

TÉRBELI RÁCSOSTARTÓK RÚDERŐINEK ELLENŐRZÉSE

RÉDEI ISTVÁN

[Beérkezett 1965. április 5-én]

Szerző egy előző dolgozatában síkbeli rácsostartók ellenőrzésére alkalmas eljárást mutatott be. Jelen dolgozat ezen eljárásnak térbeli rácsostartókra való alkalmazása. Szerző az ellenőrző eljárás alapjául szolgáló összefüggést tisztán geometriai-statikai úton vezeti le, és kimutatja, hogy az összetartozó rúderők és rúdhosszak szorzatainak algebrai összege a szerkezet rendszerétől, alakjától, a rudak számától, irányától és hosszától független állandó. Ez az összeg egyedül a külső erők függvénye, sőt, bizonyos esetekben kizárólag csak az aktív erőktől függ. Az eljárás egyaránt érvényes külsőleg és belsőleg határozott és határozatlan rácsostartókra. Alkalmazását számpéldák világítják meg.

1. Bevezetés

Jelen tanulmány kiegészítő részét képezi az *MTA VI. Oszt. Közleményei*-nek 33. kötetében megjelent dolgozatnak, amely síkbeli rácsostartók ellenőrzésére alkalmas számító eljárást ismertetett. Jelen tanulmány célja: térbeli rácsostartók ellenőrzésére alkalmas egyszerű számítási eljárás levezetése és bemutatása.

2. Térbeli tartók megtámasztása

Térbeli erőrendszer egyensúlyát 6 független egyenlet fejezi ki:

$$\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, \Sigma Z = 0, \Sigma M_x = 0, \Sigma M_y = 0, \Sigma M_z = 0.$$

Ennek megfelelőleg, a térbeli tartók statikailag határozott megtámasztásához alkalmasan választott 6 támasztórúd (földhöz kapcsoló rúd) szükséges és elegendő. Hatnál több támasztórúd a szerkezet térbeli erőjátékát külsőleg statikailag határozatlanná teszi.

Azonban a 6 támasztórúd iránya, mint ismeretes, korántsem lehet tetszőleges. Nem határozott a térbeli megtámasztás, ha

1. mind a 6 támasztórúd egy közös síkkal párhuzamos;
2. van olyan tengely, amely valamennyi támasztórúd irányát metszi, vagy olyan tengely, amely valamennyi támasztórúd irányával párhuzamos;
3. 3—3 támasztórúd egy-egy közös ponton megy át;

4. 3 támasztórúd közös ponton megy át, a többi három rúd pedig egymással párhuzamos;

5. 3—3 rúd egy-egy síkban fekszik;

6. 4 rúd közös ponton megy át (akár a végesben, akár a végtelenben fekszik ez a közös pont);

7. 4 rúd közös síkban van.

Két térbeli támasztórúd egyesítése térbeli ingát, három rúd egyesítése gömbcsuklót eredményez. Ezek szerint elvileg alkalmazható volna

6 támasztórúd,

4 támasztórúd és 1 inga,

2 támasztórúd és 2 inga,

3 inga,

3 támasztórúd és 1 gömbcsukló,

1 támasztórúd, 1 inga és 1 gömbcsukló,

természetesen gondosan elkerülve fenti 1—7. alatti eseteket.

A műszaki gyakorlatban azonban — ritka kivételektől eltekintve — a térbeli tartókat saruk segítségével 4 csomóponton támasztjuk alá. Abból a szempontból vizsgálva a kérdést, hogy ezek a műszaki gyakorlatban alkalmazott saruk az összesen lehetséges 3 irányú elmozdulásból és 3 irányú elfordulásból hányra adnak lehetőséget, vagy, ami ugyanazt jelenti, hány képzelt rúdnak felelnek meg, a gyakorlatban alkalmazott sarukat alábbiak szerint osztályozhatjuk:

1. hengeres állósaru (ún. fix saru) 1 irányú elfordulást tesz lehetővé, tehát 5 rúdnak felel meg;

2. álló gömbcsuklós saru 3 irányú elfordulást tesz lehetővé, tehát 3 rúdnak felel meg;

3. hengersizekeres, csuklós mozgósaru 1 irányú elmozdulást és 1 irányú elfordulást tesz lehetővé, tehát 4 rúdnak felel meg;

4. kétsorú hengersizekeres, hengercsuklós mozgósaru 2 irányú elmozdulást és 1 irányú elfordulást tesz lehetővé, tehát 3 rúdnak felel meg.

