

# KÖRSZIMMETRIKUSAN NYOMOTT KÖRGYŰRŰ ALAKÚ LEMEZEK STABILITÁSVIZSGÁLATA

RÓZSA MIHÁLY

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA  
ÉPÍTÉSTUDOMÁNYI INTÉZET, BUDAPEST

[Beérkezett 1964. július 8-án]

Ez a dolgozat a radiális irányban nagyméretű, gyűrű alakú vékony lemezek stabilitásával foglalkozik, de csak a gyűrű tengelyével párhuzamos irányban történő kihajlás veszélyét vizsgálja. A dolgozat első része a külső peremen sugárirányban nyomott, a belső peremen szabad gyűrűk stabilitását tárgyalja, második része a belső peremen sugárirányban nyomott, a külső peremen szabad gyűrűk kihajlását ismerteti.

## I. Bevezetés

A körszimmetrikusan nyomott gyűrű alakú tartók stabilitásukat kétféleképpen veszíthetik el: a kihajlás vagy a gyűrű tengelye irányában következik be, vagy a tengelyre merőleges síkban. Az első eset a radiális irányban nagyméretű, a tengely irányában kisméretű gyűrűkön veszélyes. A kihajlás második esete a tengely irányában vastag gyűrűkön következik be.

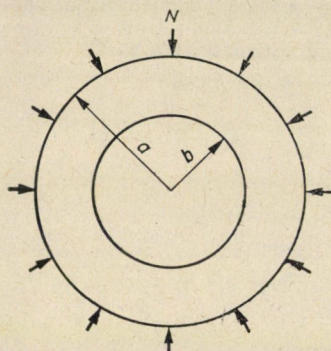
A külső és belső peremen egyenletesen megoszló egyenlő radiális nyomóerővel terhelt gyűrű alakú lemezek stabilitási problémáival W. R. DEAN [1] és N. YAMAKI [2] foglalkozott. YAMAKI a gyűrű peremei megtámasztásának minden lehetséges esetére táblázatokban és diagramokban megadta a kritikus nyomóerő értékét. Ezt a stabilitásproblémát tehát már teljesen megoldották, további tárgyalása felesleges.

A külső (befogott vagy szabadon megtámasztott) peremen radiálisan nyomott, a belső szabad peremen terheletlen körgyűrű alakú lemezek stabilitását E. MEISSNER [3] tanulmányozta. MEISSNER számításai azon a feltevésen alapulnak, hogy a körgyűrű kihajlási alakja forgásfelület. Ez a feltevés azonban a külső peremén kihajlással szemben *befogott* lemezeknél nem mindig helytálló, amint erre már TIMOSHENKO ([4], 391–392 oldal) is rámutatott. Könyvében MEISSNER számítási eredményeinek ismertetése után a következőket írja:

„It must be noted, however, that in this discussion buckling symmetrical with respect to the center of the plate is assumed while for  $b/a$  ( $b$  — radius of the inner boundary,  $a$  — radius of the outer boundary) approaching unity the conditions for a compressed ring with outer boundary clamped are analogous to those of a long compressed rectangular plate clamped along one side and free along the other. Such a plate buckles in many waves (see p. 364); we should expect that in the case of a narrow ring also several waves along the circumference would be formed during buckling and that the values of  $k$  obtained on the assumption of symmetrical buckling would give exaggerated values for  $(N_r)_{cr}$ .”

TIMOSHENKONAK ezt a feltevését a továbbiakban közölt számítások teljesen igazolják. MEISSNER feltevése csak akkor helyes, ha  $b/a < 0,46$ . Ha  $b/a > 0,46$ , akkor a lemez kihajlott alakja nem forgásfelület, mert a lemez középpontjával koncentrikus körök — a befogott peremtől eltekintve — a kihajláskor egy vagy több hullámú szinuszgörbéké torzulnak. A  $b/a$  arány növekedésével a hullámok száma egyre nagyobb lesz, a kritikus nyomóerő tényleges értéke pedig egyre jobban eltér a MEISSNER által megadott értékektől.

Más a helyzet, ha a külső nyomott perem szabadon megtámasztott. Ebben az esetben TIMOSHENKO fentebb ismertetett határátmenetével a körgyűrű elemi szektorából egy olyan hosszú nyomott derékszögű négyszögű lemezt kapunk, amelynek a nyomóerővel párhuzamos egyik oldala szabadon



1. ábra. Külső peremén nyomott körgyűrű

megtámasztott, a másika pedig szabad. Egy ilyen lemez az oldalak arányától függetlenül mindig egy irányban hajlik ki (lásd pl. [4] 362. oldal). A külső nyomott peremen szabadon megtámasztott gyűrűk kihajlott alakja tehát forgásfelület, és így MEISSNER feltevése helytálló. Ezért a szabadon megtámasztott gyűrű stabilitásvizsgálatával itt nem foglalkozunk.

A belső peremen nyomott, a külső peremen szabad körgyűrűk stabilitását a végtelen külső átmérőjű gyűrű speciális esetének kivételével [5] az irodalom eddig nem tárgyalta.

## 2. A külső peremen körszimmetrikusan nyomott körgyűrű kihajlása

### 2.1. A körgyűrű kihajlott alakjának integrodifferenciálegyenlete

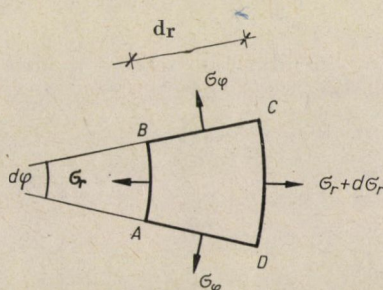
A körgyűrű alakú lemez  $a$  sugarú külső peremét  $N$  egyenletesen megoszló radiális nyomóerő terheli (1. ábra). Ezt a peremet a lemez síkjára merőleges kihajlással szemben befogottnak tételezzük fel. A körlemez  $b$  sugarú belső pereme szabad és terheletlen. A számítások egyszerűsítésére feltesszük, hogy  $a = 1$ .

