaira. Az alábbiak során ebben az értelemben vesszük vizsgálat alá a következő fogalmakat.

a) A klasszikus hasonlóság-elmélet három tételét: a *Newton*, a *Buckingham—Federman*, és a *Kirpicsev—Guhman* tételt, és ezekből következően a *hasonlóság értelmezését.*

b) Az *analógia,*

c) az *invariancia,*

d) az ún. *méretarányhatás* (scale effeckt),

e) és végül a hasonlósági törvények *„törvényszerűségének"* fogalmát.

a) A hasonlóságról

A hasonlóság *első* tételét — a *Newton-tételt* — a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

Hasonló jelenségeknek azonos hasonlósági feltételei vannak.

A hasonlóság *második* tétele — a *Buckingham—Federman tétel* — a következőképpen szól.

Minden esetben felírható egy olyan integrál, amely a differenciálegyenletet alkotó dimenzió nélküli számok függvénye. Tehát ugyanazok a dimenzió nélküli számok vezethetők le a differenciálegyenletekből, vagy azok integráljaiból.

A hasonlóság *harmadik* tételének — a *Kirpicsev—Guchman tétel* — definiciója: *A jelenségek akkor, és csakis akkor hasonlóak egymáshoz, ha az egymásnak megfelelő összes dimenziómentes szám, mint hasonlósági feltétel számértéke azonos.*

Vizsgáljuk meg a továbbiakban azt, hogy e három tétel milyen értelmezést kap az invariáns függvény hasonlósági feltételként történő bevezetésekor. Az invariáns függvényt úgy definiáltuk, mint a kérdéses jelenséget egyértelműen leíró, minimális számú dimenziómentes változót tartalmazó összefüggést, amely a kérdéses alapegyenlet (pl. differenciálegyenlet) dimenzió nélküli alakja. A dimenzómentes változók minimális számát az

$$Sz = n - (k + 1)$$

összefüggés adja meg [1, 4]. A fentiek szerint definiált invariáns függvényt tekintjük a hasonlóság feltételének. Eszerint a jelenségek akkor hasonlók, ha invariáns függvényük azonos. Így a *Newton*-féle első hasonlósági tétel, és a *Buckingham—Federman* második hasonlósági tétel *változatlan* formában érvényben marad. Sőt a második tételt tekintjük az alapegyenletről az invariáns függvényre történő áttérés, transzformáció hasonlóság-elméleti alapjának.

A hasonlóság harmadik tételének értelmezésében azonban jelentős *módosulás* jelentkezik. Ugyanis amikor az invariáns függvényt tekintjük a hasonlóság feltételének, ugyanakkor nem írjuk elő azt, hogy az invariáns függvényt alkotó összes dimenziómentes szám értéke is a különböző rendszerekben egyúttal azonos legyen. Hiszen éppen ennek a megvalósítása jelenti a klasszikus hasonlóság-elmélet alkalmazásának a fentiekben már részletezett nehézségeit. Így a harmadik tételt a következő módosított, általánosabb alakban írhatjuk:

A jelenségek akkor hasonlóak egymáshoz, ha invariáns függvényük azonos. E definició a *Kirpicsev—Guhman* tétel általánosabb formájának tekinthető, hiszen adott esetben az invariáns függvények azonossága mellett az azt alkotó (több, vagy minden) dimenziómentes szám azonossága is megvalósítható lehet a különböző méretekben lejátszódó folyamatok esetében. Azáltal, hogy a hasonlóság feltételét általánosabb formában definiáltuk,

1. elkerültük a klasszikus hasonlóság-elmélet alkalmazásából adódó ellentmondásokat [4],
2. bővítettük a hasonlóság-elmélet alkalmazhatóságának lehetőségeit,
3. a gyakorlati kismintakísérletezés számára *módszert* javasoltunk a kérdéses folyamatok állapot, illetőleg mozgásegyenletének (alapegyenletének) invariáns függvény formájában hasonlósági feltételként történő alkalmazására.

b) *Az analógiáról*

A továbbiakban vizsgáljuk meg azt, hogy az *analógia* fogalma az invariáns függvény definiciója alapján milyen értelmezést kap.

Mint ismeretes, *analóg jelenségeknek* nevezzük azokat a folyamatokat, állapotokat, amelyeket leíró matematikai egyenlet, vagy egyenletek azonos alakuak, illetőleg azonos alakra hozhatók, és az egyenletekben szereplő jelek — a kezdeti és a határfeltételeket is figyelembe véve — (a természeti folyamatot jellemző matematikai szimbólumok) fizikai értelmezése részben vagy egészben egymástól eltérő. Az invariáns függvény definiciója — mint hasonlósági feltétel — az analógia fogalmát új oldalról világítja meg, illetőleg az invariáns függvény alapján értelmezett egymáshoz hasonló folyamatoknak az analóg folyamatokkal való *szorosabb kapcsolatára* mutat rá. Ez azáltal vált lehetségessé, hogy *mind a hasonló, mind az analóg folyamatokat az állapot- vagy mozgásegyenlet* — az általunk a fentiekben értelmezett alapegyenlet — *alapján definiáljuk*. Tehát egy adott feladatnak a (formailag) kétféle (de alapjában ugyanazon) módszerrel: a hasonlóság-elméleten alapuló kismintakísérletezés módszerével, illetőleg az analógia módszerével történő megoldásánál egyaránt a folyamatot leíró alapegyenletet — illetőleg annak dimenzió nélküli alakját — tekintjük feltételi egyenletnek. Első esetben a hasonlóság feltételi egyenletének, a második esetben pedig az analógia feltételi egyenletének. A fentiek alapján az alábbi főbb megállapításokat tehetjük.

1. *Az analógia a hasonlóság általános esetének fogható fel.* Tehát az invariáns függvénnyel értelmezett hasonlóság az analógiának egy speciális esete, mikor is az alapegyenletben szereplő matematikai jelek fizikai értelmezése a különböző rendszerekben azonos.
2. Az 1. pont alapján *az analógia és a hasonlóság nem tekinthető kölcsönösen egymás különleges esetének*, mivel az analógia minden esetben az általánosabb fogalom.
3. *Az analógiát* — az irodalomban is elterjedt kifejezéssel — *matematikai hasonlóságnak nevezzük.*

4. Egy tetszőleges természeti folyamatot leíró, minimális számú változót tartalmazó alapegyenletet, illetőleg annak dimenzió nélküli alakját a kezdeti és kerületi feltételekkel együtt a kérdéses folyamat *matematikai modelljének* tekintjük. E matematikai modell lehet az analógia, azaz a matematikai hasonlóság feltételi egyenlete, (ha analóg folyamatok vizsgálatáról van szó), és lehet az invariáns függvénnyel definiált hasonlóság feltételi egyenlete (hasonlósági törvény, kismintatörvény).