5. hengersizekeres, gömbcsuklós saru 1 irányú elmozdulást és 3 irányú elfordulást tesz lehetővé, tehát 2 rúdnak felel meg;

6. kétsorú hengersizekeres, gömbcsuklós saru 2 irányú elmozdulást és 3 irányú elfordulást tesz lehetővé, tehát 1 rúdnak felel meg.

Figyelembe véve a 4 ponton való megtámasztást, elvileg alkalmazható volna:

Egy 2. alatti álló gömbcsuklós és három 6. alatti 2 hengersizekeres, gömbcsuklós saru, avval a megszorítással, hogy utóbbiak közül az egyik *nem fekszik vízszintes síkban*.

Ez az utóbbi követelés gyakorlatilag úgyszólván kivihetetlen. Ugyancsak kivihetetlenek a többi elképzelhető kombinációk, mint pl. egy 4. alatti és

három 6. alatti, vagy két 5. alatti és két 6. alatti saruösszetétel, mert ugyanúgy, mint az elsőnél, nem vízszintes irányú sarufészeket igényelnek.

Mármost a tényleges mérnöki gyakorlat mindenekelőtt valamennyi sarut vízszintes lapra fekteti fel (kivételek egyes nagy ívmagasságú ívtartók). A tényleges gyakorlat kisebb szélességű térbeli tartókon két hengercsuklós állósarut és két 1 hengerszekeres, hengercsuklós mozgósarut; széles tartókon egy gömbcsuklós állósarut, két egyhengerszekeres, hengercsuklós mozgósarut és egy 2 hengerszekeres, gömbcsuklós mozgósarut alkalmaz.

Előbbi esetben a képzelt támasztórudak száma: $5 + 5 + 4 + 4 = 18$; utóbbi esetben $3 + 4 + 4 + 1 = 12$; tehát mindkét esetben jóval nagyobb, mint az egyensúlyi feltételekből statikai úton megállapítható és feltétlen szükséges 6 rúd.

Fentiekből megállapítható, hogy térbeli tartószerkezetek külső megtámasztása, nagyon kevés kivételtől eltekintve, statikailag határozatlan. A megtámasztás kényszererői csak több-kevesebb idealizálással, leegyszerűsítéssel állapíthatók vagy becsülhetők meg.

3. Az alaptétel levezetése

Az itt következő levezetésben, felesleges ismétlések elkerülése végett, gyakran történik hivatkozás a síkbeli rácsostartókra levezetett alaptételre.

3.1. Csuklós tetraéder esete

Miként a síkbeli rácsostartónál a szabálytalan alakú csuklós háromszögből indultunk ki, a térbeli összefüggés kiindulását a szabálytalan alakú tetraéder képezi (1. ábra).

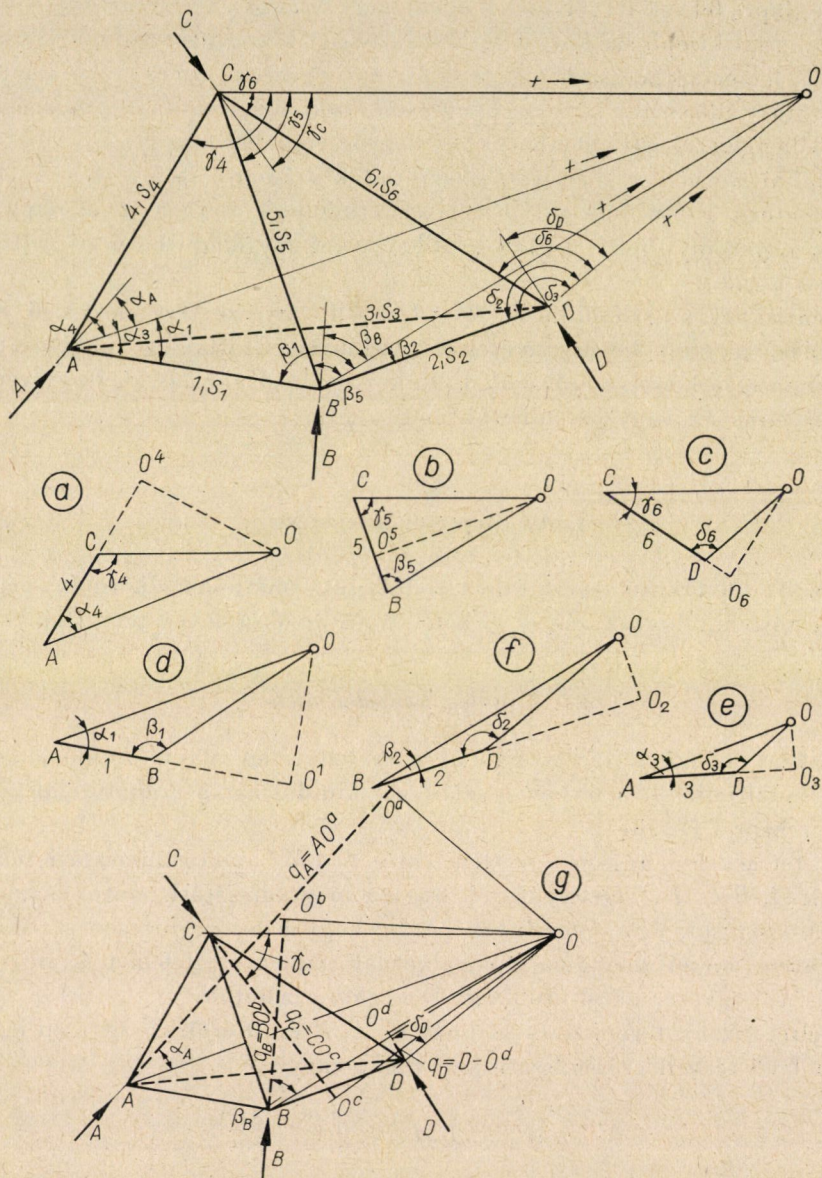
A tetraéderre hason egyetlen aktív \bar{C} erő, a megtámasztási pontok legyenek A , B és D . Tételezzük fel, hogy a megtámasztási pontokon maguk a megtámasztások úgy vannak kiképezve, hogy azok együttesen statikailag határozott és merev megtámasztást alkotnak, ennek megfelelően \bar{C} aktív erő megadásával egyszersmind utóbbiak is meghatározhatók.