A radiális nyomóerő hatására a lemezben fellépő  $\sigma_r$  radiális és  $\sigma_\varphi$  gyűrűfeszültségeket LAMÉ képletei adják meg:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{N}{h} \cdot \frac{1}{1-b^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), \\ \sigma_\varphi &= -\frac{N}{h} \cdot \frac{1}{1-b^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right),\end{aligned}\quad (1)$$

ahol

$h$  a lemez vastagsága;  
 $r$  a körgyűrű középpontjától számított távolság.



2. ábra. Elemi körgyűrűszektor

A kihajlott alak egyenletének levezetésére felírjuk a saját síkjától  $z$  távolságra kihajlott lemez gyűrűszektor alakú ABCD elemének (2. ábra) egyensúlyi feltételét a lemez eredeti síkjának normálisa irányában. A CD és AB szakaszon ható húzóerők ezen normális irányába eső összetevője:

$$\left(h \sigma_r r \frac{\partial z}{\partial r}\right)_{r+dr} d\varphi - \left(h \sigma_r r \frac{\partial z}{\partial r}\right)_r d\varphi = h \frac{\partial}{\partial r} \left(\sigma_r r \frac{\partial z}{\partial r}\right) dr \cdot d\varphi.$$

Ugyanúgy a BD és AC szakaszon:

$$\left(h \frac{\sigma_\varphi}{r} \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)_{\varphi+d\varphi} dr - \left(h \frac{\sigma_\varphi}{r} \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)_\varphi dr = h \frac{\sigma_\varphi}{r} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} dr \cdot d\varphi.$$

E két kifejezést összeadva és az összeget az elem  $r d\varphi dr$  területével elosztva, megkapjuk a kihajlott lemez területegységére ható  $q$  fiktív megoszló teher értékét:

$$q = \frac{h}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sigma_r r \frac{\partial z}{\partial r}\right) + \frac{h}{r^2} \sigma_\varphi \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}. \quad (2)$$

Az ABCD elemre ható erők radiális összetevőinek egyensúlyi feltétele:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_r) = \sigma_\varphi.$$

Ezt a kifejezést az előző képletbe behelyettesítve:

$$q = h \left[ \sigma_r \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \sigma_\varphi \left( \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \right) \right]. \quad (2^*)$$

A végtelen kicsinynek feltételezett kihajláskor változatlan  $\sigma_r$  és  $\sigma_\varphi$  feszültségek (1) kifejezéseit (2\*)-ba helyettesítjük:

$$q = -\frac{N}{1-b^2} \left[ \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \right) \right]. \quad (3)$$

A  $q$  terhű lemez egyensúlyi feltételét a poláris koordinátákban felírt lemezegyenlet fejezi ki:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left( \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \right) = \\ & = -\frac{N}{D(1-b^2)} \left[ \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \right) \right], \quad (4) \end{aligned}$$

ahol  $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$  a lemez hajlítási merevsége.\*

Mindegyik  $N$  sajátérték és a hozzá tartozó  $z(r, \varphi)$  tehát tartoznak (4) differenciálegyenletet kielégíteni; természetesen  $z(r, \varphi)$ -nek a kerületi feltételeket is ki kell elégítenie.

Tegyük fel, hogy a lemez  $n$  hullámban hajlik ki, vagyis:

$$z = w_n(r) \cos n\varphi, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (5)$$

Ezt a kifejezést (3)-ba behelyettesítve és bevezetve a

$$P_n = -\frac{N}{1-b^2} \left[ \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \frac{d^2 w_n}{d r^2} + \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{d w_n}{d r} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right) \right] \quad (6)$$

jelölést, a következőt kapjuk:

$$q = p_n \cos n\varphi. \quad (7)$$

A  $q$  fiktív teher (7) szerint mindig ugyanolyan függvénye a  $\varphi$  szögnek, mint a  $z$  kihajlás.

Az (5) kifejezést (4)-be helyettesítve (6) figyelembevételével:

$$\left[ \frac{d^2}{d r^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{d r} - \frac{n^2}{r^2} \right] \cdot w_n = \frac{P_n}{D}, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (8)$$

\* Ezt az egyenletet más alakban már E. MEISSNER a [3] dolgozatban levezette.

vagy részletesen kiírva:

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 w_n}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w_n}{dr^3} - \frac{1 + 2n^2}{r^2} \frac{d^2 w_n}{dr^2} + \frac{1 + 2n^2}{r^3} \frac{dw_n}{dr} + \frac{n^4 - 4n^2}{r^4} w_n = \\ & = - \frac{N_n}{D(1-b^2)} \left[ \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \frac{d^2 w_n}{dr^2} + \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right) \right]. \quad (8^*) \end{aligned}$$

A  $w_n$  függvény a (8) közönséges differenciálegyenleten kívül kielégíti a lemez peremei megtámasztásának megfelelően a következő kerületi feltételeket:

az  $r = 1$  helyen (befogott perem):

$$(w_n)_{r=1} = 0, \quad (a)$$

$$\left( \frac{dw_n}{dr} \right)_{r=1} = 0, \quad (b)$$

az  $r = b$  helyen (szabad perem):

a radiális nyomaték zérus, vagyis

$$\left[ \frac{d^2 w_n}{dr^2} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right) \right]_{r=b} = 0, \quad (c)$$

a nyíróerő zérus:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} (\Delta z) + \frac{1 - \mu}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) \right]_{r=b} = 0.$$

Az (5) kifejezés behelyettesítése és a kijelölt műveletek elvégzése után:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{d^3 w_n}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w_n}{dr^2} - (1 + 2n^2 - \mu n^2) \frac{1}{r^2} \frac{dw_n}{dr} + \right. \\ & \left. + (3n^2 - \mu n^2) \frac{1}{r^3} w_n \right]_{r=b} = 0. \quad (d) \end{aligned}$$

A további számításokban  $\mu$  értékét  $1/3$ -ra vesszük fel, ami megfelel a MEISSNER [3] által felvett értéknek.