5. Az analógián alapuló berendezéseket *analóg kismintáknak, analóg modelleknek*, az invariáns függvénnyel definiált hasonló rendszereket pedig egyszerűen *kismintáknak* (illetőleg nagymintáknak) nevezzük.

c) *Az invarianciáról*

Tekintettel arra, hogy az általunk definiált egyik lényeges alapfogalom: az *invariáns függvény* kifejezésben az ,,invariáns'' szó szerepel, amelynek a szakirodalomban is gyakran nem egyértelműen definiált értelmezését találjuk, célszerűnek tartjuk e kifejezésről néhány gondolat megemlítését.

Invariancia alatt — mint ismeretes — legáltalánosabb formában *változatlanságot* értünk. Hasonlósági értelemben az invariáns fogalom alatt *egyrészt* dimenzió nélküli hatványszorzatot értünk, *másrészt* e dimenzió nélküli hatványszorzatoknak azt a tulajdonságát, hogy hasonló rendszerek esetében számértékük állandó. E kétféle meghatározás bizonyos esetekben egymással nem egyeztethető össze, amint erre az alábbiakban rávilágítunk.

Ugyanis az első értelmezés szerint az invariancia azt fejezi ki, hogy egy dimenzió nélküli hatványszorzat esetében a fizikai változók számértékeit tetszőleges alapmértékrendszer (cm, g, és sec; vagy m, kg, óra; stb.) alkalmazásával helyettesíthetjük az algebrai kifejezésbe anélkül, hogy a hatványszorzat számértéke megváltozna. Ebben az értelemben az invariancia fogalom tulajdonképpen a dimenzió nélküli jelleg következménye, illetőleg azzal azonosan értelmezhető.

A második értelmezés ettől lényegileg eltérő: a dimenzió nélküli hatványszorzatok értékei hasonló rendszerek esetében változatlanok. Tehát pl. olyan — különböző méretekben lejátszódó — áramlási folyamatok esetében, amelyekre a *Froude*-féle kismintatörvény érvényes, az áramlási tér tetszőleges — de a rendszerek egymásnak megfelelő — pontjaiban tetszőleges időpillanatban értelmezhető és számítható *Froude*-számok számértékei azonosak. Az invarianciának ezen értelmezése tulajdonképpen a kismintakísérletezés elméletének az alapja. *Lehet* ugyanis *egy hatványszorzat dimenzió nélküli, de ez még nem jelenti azt, hogy számértéke a különböző rendszerek esetében állandó.*

Az invariáns függvény szintén dimenzió nélküli kapcsolat, hiszen az dimenzió mentes csoportok közt levő összefüggés. Azonban az ,,*invariáns*'' *jelzővel mégis a törvényszerűség invarianciáját kívánom hangsúlyozni, tehát azt, hogy az invariáns függvény hasonló rendszerek esetében azonos.* A hasonlóságelméletben az invarianciának ez az értelmezése reprezentál törvényszerűséget.

Adott esetben mindig célszerű az ilyen alapfogalmak értelmezésének a tisztázása a félreértések elkerülése végett. Különösen akkor, ha ugyanazzal az elnevezéssel két, vagy több fogalmat jelölünk. Természetesen még egyértelműbb és egyszerűbb a kérdés, ha az eltérő fogalmakat különbözőképpen fejezzük ki. Esetünkben hasonlóság-elméleti szempontból — véleményem szerint —

az ,,invariancia" kifejezést a második értelmezés szerint célszerű alkalmazni, az első értelmezés szerint pedig a ,,dimenziómentes", ,,dimenzió nélküli" jelző teljesen kielégítő.

d) *A méretarányhatásról*

Vizsgáljuk meg a továbbiakban azt, hogy az ún. *méretarányhatás* (scale effect) hogyan értelmezhető az invariáns függvény segítségével. A kismintakísérletezésben méretarányhatásnak azt a jelenséget nevezzük, amikor a különböző méretű rendszerekben lejátszódó folyamatokat jellemző valamely geometriai, kinematikai, vagy dinamikai stb. jellegű változók bizonyos intervallumában a folyamatok hasonlósága nem valósítható meg. Pl. egymástól méreteiben túlzottan eltérő rendszerek esetében — azaz ha a hosszak átszámítási tényezője túl nagy, — vagy ha a különböző méretű rendszerekben túlzottan eltérő sebességértékek adódnak stb. Természetesen egy adott feladat megoldásánál minden esetben vizsgálat tárgyává kell tenni azt, hogy az adott kisminták alkalmazásával e káros hatást kiküszöbölhetjük-e, illetőleg a kismintákat úgy kell megterveznünk, hogy a méretarányhatás ne jelentkezzen.

Tekintettel arra, hogy az invariáns függvényt alkalmaztuk a hasonlóság feltétele gyanánt, az ún. méretarányhatás fogalmát is ezzel értelmezzük. Eszerint *méretarányhatás akkor lép fel, ha az alapegyenlet, illetőleg az invariáns függvény* — a folyamatot jellemző valamely geometriai, kinematikai, dinamikai, hőátadási, kémiai stb. jellegű változók, vagy a belőlük képezett dimenzió mentes számok valamely intervallumában — *megváltozik.* E módosulást jelentheti újabb változók belépése, és a régi változók matematikai funkciójának megváltozása. A fenti megállapítások a mennyiségi változások minőségi változást okozó törvényszerűségéből is következtethetők.

Az alapegyenlet, illetőleg az invariáns függvény eme módosulása a kérdéses folyamatban rejlő *törvényszerűség változásában* nyilvánul meg, és azáltal, hogy az alapegyenlet dimenzió nélküli alakját tekintjük hasonlósági feltétel gyanánt, a hasonlósági leképezésnél, a kismintakísérletezésnél is messzemenően figyelembe vesszük a törvény ezen módosulását.

A méretarányhatásnak az invariáns függvénnyel való értelmezése indokolttá teszi azt, hogy e műszaki szakkifejezést — amely nem teljesen fedi a fogalom lényegét — a továbbiakban ,,*invariáns függvény változás hatás*"-nak nevezzük.

e) *A hasonlósági törvények törvényszerűségéről*

Végezetül a hasonlósági törvények, a kismintatörvények *törvényszerűségének* kérdését vegyük röviden elemzés alá.