Feltételezzük természetesen, hogy C , A , B és D erők együttesen egyensúlyban levő térbeli erőrendszert képeznek, vagyis

$$(C, A, B, D) \doteq 0.$$

A tetraéder 6 élét képező 6 rúdban az (A, B, D, C) erőrendszer hatására rúderők ébrednek, melyeknek meghatározása az (A, B, C, D) erőrendszer ismeretében teljesen egyértelműen lehetséges. Vagyis, ha az egyes rudakban fellépő rúderőket a rudak számával megegyező indexszel látjuk el, a fellépő rúderők:

$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$; ezeket a rúderőket — ha talán valamivel bonyolultabb úton, mint a síkbeli tartókon —, de minden körülmények között egyértelműen meg tudjuk határozni.



1. ábra. Csuklós tetraéder

Tételezzük fel, hogy ez a meghatározás megtörtént és ismerjük valamennyi rúdban fellépő rúderőt. Egyensúlyi rendszerről lévén szó, a csuklós

tetraéder bármelyik csuklópontjában összefutó külső és belső erők önmagukban külön-külön egyensúlyban vannak. Tehát az 1. ábra jelöléseivel:

$$\begin{aligned}(C, S_4, S_6, S_5) &\doteq 0, \\(A, S_3, S_4, S_1) &\doteq 0, \\(B, S_1, S_5, S_2) &\doteq 0, \\(D, S_2, S_3, S_6) &\doteq 0.\end{aligned}$$

Azonban, ha a fenti egyenletek fennállnak, ez egyszerismind azt jelenti, hogy az egy-egy egyenletben felsorolt külső és belső erők vetületeinek algebrai összege a *tér* bármely egyenesére vonatkoztatva zérust kell hogy eredményezzen.

Ezekután vegyünk fel a térben teljesen tetszőlegesen valamely O pontot (1. ábra). Ha a felvett O pontot a tetraéder valamelyik rúdjának két végpontjával összekötjük, síkban fekvő háromszöget kapunk, tekintettel arra, hogy 3 térbeli pont, ha csak nem fekszik egy egyenesen, egy síkot határoz meg. Ha tehát ezen összekötő egyenesekre írjuk fel az előbb említett vetületi tételeket, minden esetben közös síkban fekvő erőkkel van dolgunk.

Ezekután kössük össze O pontot a tetraéder 4 csúcsával. Az így származó \overline{CO} , \overline{AO} , \overline{BO} , \overline{DO} egyeneseken vegyük fel a pozitív irányt oly módon, hogy az mind a négy egyenesen O pont *felé* mutasson.