A (8) differenciálegyenletek az (a) – (d) kerületi feltételekkel együtt a  $w_0, w_1, w_2, \dots, w_n$  „lehajlás-amplitúdó” függvényekre vonatkozó sajátérték feladatokat képeznek. Mindegyik sajátérték feladathoz tartozik valamely  $N_0, N_1, N_2, \dots, N_n$  legkisebb sajátérték. A tényleges kihajlás mindig annál az  $N_i$  nyomóerőnél következik be ( $i$  számú szinuszhullám alakjában), amelyik

az adott  $b/a$  viszonyzámmál az  $N_0, N_1, N_2, \dots, N_n$  értékek közül a legkisebb. Feladatunk az  $N_i$  meghatározása.

A tárgyalt sajátérték feladatokra először beh bizonyítjuk, hogy *önadjungáltak*. E célból (8) differenciálegyenletet  $r$ -rel szorozzuk és a következő alakra hozzuk:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} \left( r \frac{dw_n}{dr^2} \right) - \frac{d}{dr} \left( \frac{1 + 2n^2}{r} \frac{dw_n}{dr} \right) + \frac{n^4 - 4n^2}{r^3} w_n = \\ = - \frac{N_n}{D(1 - b^2)} \frac{d}{dr} \left[ \left( r - \frac{b^2}{r} \right) \frac{dw_n}{dr} \right]. \end{aligned}$$

A fenti egyenletben szereplő összes kifejezések *önadjungáltak* [6, 7], tehát a sajátérték feladatok is *önadjungáltak*.

Az *önadjungált sajátérték problémák legkisebb sajátértékét az iterációs módszerrel* lehet meghatározni [7]. Ha jelen esetben ezt a módszert a (8) differenciálegyenlet és az (a)–(d) feltételek alakjában megadott feladatra alkalmaznók, akkor minden iterációs lépésben egy Euler-féle negyedrendű inhomogén differenciálegyenletet kellene megoldani. Amint ismeretes, az inhomogén lineáris differenciálegyenletek megoldása az állandók variálásának módszerével a homogén egyenletek megoldására vezethető vissza. Az adott feladat esetében azonban ez a módszer igen hosszadalmas számításokra vezetne, amihez hozzájárul még, hogy a négy integrálási állandó meghatározására minden iterációs lépésben egy-egy a kerületi feltételek alapján felírt négy ismeretlenes lineáris egyenletrendszer kellene megoldanunk.

A tárgyalt sajátérték problémát egy másodfajta homogén Fredholm-féle integrálegyenlet sajátérték problémájára lehet visszavezetni. A megoldás szempontjából azonban a Fredholm-féle integrálegyenlet nem előnyös, a kör-szimmetrikus kihajlás esete ( $n = 0$ ) kivételével. Az  $n \equiv 0$  esethez tartozó integrálegyenlet levezetését a *Függelékben* közöljük.

Sajátérték feladatunkat a lehajlási *hatásfüggvény* (Green-féle függvény) segítségével egy integrodifferenciálegyenlet sajátérték feladatává fogjuk átalkítani, mert az iterációs módszert ebben az esetben előnyösebben lehet alkalmazni.

Az integrodifferenciálegyenlet levezetése előtt  $w_n(\varrho, r) \equiv K_n(\varrho, r)$  lehajlás hatásfüggvényeket határozzuk meg ( $\varrho$  — hatás sugara;  $r$  — erő sugara). A hatásfüggvények, amint a Green-féle függvények elméletéből ismeretes, a következő feltételeket elégítik ki:

I. A  $\varrho = r$  pont kivételével eleget tesznek (8) differenciálegyenletnek, ha annak jobb oldala (a tehertag) zérus:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{n^2}{\varrho^2} \right]^2 K_n(\varrho, r) = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (9)$$

II. A  $\varrho = 1$  és  $\varrho = b$  helyen kielégítik a  $w_n$ -re felírt (a), (b), (c) és (d) homokerületi feltételeket.

III. A  $\varrho = r$  helyen a hatásfüggvény és  $\varrho$  szerinti első két differenciálhányadosa folytonos, harmadik differenciálhányadosa a  $p_n = 1$  koncentrált tehernek megfelelően szakadáros. Részletesen leírva:

$$[K_n(\varrho, r)]_{\varrho=r-0} = [K_n(\varrho, r)]_{\varrho=r+0}, \quad (e)$$

$$\left[ \frac{\partial K_n(\varrho, r)}{\partial \varrho} \right]_{\varrho=r-0} = \left[ \frac{\partial K_n(\varrho, r)}{\partial \varrho} \right]_{\varrho=r+0}, \quad (f)$$

$$\left[ \frac{\partial^2 K_n(\varrho, r)}{\partial \varrho^2} \right]_{\varrho=r-0} = \left[ \frac{\partial^2 K_n(\varrho, r)}{\partial \varrho^2} \right]_{\varrho=r+0}, \quad (g)$$

$$\left[ \frac{\partial^3 K_n(\varrho, r)}{\partial \varrho^3} \right]_{\varrho=r-0} + \frac{1}{D} = \left[ \frac{\partial^3 K_n(\varrho, r)}{\partial \varrho^3} \right]_{\varrho=r+0}. \quad (h)$$

Az (e) feltétel a  $p_n = 1$  teher alatt behajlott lemez folytonosságát, az (f) feltétel pedig a lemez sugárirányú érintőjének folytonosságát fejezi ki. A (g) feltétel a nyomaték folytonosságából következik. A (h) feltétel azt fejezi ki, hogy a nyíróerő „ugrása” az erő helyén egyenlő  $p_n = 1$  koncentrált erővel.