Mindenekelőtt meg kell állapítanunk azt, hogy a klasszikus kismintatörvények — mint a *Froude*, *Reynolds*-féle stb. hasonlósági törvények — matematikai kifejezési módja (különösen a szinte mechanikus módszernek tekinthető dimenzióanalízis, de még a különböző erők, energiák stb. aránybaállításával történő dimenzió mentes számok képzési módszere is) könnyen arra enged következtetni, hogy a hasonlósági törvények nem is tekinthetők valóban törvényeknek [14].

Az alábbiakban az invariáns függvény fogalmának segítségével igazoljuk azt, hogy a klasszikus kismintatörvények *ellentmondásokat nem tartalmaznak és törvényeknek tekinthetők.*

Teljes általánosságban minden matematikai igazolás nélkül is belátható, hogy egy tetszőleges természeti folyamatot egyértelműen leíró állapot-, mozgásegyenlet (alapegyenlet) törvényszerűséget fejez ki, amely a jelenségre érvényes bizonyos határok, feltételek között. Továbbmenően az a tény, hogy az alapegyenletet dimenziómentes alakra hozzuk, vagy már eleve dimenzió nélküli alakban írjuk fel azt, szintén nem változtat a törvényszerűség tartalmán, hiszen ez csupán koordináta-transzformációt jelent. Tehát következik, hogy az általunk definiált *invariáns függvény törvénynek tekinthető.*

Tanulmányunk 2. fejezetében már említettük, hogy a klasszikus kismintatörvényeket az invariáns függvény speciális esetének tekintjük.

Ennek szemléltetése céljából vizsgáljunk egy olyan áramlási folyamatot, amelyet csupán a tehetetlenségi és a nehézségi erők befolyásolnak. A jelenség alapegyenlete a *Navier—Stokes* törvény (illetőleg a *Bernoulli* törvény) speciális alakja, amelyben e két erőhatás (illetőleg energia) szerepel, s jelen esetben a nyomóerő, surlódási erő értéke nulla. Így jutunk a $dv/dt = g$ összefüggésre, amiből a $dv/dt \sim v/t$ hasonlósági transzformációval, a számláló és a nevező l-el történő szorzása után a $v^2/gl = Fr$ számhoz jutunk, (ahol a $\sim$ jel arányosságot jelent). Ilyen értelemben a *Froude*-szám a *Navier—Stokes* törvény speciális alakja. Következésképpen szintén törvénynek tekinthető, csupán nem annyira általánosítható, mint az eredeti törvényszerűség. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a *Froude*-szám nem törvény bizonyos kezdeti és kerületi feltételek között. A *Froude*-törvény — és a többi klasszikus kismintatörvény is — ellentmondástól mentes hasonlósági törvény. Tehát véleményem szerint helytelen a kismintatörvények ellentmondásairól beszélni. Ellentmondásokhoz csupán akkor jutunk, amikor a kismintatörvényeket érvényességi tartományuk határán kívül alkalmazzuk. Ez viszont semmiképpen sem írható a törvényszerűség rovására.

Ugyanezen kérdés további megvilágítása céljából tekintsük a légüres térben történő *szabadesés* jelenségét. A megtett út és a sebesség kapcsolatát az egyszerű $v = \sqrt{2gl}$ függvény adja meg. Ez bizonyos feltételek mellett (légüres tér, a Föld nehézségi erőterében) kétségkívül törvényszerűséget fejez ki. Mint fentebb említettük, a törvény jellege dimenzió nélküli alakban is változatlan, tehát a $v^2/gl = 2 = Fr$ szintén törvény kell, hogy legyen. Ezúttal tehát az alapegyenlet a $v = \sqrt{2gl} = \sqrt{Fr \cdot gl}$ összefüggés, az invariáns függvény pedig a *Froude*-számra egyszerűsödik.

Ezen egyszerű példa még további gondolatokat vet fel:

1. *Egy tetszőleges természeti folyamatot leíró összefüggést célszerű minden esetben dimenzió mentes alakban is felírni, mivel így általánosabb összefüggésekhez jutunk.* Hiszen a dimenzió mentes függvény minden egymáshoz hasonló folyamatra érvényes. Példánk esetében a $v = \sqrt{2gl}$ összefüggés helyett általánosabban azt írhatjuk, hogy $v^2/gl = 2$, vagy azt mondjuk, hogy $Fr = 2$. Ezáltal ugyanazt a függvénykapcsolatot is kifejezzük — sőt általánosabb formában — mivel a formát hasonlósági tartalommal is megtöltöttük.

2. Egy tetszőleges természeti folyamatot leíró összefüggés dimenzió nélküli állandóit — mint példánk esetében 2-es szám — hasonlósági állandóknak foghatjuk fel.

3. A hasonlóság fogalmának az invariáns függvénnyel történő értelmezésével *a hasonlósági törvények körét kibővítettük* a klasszikus kismintatörvények szerepének rovására. Eszerint a hasonlósági törvények száma végtelen, és e törvényseregnek egy hagyományos kismintatörvény csupán egyetlen tagja. Legfeljebb a műszaki gyakorlat, az alkalmazás gyakorisága emel ki néhányat, amelynek nagyobb jelentőséget tulajdoníthatunk.

4. *Az invariáns függvény alkalmazása egy hőhasonlósági feladat esetében*

Tekintsük vizsgálandó feladatképpen a szilárd testek esetében végbemenő hőátadás, hővezetés problémáját. Mielőtt ennek részleteire rátérnék, tekintsük a folyamat alapvető kérdéseit teljes általánosságban. E jelenség három differenciálegyenlettel jellemezhető [12].

a) A *Fourier*-féle hővezetési differenciálegyenlettel:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = a \cdot \Delta^2 \cdot T\,, \tag{1}$$

ahol

$$a = \frac{\lambda}{\varrho \cdot c}.$$

Ez az egyenlet összefüggést állapít meg a hőmérséklet térbeli és időbeli változásai között.

b) A vezetés útján átadott hőmennyiség a *Fourier*-törvény alapján számítható:

$$\mathrm{d}q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial l}\,\mathrm{dF}. \tag{2}$$

c) A szilárd test és egy áramló közeg (levegő, folyadék) érintkezési felületén végbemenő hőátadás a *Newton*-féle egyenlettel jellemezhető:

$$\mathrm{d}q = \alpha(T_k - T_f)\,\mathrm{dF} = \alpha \cdot \Delta T \cdot \mathrm{dF}. \tag{3}$$

Tekintettel arra, hogy a szilárd test és a körülötte áramló közeg határfelületén egy lamináris hártya van jelen, és ezen keresztül a hőátadás hővezetés útján történik, a (2) és a (3) összefüggések egybevetésével írhatjuk, hogy

$$\alpha \cdot \Delta T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial l}. \tag{4}$$

Ez — mint ismeretes — a hőcsere differenciálegyenlete, amely a szilárd testek felületén végbemenő hőátadás folyamatát írja le.