Legyen a külső \bar{C} , \bar{A} , \bar{B} , \bar{D} erők *pozitív* iránya és \overline{CO} , \overline{AO} , \overline{BO} és \overline{DO} segédegyenesek pozitív iránya közötti szögek jele

- a C pontban, a \bar{C} külső erő és \overline{CO} egyenes között γ_C ,
- az A pontban, az \bar{A} külső erő és \overline{AO} egyenes között α_A ,
- a B pontban, a \bar{B} külső erő és \overline{BO} egyenes között β_B ,
- a D pontban, a \bar{D} külső erő és \overline{DO} egyenes között δ_D .

Legyen továbbá a tetraéder éleit képező egyenesdarabok és a segédegyenesek *pozitív* iránya közötti szögek betűjele

- a C pontban: γ_4 , γ_5 és γ_6 ,
- az A pontban: α_1 , α_3 és α_4 ,
- a B pontban: β_1 , β_2 és β_5 ,
- a D pontban: δ_2 , δ_3 és δ_6 .

Mindezek után írjuk fel a négy segédegyenesre, \overline{CO} , \overline{AO} , \overline{BO} és \overline{DO} -ra az erővetületek 0-értékűségét:

$$\begin{aligned}C \cos \gamma_C + S_4 \cos \gamma_4 + S_5 \cos \gamma_5 + S_6 \cos \gamma_6 &= 0, \\A \cos \alpha_A + S_1 \cos \alpha_1 + S_3 \cos \alpha_3 + S_4 \cos \alpha_4 &= 0, \\B \cos \beta_B + S_1 \cos \beta_1 + S_2 \cos \beta_2 + S_5 \cos \beta_5 &= 0, \\D \cos \delta_D + S_2 \cos \delta_2 + S_3 \cos \delta_3 + S_6 \cos \delta_6 &= 0.\end{aligned}$$

Szorozzuk meg ezen egyenletrendszer első egyenletét a \overline{CO} távolsággal, a második egyenletet az \overline{AO} távolsággal, a harmadik egyenletet a \overline{BO} és a negyedik egyenletet a \overline{DO} távolsággal és mindjárt adjuk is össze az így nyert egyenleteket. Eredményünk alábbi lesz:

$$\begin{aligned} & \overline{CO} \cdot C \cos \gamma_C + \overline{CO} \cdot S_4 \cos \gamma_4 + \overline{CO} \cdot S_5 \cos \gamma_5 + \overline{CO} \cdot S_6 \cos \gamma_6 + \\ & + \overline{AO} \cdot A \cos \alpha_A + \overline{AO} \cdot S_1 \cos \alpha_1 + \overline{AO} \cdot S_3 \cos \alpha_3 + \overline{AO} \cdot S_4 \cos \alpha_4 + \\ & + \overline{BO} \cdot B \cos \beta_B + \overline{BO} \cdot S_1 \cos \beta_1 + \overline{BO} \cdot S_2 \cos \beta_2 + \overline{BO} \cdot S_5 \cos \beta_5 + \\ & + \overline{DO} \cdot D \cos \delta_D + \overline{DO} \cdot S_2 \cos \delta_2 + \overline{DO} \cdot S_3 \cos \delta_3 + \overline{DO} \cdot S_6 \cos \delta_6 = 0. \quad (\text{I}) \end{aligned}$$

A fenti egyenletben minden rúderő két összeadandóban szerepel. Vonjuk össze ezeket az összeadandókat:

$$\begin{aligned} & \overline{CO} \cdot S_4 \cos \gamma_4 + \overline{AO} \cdot S_4 \cos \alpha_4 = S_4 (\overline{CO} \cos \gamma_4 + \overline{AO} \cos \alpha_4), \\ & \overline{CO} \cdot S_5 \cos \gamma_5 + \overline{BO} \cdot S_5 \cos \beta_5 = S_5 (\overline{CO} \cos \gamma_5 + \overline{BO} \cos \beta_5), \\ & \overline{CO} \cdot S_6 \cos \gamma_6 + \overline{DO} \cdot S_6 \cos \delta_6 = S_6 (\overline{CO} \cos \gamma_6 + \overline{DO} \cos \delta_6), \\ & \overline{AO} \cdot S_1 \cos \alpha_1 + \overline{BO} \cdot S_1 \cos \beta_1 = S_1 (\overline{AO} \cos \alpha_1 + \overline{BO} \cos \beta_1), \\ & \overline{AO} \cdot S_3 \cos \alpha_3 + \overline{DO} \cdot S_3 \cos \delta_3 = S_3 (\overline{AO} \cos \alpha_3 + \overline{DO} \cos \delta_3), \\ & \overline{BO} \cdot S_2 \cos \beta_2 + \overline{DO} \cdot S_2 \cos \delta_2 = S_2 (\overline{BO} \cos \beta_2 + \overline{DO} \cos \delta_2). \end{aligned} \quad (\text{II})$$

Azonban a zárójelekben foglalt mennyiségeknek nagyon egyszerű jelentésük van. Az 1a. — 1f. ábrákon kisebb léptékben kirajzoltuk az egyes rudakat, az O ponttal és a rudak két végéhez rajzolt segédegyenesekkel.