A hatásfüggvény kiszámítására felírjuk (9) homogén Euler-féle differenciálegyenletek általános megoldásait:

$$\text{ha } n = 0 : K_0(\varrho, r) = A_0(r) + B_0(r)\varrho^2 + C_0(r)\varrho^2 \ln \varrho + D_0(r) \ln \varrho;$$

$$\text{ha } n = 1 : K_1(\varrho, r) = A_1(r)\varrho + B_1(r)\frac{1}{\varrho} + C_1(r)\varrho^3 + D_1(r)\varrho \ln \varrho; \quad (10)$$

$$\text{ha } n > 1 : K_n(\varrho, r) = A_n(r)\varrho^n + B_n(r)\varrho^{-n} + C_n(r)\varrho^{n+2} + D_n(r)\varrho^{-n+2}.$$

Az általános megoldásokban szereplő  $A, B, C, D$  állandók értékét az (a)–(h) kerületi feltételek határozzák meg. Minthogy a  $b \leq \varrho \leq r$  szakaszhoz és az  $r \leq \varrho \leq 1$  szakaszhoz tartozó kerületi feltételek különbözők, az  $A, B, C, D$  állandók értékei is különbözők ezen a két szakaszon. Végeredményben tehát  $K(\varrho, r)$ -re  $\varrho \leq r$  és  $\varrho \geq r$  esetében két különböző kifejezést kapunk. A 8 állandót az (a)–(h) feltételekből adódó nyolcismeretlenes lineáris egyenletrendszer egyértelműen meghatározza. Az  $n = 0, n = 1$  és  $n > 1$  értékekhez tartozó egyenletrendszereket megoldva és az állandókra kapott értékeket (10) egyenletekbe behelyettesítve, a hatásfüggvényekre a következő kifejezéseket kapjuk:

A) az  $n = 0$  esetben:

a) ha  $\varrho \leq r$

$$K_0(\varrho, r) = \frac{r}{D(8 + 16b^2)} [(1 + 4b^2) + (-1 - 4b^2)r^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + (2 + 4b^2)r^2 \ln r + 4b^2 \ln r + (1 - r^2 + 2 \ln r) \varrho^2 + \\
 & \quad + (4b^2 - 4b^2 r^2 + 8b^2 \ln r) \ln \varrho; \qquad (11a)
 \end{aligned}$$

b) ha  $\varrho \geq r$

$$\begin{aligned}
 K_0(\varrho, r) = & \frac{r}{D(8 + 16b^2)} [(1 + 4b^2) + r^2 + 4b^2 \ln r - \\
 & - (+1 + 4b^2 + r^2 + 4b^2 \ln r) \varrho^2 + (2 + 4b^2) \varrho^2 \ln \varrho + \\
 & + (4b^2 - 2r^2 + 8b^2 \ln r) \ln \varrho];
 \end{aligned}$$

B) az  $n = 1$  esetben:

a) ha  $\varrho \leq r$

$$\begin{aligned}
 K_1(\varrho, r) = & \frac{r}{D(16 + 80b^4)} \left\{ \left[ (-2 + 10b^4)r - 10b^4 \cdot \frac{1}{r} + \right. \right. \\
 & + 2r^3 - (4 + 20b^4)r \ln r \left. \right] \varrho + \left( -10b^4 r + 5b^4 \frac{1}{r} + 5b^4 r^3 \right) \frac{1}{\varrho} + \\
 & \left. + \left( 2r - \frac{1}{r} - r^3 \right) \varrho^3 \right\}, \qquad (11b)
 \end{aligned}$$

b) ha  $\varrho \geq r$

$$\begin{aligned}
 K_1(\varrho, r) = & \frac{r}{D(16 + 80b^4)} \left\{ \left[ (-2 + 10b^4)r - 10b^4 \frac{1}{r} + 2r^3 \right] \varrho + \right. \\
 & + \left( -10b^4 r + 5b^4 \frac{1}{r} - r^3 \right) \frac{1}{\varrho} + \left( 2r + 5b^4 \frac{1}{r} - r^3 \right) \varrho^3 - \\
 & \left. - (4 + 20b^4)r \varrho \ln \varrho \right\};
 \end{aligned}$$

C) az  $n > 1$  esetben:

a) ha  $\varrho \leq r$

$$\begin{aligned}
 K_n(\varrho, r) = & \frac{r}{8D [n^2 - 2(n^2 - 1)b^2 + (n^2 + 24)b^4 + 5b^{2n+2} + 5b^{-2n+2}]} \times \\
 & \times \left\{ \left[ \left( -\frac{n^2 + 24}{n^2(n-1)} b^4 - \frac{5}{n-1} b^{-2n+2} \right) r^n + \frac{1}{n} (b^2 + 5b^{-2n+2}) r^{n+2} + \right. \right. \\
 & + \left( -\frac{n+1}{n} b^2 + \frac{n^2 + 24}{n(n-1)} b^4 + \frac{5}{n(n-1)} b^{-2n+2} \right) r^{-n+2} + \\
 & + \left( b^2 - \frac{n^2 + 24}{n^2} b^4 \right) r^{-n} \left. \right] \varrho^n + \left[ \left( b^2 - \frac{n^2 + 24}{n^2} b^4 \right) r^n + \left( -\frac{n-1}{n} b^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{n^2 + 24}{n(n+1)} b^4 + \frac{5}{n(n+1)} b^{2n+2} \right) r^{n+2} - \frac{1}{n} (b^2 + 5b^{2n+2}) r^{-n+2} + \right.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{n^2 + 24}{n^2(n+1)} b^4 + \frac{5}{n+1} b^{2n+2} \right) r^{-n} \left] \varrho^{-n} + \left[ \frac{1}{n} (b^2 + 5b^{-2n+2}) r^n - \right. \\
& - \frac{1}{n+1} (1 + 5b^{-2n+2}) r^{n+2} + (1 - b^2) r^{-n+2} + \left( -\frac{n}{n+1} + \frac{n-1}{n} b^2 - \right. \\
& - \frac{5}{n(n+1)} b^{-2n+2} \left. \right) r^{-n} \left] \varrho^{n+2} + \left[ \left( -\frac{n}{n-1} + \frac{n+1}{n} b^2 - \right. \right. \\
& - \frac{5}{n(n-1)} b^{2n+2} \left. \right) r^n + (1 - b^2) r^{n+2} + \frac{1}{n-1} (1 + 5b^{2n+2}) r^{-n+2} - \\
& \left. - \frac{1}{n} (b^2 + 5b^{2n+2}) r^{-n} \right] \varrho^{-n+2} \left. \right\}; \tag{11c}
\end{aligned}$$