Belátható, hogy a kérdéses folyamatot leíró (1) és (4) számú differenciálegyenletek hasonlóság-elméleti megfontolások alapján három dimenziómentes számot reprezentálnak. Az elemi mennyiségeket a

$$\begin{gathered} \frac{\partial T}{\partial t} \sim \frac{T}{t}\,, \\ \Delta^2 \sim \frac{1}{l^2}\,, \\ \frac{\partial T}{\partial l} \sim \frac{T}{l} \end{gathered} \tag{5}$$

hasonlósági transzformációk alapján véges mennyiségekké alakítva, az (1)-ből az

$$\frac{a \cdot t}{l^2} = \mathrm{Fo} \tag{6}$$

alakú, és *Fourier*-szám néven ismert, a (4)-ből pedig az

$$\frac{\alpha \cdot l}{\lambda} = \mathrm{Bi} \tag{7}$$

alakú, és *Biot*-szám néven ismert dimenziómentes számot, és a $T/\Delta T$ *szimplexet* kapjuk. (Szimplexnek nevezzük két azonos dimenziójú mennyiség arányát.) A folyamatot jellemző dimenzió-nélküli függvénykapcsolat általános alakját tehát következőképpen írhatjuk fel:

$$\frac{T}{\Delta T} = f(\mathrm{Bi},\ \mathrm{Fo}). \tag{8}$$

E fenti három dimenziómentes szám mellett adott speciális esetekben a folyamatot, a berendezést jellemző hosszméretekből alkotott szimplexek is számításba jöhetnek.

A fentiekből következik, hogy olyan feladatok, amelyeket az (1) és (4) differenciálegyenletek a kezdeti és kerületi feltételekkel egyértelműen leírnak, e négyféle dimenziómentes szám, illetőleg azoknak valamilyen függvénykapcsolata is egyértelműen jellemez.

Ezen általános meggondolások után térjünk rá egy speciális feladat elemzésére.

Tekintsünk egy *szilárd sík falat, hengert*, illetőleg *gömböt*, amelyeket körülvevő közegben hirtelen hőmérsékletváltozás áll be. Kérdés a hőátadási folyamat hasonlósági feltétele. Tehát feladat: felírni a 2. fejezetben értelmezett alapegyenletet, és ennek alapján meghatározni a folyamatot jellemző invariáns függvényt, amely hasonlósági feltételként alkalmazható.

Ez esetben a hőátadás *Newton*-féle egyenlete a következőképpen írható fel:

$$\mathrm{d}Q = \alpha\,(T_k - T_f)\,\mathrm{d}t \cdot F. \tag{9}$$

Mivel a dQ átadott hőmennyiséget a szilárd test felvette, annak hőmérséklete emelkedett, és a benne megváltozott hőmennyiség

$$\mathrm{d}Q = c \cdot \varrho \cdot \mathrm{d}V\,(T_t - T_0). \tag{10}$$

A (9) és (10) összefüggések egybevetésével kapjuk az

$$\alpha(T_k - Tf)\,\mathrm{d}t \cdot F - c \cdot \varrho \cdot \mathrm{d}V(T_t - T_0) = 0 \tag{11}$$

egyenlet, ami tulajdonképpen az energiamegmaradás törvényét fejezi ki. A (11) összefüggést tekintjük a kérdéses folyamat alapegyenletének. Az invariáns függvényt az alapegyenlet dimenziónélküli alakjaként definiáltuk. Eszerint a (11) alapegyenletből a

$$\frac{\mathrm{d}V}{F \cdot \mathrm{d}t} \sim \frac{l}{t}$$

hasonlósági transzformáció alkalmazásával a

$$\frac{T_k - T_f}{T_t - T_0} = \text{const} \cdot \frac{c \cdot \varrho \cdot l}{a \cdot t} = \text{const} \cdot \left(\frac{\lambda}{a \cdot l}\right)\left(\frac{l^2}{a \cdot t}\right) \tag{12}$$

dimenzió nélküli függvénykapcsolathoz jutunk. A fizikai változókat az egyenlet egyik oldalára rendezve:

$$\left(\frac{T_k - T_f}{T_t - T_0}\right)\left(\frac{a \cdot l}{\lambda}\right)\left(\frac{a \cdot t}{l^2}\right) = \text{const} \cdot = K\,, \tag{13}$$

illetőleg a dimenziómentes csoportok helyére azok szimbólumait írva a

$$\left(\frac{\delta_w}{\delta}\right)(\text{Bi})\,(\text{Fo}) = K \tag{14}$$

alakú invariáns függvényt kapjuk végeredményül. Ez a (8) összefüggésnek egy speciális esete.

A 2. fejezetben összefoglalt elvi elgondolások szerint az invariáns függvényt tekintjük hasonlósági feltételnek. Azaz az invariáns függvényből határozzuk meg az ún. átszámítási tényezőket, amelyek a kisminták tervezésének alapjai. A (12), illetőleg a (13) összefüggések alapján tehát, ha:

$$\lambda_c = \lambda_\varrho = \lambda_a = 1\,,$$

azaz azonos anyagokból képezzük ki a különböző méretű (kisminta és a valóságos műtárgy) berendezéseket, és a

$$\left(\frac{\delta_w}{\delta}\right)' : \left(\frac{\delta_w}{\delta}\right)'' = 1\,, \tag{15}$$

akkor

$$\lambda_l = \lambda_t\,. \tag{16}$$

Azaz a hosszak és az idők átszámítási tényezője egyenlő. Az invariáns függvény tehát kismintatörvényként kezelhető.