1a. ábra alapján:

$$\frac{AO^4}{AO} = \cos \alpha_4, \quad \frac{CO^4}{CO} = \cos (\pi - \gamma_4) = -\cos \gamma_4,$$

$$AO \cdot \alpha_4 + CO \cdot \cos \gamma_4 = AO^4 - CO^4 = l_4;$$

1b. ábra alapján:

$$\frac{BO^5}{BO} = \cos \beta_4, \quad \frac{CO^5}{CO} = \cos \gamma_5,$$

$$BO \cdot \cos \beta_5 + CO \cdot \cos \gamma_5 = BO^5 + CO^5 = l_5;$$

1c. ábra alapján:

$$\frac{CO^6}{CO} = \cos \gamma_6, \quad \frac{DO^6}{DO} = \cos (\pi - \delta_6) = -\cos \delta_6,$$

$$CO \cdot \cos \gamma_6 + DO \cdot \cos \delta_6 = CO^6 - DO^6 = l_6;$$

ld. ábra alapján:

$$\frac{AO^1}{AO} = \cos \alpha_1, \quad \frac{BO^1}{BO} = \cos(\pi - \beta_1) = -\cos \beta_1,$$

$$AO \cdot \cos \alpha_1 + BO \cdot \cos \beta_1 = AO^1 - BO^1 = l_1;$$

le. ábra alapján:

$$\frac{AO^3}{AO} = \cos \alpha_3, \quad \frac{DO^3}{DO} = \cos(\pi - \delta_3) = -\cos \delta_3,$$

$$AO \cdot \cos \alpha_3 + DO \cdot \cos \delta_3 = AO^3 - DO^3 = l_3;$$

lf. ábra alapján:

$$\frac{BO^2}{BO} = \cos \beta_2, \quad \frac{DO^2}{DO} = \cos(\pi - \delta_2) = -\cos \delta_2,$$

$$AO \cdot \cos \beta_2 + DO \cdot \cos \delta_2 = BO^2 - DO^2 = l_2,$$

vagyis a (II) egyenletek sorjában így írhatók:

$$S_4 l_4; S_5 l_5; S_6 l_6; S_1 l_1; S_3 l_3 \text{ és } S_2 l_2;$$

ha ti. l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 és l_6 -tal az 1, 2, 3, 4, 5, illetve 6 rudak hosszát jelöljük.

Most még állapítsuk meg az (I) egyenlet első oszlopában szereplő 4 összeadandónak jelentését, ti. azokét, melyekben a külső erők szerepelnek.

Az lg. ábrán ismét kirajzoltuk az $(ABCD)$ tetraédert, a külső erőkkel és az O ponttal. Bocsássunk O pontból valamennyi erő irányára merőlegeset és e merőlegesnek az erő irányával való metszéspontját jelöljük O^c, O^a, O^b és O^d -vel. Az lg. ábra alapján

$$\frac{CO^c}{CO} = \cos \gamma_C; \quad \frac{AO^a}{AO} = \cos \alpha_A; \quad \frac{BO^b}{BO} = \cos \beta_B, \quad \frac{BO^d}{BO} = \cos \delta_D,$$

tehát

$$CO \cos \gamma_C = q_C, \quad AO \cos \alpha_A = q_A, \quad BO \cos \beta_B = q_B, \quad DO \cos \delta_D = q_D,$$

ha ti. O pontból az erő irányára bocsátott merőlegesnek az erő támadáspontjától mért CO^c, AO^a, BO^b , illetve DO^d távolságát (az lg. ábrán vonalkázott távolságokat) rendre q_C, q_A, q_B és q_D -nek nevezzük. A továbbiakban ezeket a q távolságokat az erők karjainak nevezzük és előjeles távolságoknak tekintjük. A kart akkor nevezzük pozitívának, ha az erő iránya az O^c, O^a, O^b , illetve O^d metszéspont felé mutat. (Utóbbi logikus következménye annak, hogy a pozitív erőirány és a pozitív segédegyenes iránya közti szöget neveztük $\gamma_C, \alpha_A, \beta_B$, illetve δ_D -nek; ha ti. ez a szög $\pi/2$ -nél nagyobb, úgy $\cos \gamma_C, \cos \alpha_A$ stb. is, tehát $CO \cdot \cos \gamma_C, AO \cdot \cos \alpha_A$ stb. is negatív.)