b) ha  $\varrho \geq r$

$$\begin{aligned}
K_n(\varrho, r) = & \frac{r}{8D [n^2 - 2(n^2 - 1)b^2 + (n^2 + 24)b^4 + 5b^{2n+2} + 5b^{-2n+2}] \times \\
& \times \left\{ \left[ \left( -\frac{n^2 + 24}{n^2(n-1)} b^4 - \frac{5}{n-1} b^{-2n+2} \right) r^n + \frac{1}{n} (b^2 + 5b^{-2n+2}) r^{n+2} + \right. \right. \\
& + \left( -\frac{n}{n-1} + \frac{n+1}{n} b^2 - \frac{5}{n(n-1)} b^{2n+2} \right) r^{-n+2} + \\
& + \left( b^2 - \frac{n^2 + 24}{n^2} b^4 \right) r^{-n} \left] \varrho^n + \left[ \left( b^2 - \frac{n^2 + 24}{n^2} b^4 \right) r^n + \left( -\frac{n}{n+1} + \right. \right. \\
& + \frac{n-1}{n} b^2 - \frac{5}{n(n+1)} b^{-2n+2} \left. \right) r^{n+2} - \frac{1}{n} (b^2 + 5b^{2n+2}) + \\
& + \left( \frac{n^2 + 24}{n^2(n+1)} b^4 + \frac{5}{n+1} b^{2n+2} \right) r^{-n} \left] \varrho^{-n} + \left[ \frac{1}{n} (b^2 + 5b^{-2n+2}) r^n - \right. \\
& - \frac{1}{n+1} (1 + 5b^{-2n+2}) r^{n+2} + (1 - b^2) r^{-n+2} + \left( -\frac{n-1}{n} b^2 + \right. \\
& + \frac{n^2 + 24}{n(n+1)} b^4 + \frac{5}{n(n+1)} b^{2n+2} \left. \right) r^{-n} \left] \varrho^{n+2} + \left[ \left( -\frac{n+1}{n} b^2 + \right. \right. \\
& + \frac{n^2 + 24}{n(n-1)} b^4 + \frac{5}{n(n-1)} b^{-2n+2} \left. \right) r^n + (1 - b^2) r^{n+2} + \\
& \left. + \frac{1}{n-1} (1 + 5b^{2n+2}) r^{-n+2} - \frac{1}{n} (b^2 + 5b^{2n+2}) r^{-n} \right] \varrho^{-n+2} \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Bebizonyítjuk, hogy a

$$K_n(\varrho, r) \cdot \frac{1}{r}$$

kifejezés a  $\varrho$  és  $r$  változók szimmetrikus függvénye. Ugyanis  $p_n = 1$  esetében az  $r$  sugáron ható  $q = 1 \cdot \cos n\varphi$  teher által a  $\varrho$  sugáron okozott  $z = K_n(\varrho, r) \cos n\varphi$  lehajlás folytán a  $\varrho$  sugáron ható  $q = 1 \cdot \cos n\varphi$  teher által végzett munka:

$$M_\varrho = \int_{\varphi=0}^{2\pi} zq\varrho \cdot d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} [K_n(\varrho, r) \cos n\varphi] (1 \cdot \cos n\varphi) \varrho \cdot d\varphi = \pi \cdot K_n(\varrho, r) \cdot$$

Ugyanígy a  $\varrho$  sugáron ható  $q = 1 \cdot \cos n\varphi$  teher által az  $r$  sugáron okozott  $z = K_n(r, \varrho) \cos n\varphi$  lehajlás folytán az  $r$  sugáron ható  $q = 1 \cdot \cos n\varphi$  teher által végzett munka:

$$M_r = \pi K_n(r, \varrho) \cdot r \cdot$$

Betti tétele szerint  $M_r = M_\varrho$ , amiből következik, hogy

$$K_n(\varrho, r) \frac{1}{r} = K_n(r, \varrho) \frac{1}{\varrho}. \quad (12)$$

Ezzel a hatásfüggvény szimmetriáját bebizonyítottuk.

A (11) alatti, egymástól függetlenül kiszámított függvények kielégítik (12) feltételt, ami igazolja a számítások helyességét.

A  $K_n(\varrho, r)$  lehajlás hatásfüggvény segítségével az  $n$  hullámban történő kihajlás  $w_n$  amplitúdója tetszőleges  $\varrho$  sugáron a következő alakban írható fel:

$$w_n(\varrho) = \int_{r=b}^1 K_n(\varrho, r) p_n(r) \cdot dr, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (13)$$

Behelyettesítjük (13)-ba a  $p_n(r)$  fiktív teherre kapott (6) kifejezést:

$$w_r(\varrho) = -\frac{N_n}{1-b^2} \int_{r=b}^1 K_n(\varrho, r) \left[ \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \frac{d^2 w_n(r)}{dr^2} + \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \left( \frac{1}{r} \frac{dw_n(r)}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w_n(r) \right) \right] dr, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (13^*)$$

A (13\*) homogén integrodifferenciálegyenlet alakjában felírt sajátérték probléma azonos a (8\*) differenciálegyenlet és (a)–(d) kerületi feltételek által meghatározott sajátérték problémával. A kerületi feltételek itt a hatásfüggvényben implicite szerepelnek.