Mint gyakorlati példát említem meg azt, hogy ha a szilárd anyagra, (pl. tartószerkezetre) dinamikai szempontból — a hőátadási folyamat mellett egyidejűleg — a tehetetlenségi- és a rugalmassági erő hat (mint főerők) —, azaz erőtanilag a *Cauchy—Rayleigh*-féle kismintatörvény érvényes:

$$\frac{\varrho \cdot v^2}{E} = \text{Ca} = \text{const}\,,$$

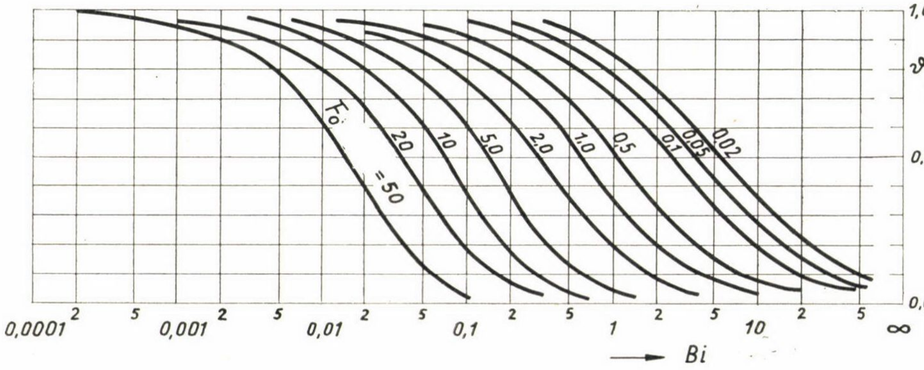
akkor $\lambda_\varrho = \lambda_E = 1$ esetében ugyancsak a $\lambda_l = \lambda_t$ egyenlőséghez jutunk. Ez azt jelenti, hogy adott esetben a klasszikus értelemben vett dinamikai hasonlóság megvalósítása mellett a hőátadási folyamatok is egyidejűleg figyelembe vehetők. Ennek pedig számos műtárgy vizsgálatánál kismintakísérletezési szempontból komoly gyakorlati jelentősége lehet.

A továbbiakban rátérünk a (14) *invariáns függvény érvényességének kísérleti igazolására*. Tekintettel arra, hogy e fenti elvi megfontolások laboratóriumi méréseken alapuló bizonyítására kísérleteket nem végeztünk, egy, az irodalomban már meglevő méréssorozatot használtunk fel az elmélet ellenőrzésére. Más szóval mondva: éppen azért választottuk ezt a példát az elmélet igazolására, az invariáns függvény fogalmának alkalmazására, mivel ez esetben egy meglevő — de más célból készült — kísérleti adatsor állt rendelkezésünkre.

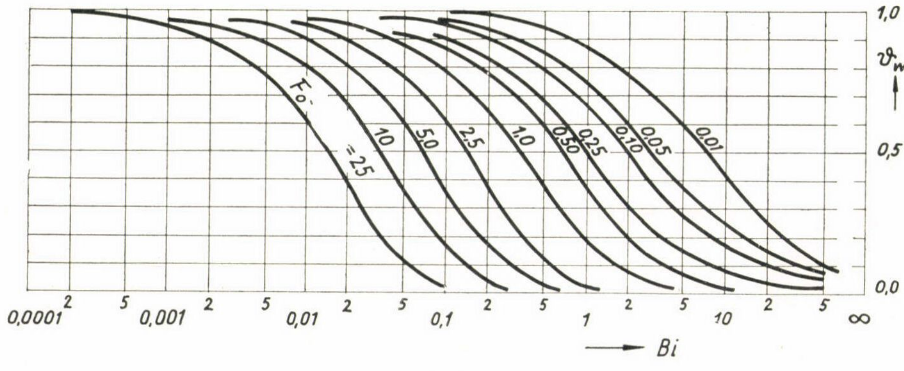
Szilárd testek esetében: *síkfal*, *henger* és *gömb* körül levő közeg hőmérsékletének hirtelen megváltozása következtében lejátszódó hőátadási folyamatot leíró

$$\frac{\delta_w}{\delta'} = f(\mathrm{Bi},\ \mathrm{Fo}) \tag{17}$$

függvényt *M. A. Mihejev* könyvében grafikus formában ismertette [12]. Ezt az *1.*, *2.* és a *3. ábrákon* tüntettük fel *Mihejev* nyomán. Bizonyítási alapként e



1. ábra

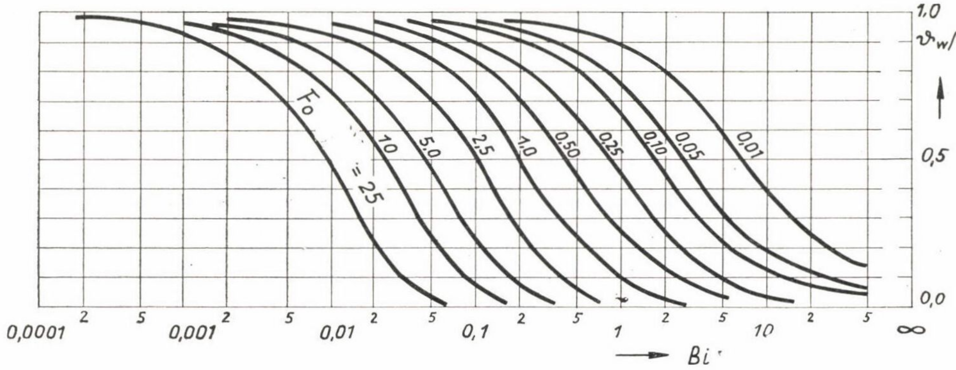


2. ábra

három — mérésekből származó — görbesereget használtuk fel. A törvényszerűség tökéletesebb kidomborítása céljából a görbesereg által meghatározott adatsort táblázatosan átdolgoztuk. Az eredményt az 1. táblázatban tüntettük fel (lásd 564—566 oldal). Eszerint a következő alapvető megállapítások tehetők:

a) Síkfal, henger és gömb esetében — a fentiekben jellemzett hőátadási folyamatnál — állandó δ_W/δ' arány mellett egy bizonyos intervallumban a *Bi* és a *Fo* számok szorzata állandó. Ez teljes mértékben igazolja a (14) invariáns függvény érvényességét. (Megjegyezzük azt, hogy mivel a (13), illetőleg a (14) jelű invariáns függvényben a δ_W/δ szimplex szerepel, szemben a (17) összefüggésben, illetőleg a táblázatban szereplő δ_W/δ' aránnyal, a bizonyítás a (15) feltételi egyenlet fennállása mellett érvényes.)

b) Síkfal esetében $1 < Fo < 50$,
henger esetében $0{,}5 < Fo < 25$,



3. ábra

gömb esetében pedig $0{,}5 < Fo < 25$ intervallumban a *Bi* és a *Fo* számok szorzata jó közelítéssel állandónak mondható azonos δ_w/δ' arány esetén. Az a tény, hogy a (14) invariáns függvény csak a megadott határokon belül tekinthető érvényesnek, egyúttal azt is jelenti, hogy a határokon kívül az invariáns függvény alakja megváltozik, esetleg egyéb fizikai változók is számításba jönnek, amint a fentiekben erről már a méretarányhatás tárgyalásakor részletesebben szóltunk.

c) Végül még e példa kapcsán arra kívánok rámutatni, hogy a hasonlósági meggondolások segítségével sok esetben egy *már meglevő* összefüggést, kapcsolatot más, illetőleg több oldalról szemlélve a törvényszerűségek újabb eddig nem ismert oldalai többrétű összefüggésben válnak nyilvánvalóvá.