Mindezeket az eredményeket (I) egyenletbe behelyettesítve, a

$$Cq_C + Aq_A + Bq_B + Dq_D + S_1 l_1 + S_2 l_2 + S_3 l_3 + S_4 l_4 + S_5 l_5 + S_6 l_6 = 0$$

összefüggést kapjuk. Szimbolikusan írva:

$$\Sigma P_i q_i + \Sigma S_i l_i = 0,$$

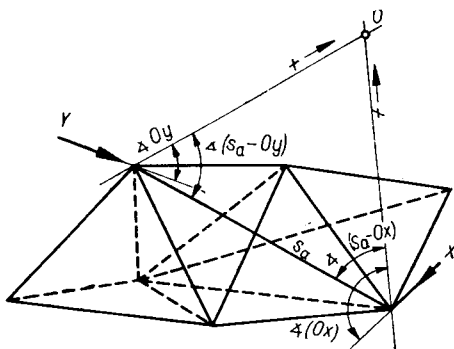
illetve

$$\Sigma P_i q_i = - \Sigma S_i l_i, \quad (\text{III})$$

ahol P_i általában külső erőt jelent, q_i pedig annak fentiek szerint értelmezett karját jelenti. S_i rúderőt, l_i ugyanannak rúdhosszát jelenti. A szummáció bal oldalon az összes erőre ($i = 1, 2, 3, 4$), jobb oldalon az összes rúdra ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) terjesztendő ki.

3.2. Általános térbeli rácsostartó esete

A 2. ábra általános térbeli rácsostartót tüntet fel. A tartónak fölös rúdjai is vannak, tehát belsőleg statikailag határozatlan felépítésű. A tartót x, y, \dots csomópontjain X, Y, \dots külső (aktív- és kényszer-) erők terhelik. Kiinduló



2. ábra. Általános térbeli rácsostartó

feltételünk az, hogy az (X, Y, \dots) erőrendszer önmagában egyensúlyban van, továbbá, hogy a tartó ezen erők hatására nyugalomban marad, vagyis az egyes csomópontok az (X, Y, \dots) erők hatására nem mozdulnak el. Utóbbi csak akkor lehetséges, ha külön-külön minden egyes csomópontra ható külső erő és az ugyanezen csomópontba befutó 3, vagy annál több rúd rúderője együttesen egyensúlyi erőrendszert képez.

Ezek szerint a tér tetszés szerinti pontjában felvett O pontból kiinduló és O pontot a tartó egyes csomópontjaival összekötő Ox, Oy, \dots egyenesek mindegyikére felírható az erővetületek 0-értékűsége, vagyis:

$$\begin{aligned}
 X \cos(Ox) + S_a \cos(s_a - Ox) + S_b \cos(s_b - Ob) + \\
 + \dots + S_n \cos(s_n - On) = 0, \\
 Y \cos(Oy) + S_a \cos(s_a - Oy) + S_c \cos(s_c - Oc) + \\
 + \dots + S_m \cos(s_m - Om) = 0 \qquad (IV) \\
 \text{stb.},
 \end{aligned}$$

ahol a zárójeles kifejezések az ábrán feltüntetett szögeket jelentik. Ilyen egyenletet pontosan annyit írhatunk fel, ahány (akár külső, akár belső) csomópontja van a szerkezetnek.

A (IV) egyenletrendszerben nyilván minden külső erő szerepel, és pedig egyetlen egy egyenletben, ti. csakis abban, amely az illető erő támadáspontját O ponttal összekötő egyenesre vonatkozó vetítést írja le, pl. X erő csak az Ox egyenesre vonatkozó vetítésben.

Az egyes rúderők mindegyike viszont két egyenletben szerepel, ti. az illető rúd két végpontját O -val összekötő két egyenesre vonatkozó vetületi egyenletben. Így pl. a 2. ábrán feltüntetett (egyébként statikailag fölös) s_a rúd S_a rúderője csakis az x és y csomópontokat O -val összekötő két egyenesre vonatkozó vetületi egyenletben, jelen esetben a (IV) alatti első és második egyenletben fordul elő.

Ámde ilyen viszonyok között a 3.1. alatt az egyszerű tetraéderre alkalmazott levezetés tökéletesen az előbbi úton hajtható végre és a kapható végeredmény is tökéletesen azonos lesz a 3.1. részben kapott (III) végeredménnyel, vagyis

$$\Sigma P_i q_i = - \Sigma S_i l_i; \qquad (V)$$

a különbség mindössze az, hogy a bal oldal szummációja jelen esetben az összes külső (aktív- és kényszer-) erőre, a jobb oldali pedig a térbeli rácsostartó valamennyi rúdjára, beleértve a statikailag fölös rudakat is, kiterjesztendő.