## 2.2. Az integrodifferenciálegyenlet megoldása

A (13\*) integrodifferenciálegyenlet legkisebb sajátértékét az iterációs módszerrel [7] határoztuk meg. Az iteráció a következő rekurzív képlet alapján történt:

$$w_n^{(i)}(\varrho) = -\frac{D}{1-b^2} \int_{r=b}^1 K_n(\varrho, r) \left[ \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \frac{d^2}{dr^2} w_n^{(i-1)}(r) + \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} w_n^{(i-1)}(r) - \frac{n^2}{r^2} w_n^{(i-1)}(r) \right) \right] dr, \quad (14)$$

$$(n = 0, 1, 2, 3, \dots), (i = 1, 2, 3, \dots).$$

A számítás kezdetén a  $w_n^{(0)}(r)$  függvény tetszőlegesen vehető fel azzal a korlátozással szemben, hogy nem lehet ortogonális az első sajátfüggvényre. Az  $a = 1$  külső átmérőjű gyűrű  $n$  hullámban történő kihajlásakor  $N_n$  legkisebb sajátértéket a következő képlet adja meg:

$$N_n = D \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{w_n^{(i-1)}(b)}{w_n^{(i)}(b)}.$$

Könnyen belátható, hogy az általános esetben, amikor  $a \neq 1$ , fenti képlet a következőképpen módosul:

$$N_n = k_n \frac{D}{a^2}, \quad (15)$$

ahol

$$k_n = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{w_n^{(i-1)}(b)}{w_n^{(i)}(b)}. \quad (16)$$

A  $k_n$  együttható meghatározását az  $n = 0, 1, 2, 3$  esetekben végeztük el  $\beta = b/a$  ( $a = 1$ ) különböző értékeire. A hosszadalmas numerikus számítások megrövidítésére  $w_n^{(0)}(r)$  függvényt úgy vettük fel, hogy a hozzá tartozó  $p_n(r)$  fiktív teher egységnyi legyen, vagyis:

$$p_n(r) = \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \frac{d^2}{dr^2} w_n^{(0)}(r) + \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} w_n^{(0)}(r) - \frac{n^2}{r^2} w_n^{(0)}(r) \right) = 1.$$

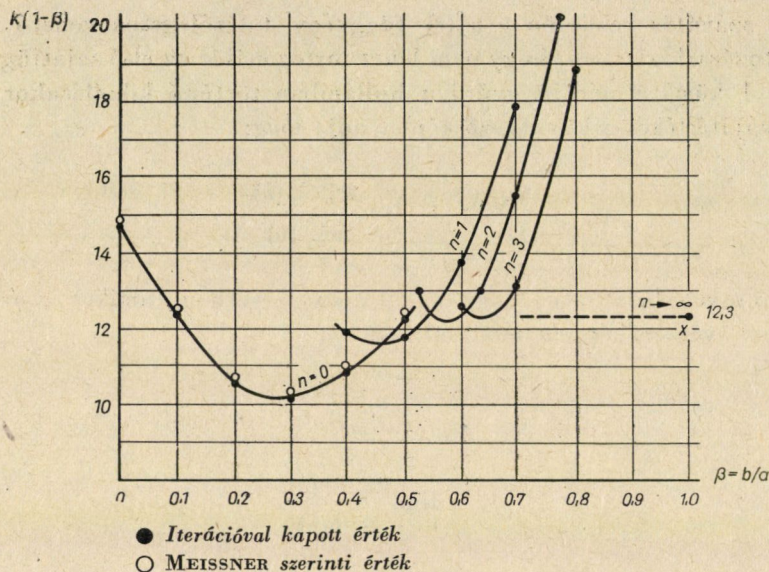
Ezzel a felvétellel az első iterációs lépésben a (14) képlet a következő egyszerűbb alakot ölti:

$$w_n^{(1)}(\varrho) = \int_{r=b}^1 K_n(\varrho, r) \cdot dr.$$

Az iteráció gyors konvergenciája folytán már a második iterációs lépés ( $i = 2$ ) után  $k$ -ra jó közelítő érték adódott, és így az iterációt nem folytattuk tovább.

A  $k_n$ -re a második iterációs lépés után kapott értékeket  $\beta = b/a$  függvényében az I; II; III; IV. táblázat adja meg. A 3. ábra diagramjain  $k$  helyett

a szemléletesebb  $k(1-\beta)$  értékeket tüntettük fel. Az I. táblázatban és 3. ábrán az  $n = 0$  esetben (kör-szimmetrikus kihajlás) a MEISSNER [3] által kiszámított értékeket is megadtuk. Az iterációs módszerrel számított és a Meissner-féle értékek közötti eltérés mindenhol kisebb  $\sim 1\%$ -nál. (Megjegyzendő azonban, hogy MEISSNER  $k_0$  értékét csak  $\beta$  bizonyos irracionális értékeire határozta meg, és így az itt közölt Meissner-féle értékek interpolációval kapott közelítések.)