5. *Számpélda*

Korábban megjelent és még sajtó alatt levő tanulmányaimban már több példával szemléltettem az invariáns függvény alkalmazását a hidraulika és az anyagátadási (diffúziós) folyamatok témaköréből [4, 5, 6, 7].

Ezúttal egy *hőátadási folyamat* hasonlósági feltételeit vizsgáljuk.

Tekintsük a *D átmérőjű csővezetékben végbemenő turbulens hőátadás* folyamatát. Laboratóriumi mérések szerint a folyamat változói között levő dimenziómentes kapcsolatot a

$$\mathrm{Nu} = 0{,}023 \cdot \mathrm{Re}^{0{,}8} \cdot \mathrm{Pr}^{0{,}4}$$

összefüggés írja le, ha $Re > 10^4$. Ez *McAdams*-féle összefüggés néven ismeretes. A fenti meggondolások szerint ezt tekintjük a folyamat invariáns függvényének. A hagyományos kismintatörvényeknek megfelelően a fizikai változókat tartalmazó szimbólumokat az egyenlőség egyik oldalán csoportosítjuk:

$$\frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Re}^{0,8}\,\mathrm{Pr}^{0,4}} = 0{,}023 = K\,,$$

illetőleg

$$\frac{\dfrac{a \cdot D}{\lambda}}{\left(\dfrac{D \cdot v}{\nu}\right)^{0,8} \cdot \left(\dfrac{\nu}{a}\right)^{0,4}} = 0{,}023 = K\,.$$

(Az a tény, hogy a $K = \text{const}$, kísérletekből adódott, ami egyúttal az invariáns függvénynek, mint hasonlósági törvénynek a kísérleti bizonyítását jelenti. Hasonlóképpen lehet a klasszikus kismintatörvények érvényességét is igazolni.)

Tegyük fel, hogy a különböző méretű rendszerekben azonos közeget áramoltatunk. Így tételezzük fel, hogy

$$\lambda_\nu = \lambda_\eta = \lambda_a = \lambda_\lambda = \lambda_K = 1\,.$$

Ezen feltételnek az invariáns függvénybe történő behelyettesítése és az egyszerűsítések elvégzése után a D átmérő, a v áramlási középsebesség, és az α hőátadási tényező átszámítási tényezőinek kapcsolatára a

$$\lambda_D^{0,2} \cdot \lambda_v^{-0,8} \cdot \lambda_\alpha = 1$$

egyenletet kapjuk. Ha azt kívánjuk, hogy a hőátadási tényezők átszámítási tényezője is egy legyen, akkor a

$$\lambda_D^{0,2} \cdot \lambda_v^{-0,8} = 1\,,$$

illetőleg a

$$\lambda_v = \lambda_D^{1/4}$$

eredményt kapjuk. Legyen egy adott esetben a kisminta és a valóságos műtárgy közti méretarány 1/16, tehát $\lambda_D = 16$, és a főkiviteli csővezetékben az áramlási középsebesség 100 cm/sec, akkor a kismintát úgy kell megtervezni, hogy benne a középsebesség

$$\lambda_v = \frac{v'}{v''} = 16^{1/4} = 2$$

összefüggés szerint

$$v'' = 50 \text{ cm/sec}$$

legyen. Ha a kismintában mért adatokból kívánunk következtetni a főkivitelre, akkor is hasonló módon járunk el. Legyen pl. $\lambda_D = 16$, $v'' = 75$ cm/sec, $\lambda_\alpha = 1$, akkor

$$v' = \lambda_v \cdot v'' = \lambda_D^{1/4} \cdot v'' = 2 \cdot 75 = 150 \text{ cm/sec}.$$

Természetesen mind a kisminta, mind a főkivitel esetében a $Re > 10^4$ feltételnek is teljesülni kell, hiszen az invariáns függvény — a *McAdams*-féle egyenlet — is csupán ezen feltétel mellett érvényes.

$$\frac{\delta_w}{\delta'} = f\ (Bi,\ Fo)\ \text{végtelen}$$

$\frac{\delta_w}{\delta'} = 0,9$			$\frac{\delta_w}{\delta'} = 0,8$			$\frac{\delta_w}{\delta'} = 0,7$		
Bi	Fo	Bi · Fo	Bi	Fo	Bi · Fo	Bi	Fo	Bi · Fo
0,002	50,00	0,100	0,004	50,00	0,200	0,007	50,00	0,350
0,005	20,00	0,100	0,010	20,00	0,200	0,017	20,00	0,340
0,010	10,00	0,100	0,020	10,00	0,200	0,025	10,00	0,250
0,020	5,00	0,100	0,040	5,00	0,200	0,070	5,00	0,350
0,050	2,00	0,100	0,080	2,00	0,160	0,160	2,00	0,320
0,080	1,00	0,080	0,180	1,00	0,180	0,250	1,00	0,250
0,130	0,50	0,065	0,300	0,50	0,150	0,500	0,50	0,250
0,300	0,10	0,030	0,600	0,10	0,060	1,000	0,10	0,100
0,450	0,05	0,023	0,800	0,05	0,040	1,800	0,05	0,090
0,750	0,02	0,015	1,300	0,02	0,026	2,500	0,02	0,050

$$\frac{\delta_w}{\delta'} = f\ (Bi,\ Fo)\ \text{végtelen}$$

0,002	25,00	0,050	0,005	25,00	0,125	0,007	25,00	0,175
0,005	10,00	0,050	0,012	10,00	0,120	0,018	10,00	0,180
0,010	5,00	0,050	0,025	5,00	0,125	0,040	5,00	0,200
0,020	2,50	0,050	0,050	2,50	0,125	0,070	2,50	0,175
0,050	1,00	0,050	0,100	1,00	0,100	0,160	1,00	0,160
0,080	0,50	0,040	0,200	0,50	0,100	0,350	0,50	0,175
0,150	0,25	0,037	0,400	0,25	0,100	0,500	0,25	0,125
0,200	0,10	0,020	0,500	0,10	0,050	0,800	0,10	0,080
0,400	0,05	0,020	0,800	0,05	0,040	1,300	0,05	0,065
0,900	0,01	0,009	1,900	0,01	0,019	3,000	0,01	0,030