Mindezek alapján a térbeli rácsostartó rúderőinek ellenőrzésére felhasználható alaptétel így foglalható szavakba:

a külső erők és karok szorzatának algebrai összege egyenlő a rúderők és rúdhosszak szorzatainak algebrai összegével; a két összeg azonban ellenkező előjelű.

Amint látjuk, az (V) egyenlet azonos a síkbeli rácsostartókra levezetett alapösszefüggéssel. Az eltérés mindössze az, hogy ezúttal P_i térbeli erőrendszert jelent, az erőrendszer egyes erőihez tartozó q_i karok nem egy síkban fekvők, hanem térbeli egyeneseket jelentenek, az (V) egyenlőség jobb oldala pedig a térbeli rácsostartó összes rúdjaira vonatkozó rúderők és rúdhosszak szorzatainak algebrai összegét jelenti.

Itt mindjárt szükséges megjegyezni, hogy bár az O kezdőpont tetszés szerint választható a térben, éppen, mert térbeli tartóról van szó, annak helyét célszerűen kell megválasztani, ha azt akarjuk, hogy az ellenőrzéshez egyszerű

úton jussunk hozzá. Ez itt még sokkal fontosabb, mint síkbeli tartók esetén. Ügyetlen felvétel esetében az (V) képlet bal oldalának kiszámítása igen sok munkával jár.

Befejezésül még egy, inkább elméleti jellegű megjegyzés. Minthogy az O pont felvétele teljesen tetszőleges volt, a levezetett végeredmény O pont bármilyen felvétele esetén érvényben marad. Ebből viszont az is következik, hogy a rúderők és rúdhosszak szorzatának algebrai összege a külső erők felvételével már teljesen meg van határozva, e szorzatösszeg tehát kizárólag a külső erők nagyságától, irányától és értelmétől függ, de nem függ az egyes rudak számától, irányától és a rúdhosszaktól.

Az említett $\sum S_i l_i$ szorzatösszeg tehát a szóban forgó rácsostartóra vonatkozólag *állandót, invariánst* képez, ami igen feltűnő jelenség. Szavakkal kifejezve: ha adott a térbeli tartó erőkkel terhelt csomópontjainak helye és adottak maguk a külső (egyensúlyban levő) erők, akkor a rúderők és rúdhosszak szorzatösszege adott és változatlan. Ez a mennyiség teljesen független attól, hogy az erőkkel terhelt csomópontokat hány, milyen irányú és milyen hosszú rudakkal kötjük össze.

Utóbbi megállapítás természetesen csak elméleti érdekességgel bír, gyakorlati haszna nincsen. A műszaki gyakorlatban ugyanis először állapítjuk meg a tartó geometriai viszonyait és csak ezek után a terhelő erőket.

4. Az eljárás gyakorlati alkalmazása

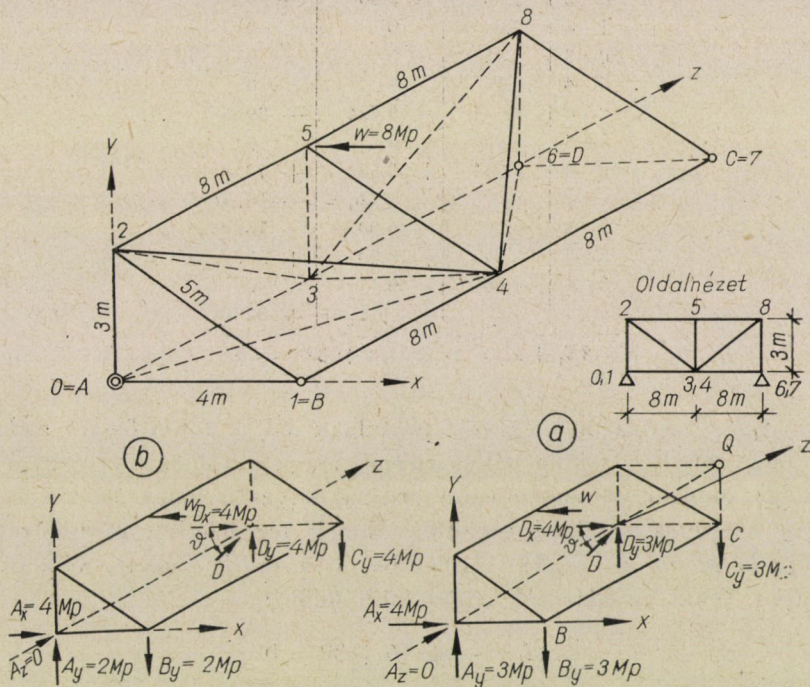
4.1. Számpélda

A 3. ábrán feltüntetett térbeli rácsostartó egy mostanában sűrűn alkalmazott fűrész-tetőszerkezetet tüntet fel, egyszerű vonalozással. A tartó csomópontjainak száma 9, rudak száma 21, tehát a $9 \cdot 3 - 6 = 21$ feltétel teljesítve van.