3. ábra. Diagram a külső peremén nyomott körgyűrű kritikus nyomóerejének meghatározására

Ha a gyűrű szélessége sugarához viszonyítva kicsiny ( $\beta \approx 1$ ), akkor TIMOSHENKONAK a bevezetésben közölt meggondolása szerint a gyűrű kihajlásának számítását egy hosszú derékszögű négyszögű lemez stabilitásproblémájára lehet visszavezetni, amelynek a nyomóerővel párhuzamos egyik oldala befogott, másik oldala pedig szabad. (A másik két oldal megtámasztási módja a lemez nagy hosszúsága folytán nem befolyásolja a kritikus erő nagyságát.) A kihajlás ilyenkor igen nagyszámú hullámban ( $n \rightarrow \infty$ ) következik be. A  $P_\infty$  gyűrűirányú kritikus nyomóerő értékét az irodalomban ([4] 363. o.) megadott transzcendens egyenletből könnyen ki lehet számítani:

$$P_\infty = k' \pi^2 \frac{D}{(a-b)^2},$$

ahol  $\mu = 1/3$  esetben a transzcendens egyenletből  $k' = 1,25$  értéket kapunk, vagyis

$$P_{\infty} = 12,3 \frac{D}{(a-b)^2}.$$

A gyűrűre ható erők egyensúlyi feltételéből az  $a$  sugáron ható radiális nyomóerő kritikus értéke:

$$N_{\infty} = P_{\infty} \frac{a-b}{a} = \frac{12,3}{1-\beta} \cdot \frac{D}{a^2},$$

vagy (15) mintájára:

$$N_{\infty} = k_{\infty} \frac{D}{a^2},$$

ahol

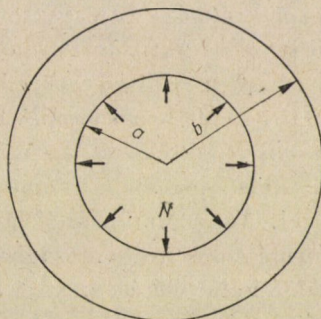
$$k_{\infty} (1-\beta) = 12,3.$$

A  $\beta \approx 1$  értékhez a 3. ábrán a  $k_{\infty}(1-\beta) = 12,3$  ordinátájú  $X$ -el jelölt pont tartozik.

Az  $X$  ponton át az abszcisszatengellyel párhuzamosan húzott egyenes, amint az ábrából látható, közelítően egybeesik az  $n = 3$ -nak megfelelő  $k_3$  görbe minimumában húzott érintővel. Nyilvánvalóan következik ebből, hogy az  $n > 3$ -hoz tartozó  $k$  görbék minimumai is közelítően ugyanerre az egyenesre esnek, más szóval ez az egyenes az  $n = 3, 4, 5, \dots$  rendszámú  $k$  görbék burkolója. Minthogy ezek a görbék  $n$  növekedésével egyre sűrűbben követik egymást, a  $k = 12,3/1-\beta$  képlet  $\beta$  növekedésével egyre jobban megközelíti  $k$  tényleges értékét. Ezért az  $n > 3$  értékekhez tartozó  $k$  görbék kiszámítására nincs szükség.

### 3. A belső peremen körszimmetrikusan nyomott körgyűrű kihajlása

A körlemez  $a$  sugarú belső peremét  $N$  egyenletesen megoszló radiális nyomóerő terheli (4. ábra). Ezt a peremet a lemez síkjára merőleges kihajlással

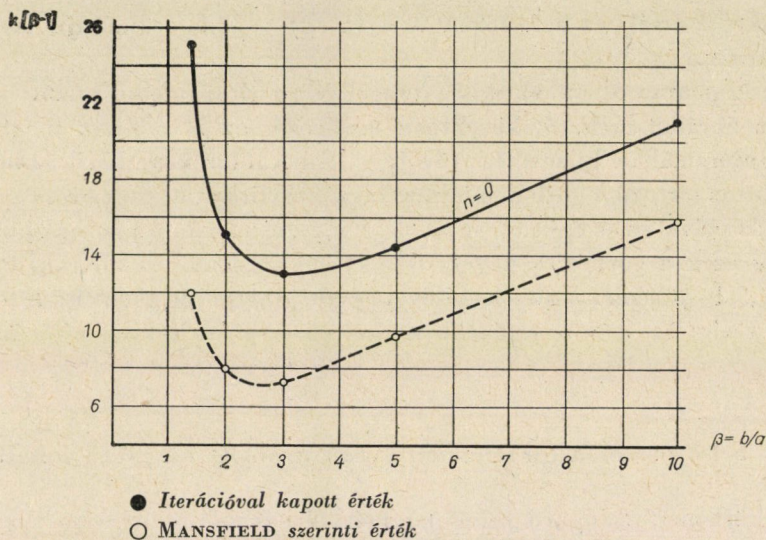


4. ábra. Belső peremen nyomott körgyűrű

szemben befogottnak tételezzük fel. A körlemez  $b$  sugarú külső pereme szabad és terheletlen. A számítások egyszerűsítésére — ugyanúgy, mint a külső peremen terhelt gyűrűk esetében — feltesszük, hogy  $a = 1$ .

Könnyen bebizonyítható, hogy a fenti jelölésekkel az (1) Lamé-féle egyenletek, a (8) differenciálegyenlet, az (a)—(d) kerületi feltételek és a (13\*) integrodifferenciálegyenlet teljesen változatlan alakban érvényesek. Ezért a kritikus nyomóerőt is az előzőleg használt (14) iterációs képlettel határoztuk meg. Az iterációt itt is csak a második lépésig folytattuk.

A képletek azonossága ellenére a belső peremen nyomott körgyűrűk a külső peremen nyomottaktól eltérően *mindig körszimmetikusan hajlanak ki*. Ugyanis a belső peremen nyomott gyűrűkben (1) szerint  $\sigma_\varphi$  gyűrűfeszültség



5. ábra. Diagram a belső peremen nyomott körgyűrű kritikus nyomóerejének meghatározására

húzás, mert  $b > 1$ . Ez a húzófeszültség egy vagy több hullámú kihajlás esetében a kihajlást akadályozni igyekvő fiktív terhet hozna létre. Ezért a kihajlás mindig körszimmetrikus alakban ( $n = 0$ ) következik be.

Az  $n = 0$  esetben a (15) képletben szereplő  $k$  együtthatóra a  $\beta = b/a$  viszonyszám függvényében kapott értékeket az V. táblázat adja meg. Az 5. ábra — ugyanúgy, mint a külső peremen nyomott gyűrűkre 3. ábra — a  $k(\beta-1)$  értékeket tünteti fel. Amint az ábrából látható, ha  $\beta \rightarrow 1$ ,  $k$  értéke minden határon túl nő. Természetesen a valóságban a kritikus erő nem nő a végtelenségig, mert a folyási határ elérése után a közölt számítási módszert már nem lehet alkalmazni. Ezenkívül  $\beta \approx 1$  esetében a gyűrű síkjában történő kihajlás már veszélyesebb lehet, mint a gyűrű síkjára merőleges kihajlás.