$$\frac{\delta_w}{\delta'} = f\ (Bi,\ Fo)\ \text{gömb}$$

0,0017	25,00	0,0425	0,0030	25,00	0,0750	0,005	25,00	0,125
0,0040	10,00	0,0400	0,0070	10,00	0,0700	0,012	10,00	0,120
0,0075	5,00	0,0375	0,0150	5,00	0,0750	0,025	5,00	0,125
0,0170	2,50	0,0425	0,0350	2,50	0,0875	0,060	2,50	0,150
0,0400	1,00	0,0400	0,0800	1,00	0,0800	0,120	1,00	0,120
0,0700	0,50	0,0350	0,1500	0,50	0,0750	0,250	0,50	0,125
0,1400	0,25	0,0350	0,2500	0,25	0,0625	0,450	0,25	0,113
0,3000	0,10	0,0300	0,5000	0,10	0,0500	0,900	0,10	0,090
0,4000	0,05	0,0200	0,8000	0,05	0,0400	1,500	0,05	0,075
0,9000	0,01	0,0090	2,0000	0,01	0,0200	3,500	0,01	0,035

1. sz. táblázat

sík fal esetében

$\frac{\delta_w}{\delta'} = 0,6$			$\frac{\delta_w}{\delta'} = 0,5$			$\frac{\delta_w}{\delta'} = 0,4$		
Bi	Fo	Bi · Fo	Bi	Fo	Bi · Fo	Bi	Fo	Bi · Fo
0,010	50,00	0,500	0,015	50,00	0,750	0,020	50,00	1,000
0,025	20,00	0,500	0,030	20,00	0,600	0,050	20,00	1,000
0,050	10.00	0,500	0,070	10,00	0,700	0,080	10,00	0,800
0,100	5,00	0,500	0,150	5,00	0,750	0,200	5,00	1,000
0,250	2,00	0,500	0,250	2,00	0,500	0,450	2,00	0,900
0,450	1,00	0,450	0,600	1,00	0,600	0,800	1,00	0,800
0,705	0,50	0,375	1,000	0,50	0,500	1,500	0,50	0,750
1,800	0,10	0,180	3,000	0,10	0,300	4,000	0,10	0,400
2,500	0,05	0,125	4,000	0,05	0,200	6,000	0,05	0,300
4,000	0,02	0,080	5,000	0,02	0,100	10,000	0,02	0,200

hosszú henger esetén

0,010	25,00	0,250	0,014	25,00	0,260	0,018	25,00	0,650
0,025	10,00	0,250	0,030	10,00	0,300	0,040	10,00	0,400
0,050	5,00	0,250	0,060	5,00	0,300	0,080	5,00	0,400
0,100	2.50	0,250	0,130	2,50	0,325	0,180	2,50	0,650
0,250	1,00	0,250	0,350	1,00	0,350	0,400	1,00	0,400
0,500	0,50	0,250	0,600	0,50	0,300	0,800	0,50	0,400
0,800	0,25	0,200	1,000	0,25	0,250	1,500	0,25	0,375
1,500	0,10	0,150	1,800	0,10	0,180	3,000	0,10	0,300
2,000	0,05	0,100	3,000	0,05	0,150	4,000	0,05	0,200
5,000	0,01	0,050	7,000	0,01	0,070	12,000	0,01	0,120

esetében

0,007	25,00	0,175	0,009	25,00	0,225	0,012	25,00	0,300
0,018	10,00	0,180	0,025	10,00	0,250	0,035	10,00	0,350
0,040	5,00	0,200	0,050	5,00	0,250	0,070	5,00	0,350
0,080	2,50	0,200	0,110	2,50	0,275	0,150	2,50	0,375
0,170	1,00	0,170	0,200	1,00	0,200	0,250	1,00	0,250
0,350	0,50	0,175	0,450	0,50	0,225	0,700	0,50	0,350
0,700	0,25	0,175	0,900	0,25	0,225	1,300	0,25	0,325
1,400	0,10	0,140	1,800	0,10	0,180	2,500	0,10	0,250
2,000	0,05	0,100	3,000	0,05	0,150	4,000	0,05	0,200
4,500	0,01	0,045	7,000	0,01	0,070	9,000	0,01	0,090

$\frac{\delta_w}{\delta'}$ = f (Bi, Fo) végtelen sík fal esetén

$\frac{\delta_w}{\delta'} = 0{,}3$			$\frac{\delta_w}{\delta'} = 0{,}2$			$\frac{\delta_w}{\delta'} = 0{,}1$		
Bi	Fo	Bi · Fo	Bi	Fo	Bi · Fo	Bi	Fo	Bi · Fo
0,030	50,00	1,500	0,035	50,00	1,750	0,050	50,00	2,500
0,070	20,00	1,400	0,080	20,00	1,600	0,150	20,00	3,000
0,120	10,00	2,200	0,180	10,00	1,800	0,300	10,00	3,000
0,300	5,00	1,500	0,400	5,00	2,000	0,500	5,00	2,500
0,700	2,00	1,400	1,000	2,00	2,000	1,800	2,00	3,600
1,400	1,00	1,400	2,000	1,00	2,000	3,500	1,00	3,500
2,500	0,50	1,250	3,000	0,50	1,500	7,000	0,50	3,500
5,000	0,10	0,500	8,000	0,10	0,800	18,000	0,10	1,800
8,000	0,05	0,400	14,000	0,05	0,700	25,000	0,05	1,250
14,000	0,02	0,280	20,000	0,02	0,400	50,000	0,02	1,000

$\frac{\delta_w}{\delta'}$ = f (Bi, Fo) végtelen hosszú henger esetén

0,025	25,00	0,625	0,035	25,00	0,875	0,045	25,00	1,125
0,060	10,00	0,600	0,080	10,00	0,800	0,120	10,00	1,200
0,120	5,00	0,600	0,180	5,00	0,900	0,250	5,00	1,250
0,300	2,50	0,750	0,400	2,50	1,000	0,500	2,50	1,250
0,700	1,00	0,700	0,900	1,00	0,900	1,500	1,00	1,500
1,400	0,50	0,700	2,000	0,50	1,000	3,500	0,50	1,750
2,000	0,25	0,500	3,500	0,25	0,875	7,000	0,25	1,750
4,500	0.10	0,450	6,000	0,10	0,600	12,000	0,10	1,200
8,000	0,05	0,400	11,000	0,05	0,550	30,000	0,05	1,500
18,000	0,01	0,180	30,000	0,01	0,300	50,000	0,01	0,500

$\frac{\delta_w}{\delta'}$ = f (Bi, Fo) gömb esetében

0,018	25,00	0,450	0,020	25,00	0,500	0,035	25,00	0,875
0,045	10,00	0,450	0,060	10,00	0,600	0,090	10,00	0,900
0,080	5,00	0,400	0,120	5,00	0,600	0,180	5,00	0,900
0,180	2,50	0,450	0,250	2,50	0,625	0,400	2,50	1,000
0,400	1,00	0,400	0,600	1,00	0,600	0,900	1,00	0,900
0,800	0,50	0,400	1,500	0,50	0,750	2,500	0,50	1,250
1,800	0,25	0,450	3,000	0,25	0,750	4,500	0,25	1,125
4,000	0,10	0,400	6,000	0,10	0,600	10,000	0,10	1,000
6,000	0,05	0,300	9,000	0,05	0,450	20,000	0,05	1,000
16,000	0,01	0,160	30,000	0,01	0,300	50,000	0,01	0,500

JELÖLÉSEK

T jellemző hőmérséklet (C°),
T_k a szilárd testet körülvevő közeg hőmérséklete (C°),
T_f a szilárd test falának hőmérséklete (C°),
T_0 a szilárd test középhőmérséklete a $t = 0$ időpillanatban (C°),
T_t a szilárd test középhőmérséklete t időpillanatban (C°),
δ_W $T_k - T_f = \triangle T$ (Mihejevtől átvett jelölés),
δ' $T_k - T_0$ (Mihejevtől átvett jelölés),
δ $T_t - T_0$,
q időegységre vonatkoztatott hőmennyiség (kcal/óra),
Q hőmennyiség (kcal),
α hőátadási tényező (kcal/m². óra. C°),
λ hővezetési tényező (kcal/m. óra.C°),
c fajhő (kcal/kg. · C°),
ϱ sűrűség (kg/m³),
$a = \lambda/\varrho \cdot c$ hőmérsékletvezetési tényező (m²/óra),
t idő (óra),
E rugalmassági modulus (kg/m · sec²),
l jellemző hossz (m),
x, y, z egy térbeli pont koordinátái (m),
F felület (m²),
V térfogat (m³),
Sz az invariáns függvényt alkotó dimenziómentes változók minimális száma,
n az alapegyenletet alkotó dimenzióval bíró változók minimális száma,
k a dimenziómatrix rendszáma,
K dimenziómentes állandó,
Nu *Nusselt*-szám (szokás még *Biot*-számnak is nevezni),
Fo *Fourier*-szám,
Ca *Cauchy*-szám,
Fr *Froude*-szám,
Re *Reynolds*-szám.

(Azok a λ jelek, amelyek indexekkel vannak összekapcsolva, annak a fizikai mennyiségnek az átszámítási tényezőit jelölik, amelyekre az indexek utalnak. Továbbá kétvesszővel jelöltük a kismintában, egyvesszővel a valóságos méretben lejátszódó folyamat jellemzőit.)

IRODALOM

1. *Benedek Pál—László Antal:* A szabadsági fokról. *A Veszprémi Vegyipari Egyetem Közleményei.* 1961.
2. *V. Doležalik:* Hasonlóság és modellezés a kémiai technológiában. Műszaki Könyvkiadó, *Budapest.* 1962.
3. *G. Gröber—Sz. Erk:* A hőcsere elméleti alapjai. *Tud. és Műsz. Könyvkiadó Váll. Egyesülése.* 1936. (Oroszul.)
4. *Horváth Imre:* A hasonlóságról. *Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények.* 1963. 1—2.
5. *Horváth Imre:* A szivárgási jelenségek hasonlósága a kapilláris, surlódási és nehézségi erő közös figyelembevétele esetén. *Hidrológiai Közlöny,* 1962. 3.
6. *Horváth Imre:* Beiträge zur Ähnlichkeit der Sickererscheinungen. (Sajtó alatt.)
7. *Horváth Imre:* A forgókefés élesztettiszapos szellőztető medencék kismintavizsgálata. *Hidrológiai Közlöny,* 1963. 3.
8. *M. V. Kirpicsev:* Teorija podobija, AN. SzSzSzR. *Moszkva,* 1953.
9. *M. V. Kirpicsev—P. K. Konakov:* Matematicseszkije asznovü teorii podobije. AN SzSzSzR. *Moszkva,* 1949.

10. *H. L. Langhaar:* Dimensional Analysis and Theory of Models. *New York—London*, 1951.
11. *A. V. Lükov:* Nem állandósult folyamatok hővezetése. *Goszenergoizdat*, 1948. (Oroszul.)
12. *M. A. Mihejev:* A hőátadás gyakorlati számításának alapjai. Tankönyvkiadó, *Budapest*. 1956.
13. *Mosonyi Emil:* A méretarány szerepe a kismintakísérleteknél. *A Magy. Tud. Ak. Műsz. Oszt. Közl.* X. kötet. 1953. 3—4.
14. *V. Nagy I.:* Hozzászólás Dr. Ivicsics Lajos „Gondolatok a hidromechanikai kismintavizsgálatok elméletével kapcsolatban" c. tanulmányához. *Hidrológiai Közlöny*, 1963. 2.
15. *Németh Endre:* Hidromechanika. Tankönyvkiadó, *Budapest*. 1963.
16. *Németh Endre:* Invariáns számok szerepe a kismintakísérleteknél. A *Magy. Tud. Ak. Műszaki Tud. Oszt. Közl.* X. köt. 1953. 3—4.
17. *Salamin Pál:* Hidromechanika. Egyetemi jegyzet. 1958. *Budapest*.
18. *Szily József:* Vízépítési modellkísérletezés. *Budapest*, 1942.
19. *Weber, M.:* Grundlagen der Ähnlichkeitsmechanik und ihre Verwertung bei Modellversuchen. *Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft*, 1919.
20. *Weber, M.:* Das allgemeine Ähnlichkeitsprinzip der Physik. *Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft*, 1930.