A belső, befogott peremen radiálisan nyomott, a külső peremen szabad gyűrűk stabilitásvizsgálatával foglalkozó dolgozatot idáig még nem közöltek. Bizonyos fokig közelálló problémával MANSFIELD [5] foglalkozott. Azt az esetet vizsgálta, amikor a gyűrű  $a$  sugarú belső peremén  $N$  radiális nyomóerő hat, külső  $b$  sugarú peremét pedig  $N(a/b)^2$  radiális nyomóerő terheli. Ilyenkor LAMÉ képlete szerint a lemez minden pontjában  $\sigma_r = -\sigma_\varphi$ . A MANSFIELD által kapott  $k$  értékeket az V. táblázat adja meg, a  $k(\beta-1)$  értékeket pedig az 5. ábrán a szaggatott vonal tünteti fel. A külső peremre gyakorolt nyomóerő folytán a kritikus erő lényegesen kisebb, mint szabad külső perem esetében. A gyűrű külső átmérőjének növekedésével a külső peremre gyakorolt  $N(a/b)^2$  nyomóerő egyre csökken, és így a kapott értékek közelednek a szabad külső peremre kapott értékekhez (lásd az V. táblázat utolsó sorát). Végtelen külső átmérő esetén az eltérés 0-ra csökken.

### FÜGGELÉK

*Az egyik peremen radiálisan nyomott körgyűrű  
körszimmetrikus kihajlási alakjának integrálegyenlete*

Körszimmetrikus kihajlás ( $n = 0$ ) esetében az (5) és (7) képletek szerint

$$z \equiv w \text{ és } q \equiv p.$$

A fiktív fajlagos teher (2) szerint

$$p(r) = \frac{h}{r} \frac{d}{dr} \left( \sigma_r r \frac{dw(r)}{dr} \right) dr.$$

Ezt a kifejezést (13)-ba helyettesítve:

$$w(\varrho) = h \int_{r=b}^r K_o(\varrho, r) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \sigma_r r \frac{dw(r)}{dr} \right) dr.$$

$K_o(\varrho, r) \cdot (1/r)$  kifejezés (12) szerint a  $\varrho, r$  változók szimmetrikus függvénye. Bevezetvén a

$$L(\varrho, r) = K_o(\varrho, r) \frac{1}{r},$$

illetve

$$w(\varrho) = h \int_{r=b}^r L(\varrho, r) \frac{d}{dr} \left( \sigma_r r \frac{dw(r)}{dr} \right) dr$$

jelölést, az egyenletet  $\varrho$  szerint differenciáljuk:

$$\frac{dw(\varrho)}{d\varrho} = h \int_{r=b}^1 \frac{\partial L(\varrho, r)}{\partial \varrho} \frac{d}{dr} \left( \sigma_r r \frac{dw(r)}{dr} \right) dr.$$

Parciális integrálással

$$\frac{dw(\varrho)}{d\varrho} = \left[ h \frac{\partial L(\varrho, r)}{\partial \varrho} \sigma_r r \frac{dw(r)}{dr} \right]_{r=b}^1 - h \int_{r=b}^1 \frac{\partial^2 L(\varrho, r)}{\partial \varrho \partial r} \sigma_r r \frac{dw(r)}{dr} dr.$$

Mint hogy az  $r = b$  helyen  $\sigma_r = 0$  (szabad perem), az  $r = 1$  helyen pedig a befogás folytán  $dw/dr = 0$ , a jobboldali első tag eltűnik. Behelyettesítve  $\sigma_r$  feszültség (1) kifejezését, a következőt kapjuk:

$$\frac{dw(\varrho)}{d\varrho} = \frac{N}{1-b^2} \int_{r=b}^1 \frac{\partial^2 L(\varrho, r)}{\partial \varrho \partial r} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) r \frac{dw(r)}{dr} dr.$$

Bevezetjük az

$$\eta(r) = \frac{dw(r)}{dr} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) r$$

függvényt. Ezzel a fenti egyenletet a következő alakra hozhatjuk:

$$\eta(\varrho) = \frac{N}{1-b^2} \int_{r=b}^1 \frac{\partial^2 L(\varrho, r)}{\partial \varrho \partial r} \sqrt{\left( \varrho - \frac{b^2}{\varrho} \right) \left( r - \frac{b^2}{r} \right)} \eta(r) dr.$$

Ez egy szimmetrikus magú homogén Fredholm-féle integrálegyenlet. Bebizonyítható, hogy az integrálegyenlet a  $b < 1$  és  $b > 1$  esetben mindig pozitív definit, tehát körszimmetrikus kihajlás csak pozitív  $N$  értékekre következhetik be.

#### IRODALOM

1. DEAN, W. R.: The Elastic Stability of an Annular Plate. *Proc. Royal Soc. London*, ser. A. **106** (1924) 268–284.
2. YAMAKI, N.: Buckling of a Thin Annular Plate under Uniform Compression. *Journ. Applied Mechanics* **25** (1958), 267–273.
3. MEISSNER, E.: Über des Knicken kreisförmiger Scheiben. *Schweiz. Bauzeitung*, **101** (1933), 87–89.
4. TIMOSHENKO, S. P.—GERE, J. M.: Theory of Elastic Stability (1961).
5. MANSFIELD, E. H.: On the Buckling of an Annular Plate. *Quart. Journ. of Mechanics and Appl. Mathematics* **13** (1960), 16–23.
6. KAMKE, E.: Gewöhnliche Differentialgleichungen (1951). 236.
7. COLLATZ, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen (1949).