Terhelő egyetlen külső aktív erő: $W = 8$ Mp (szélerő) az 5 csomóponton. A tartó a $0 = A$, $1 = B$, $7 = C$ és $6 = D$ csomópontokon van megtámasztva.

Az A ponton gömbcsuklót, B és C pontokon függőleges irányú megtámasztó rudakat, D ponton ugyancsak egyszerű támasztórudat képzelünk el, mely utóbbi azonban a tartó véglapjának síkjában ($6-7-8$ csomópontok alkotta háromszög síkjában) *ferdén* áll. Így a megtámasztó rudak száma $3 + 3 = 6$, vagyis a tartó idealizált megtámasztási rendszere statikailag határozott. Az elsősorban meghatározandó ismeretlenek: a reakciókomponensek, vagyis $A_x, A_y, A_z; B_y; C_y; D_x, D_y$. Az ismeretlenek száma tehát 7. Ha azonban a teljes szimmetriából indulunk ki (ami nem feltétlen szükséges!), akkor $B_y = C_y$, vagyis végeredményben csak 6 ismeretlent kell meghatározunk. Az erők térbeli egyensúlyát kifejező 6 egyenlet:

- erők vetületösszege x tengelyre: $A_x + D_x + W = 0$,
- erők vetületösszege y tengelyre: $A_y + B_y + C_y + D_y = 0$,
- erők vetületösszege z tengelyre: $A_z = 0$,
- nyomaték x tengelyre: $C_y \cdot 16 \text{ m} + D_y \cdot 16 \text{ m} = 0$,
- nyomaték y tengelyre: $W \cdot 8 \text{ m} + D_x \cdot 16 \text{ m} = 0$,
- nyomaték z tengelyre: $B_y \cdot 4 \text{ m} + C_y \cdot 4 \text{ m} + W \cdot 3 \text{ m} = 0$.



3. ábra. Fűrész-tetőszerkezet vizsgálata vízszintes erőre

Fenti egyenleteket, annak figyelembevételével, ami feltételezésünk volt, hogy $B_y = C_y$, egyértelműen meg lehet oldani. A kiadódó eredmények:

$$A_x = D_x = -4 \text{ Mp} \text{ (} W \text{ irányával ellenkező irányban hat),}$$

$$A_y = D_y = +3 \text{ Mp} \text{ (felfelé mutat),}$$

$$A_z = 0,$$

$$B_y = C_y = -3 \text{ Mp} \text{ (lefelé mutat, lehorgonyzó erő).}$$

A 3a. ábrán fenti reakcióirányokat feltüntettük.

A ferde rudak hosszai: 2–3 rúd: 8,55 m, 2–4 rúd: 9,42 m, 0–4 rúd: 8,95 m.

Ezekután kiszámítottuk az összes rúderőket. Ezeknek értékeit, egyszerűsített az (V) képlet szerinti ellenőrzés számítását az I. táblázat mutatja.

A teljes szimmetria miatt elegendő a rúderőket a tartó felére meghatározni. Figyelembe véve, hogy a tartó közepén levő (5–3), (5–4) és (3–4)

I. táblázat

Rúd jele	Rúdhossz l (m)	Rúderő S (Mp)	S _l (Mpm)
1-0	4.00	- 4.00	- 16.00
1-2	5.00	+ 5.00	+ 25.00
0-2	3.00	- 3.00	- 9.00
1-4	8.00	0	0
0-3	8.00	0	0
0-4	8.95	0	0
2-4	9.434	- 9.434	- 89.00
2-5	8.00	0	0
2-3	8.544	+ 8.544	+ 73.00
		$\Sigma_1 =$	- 16.00
5-3	3.00	- 6.00	- 18.00
5-4	5.00	+ 10.00	+ 50.00
3-4	4.00	0	0
		$\Sigma_2 =$	+ 32.00

$$2\Sigma_1 + \Sigma_2 = -2 \cdot 16.0 + 32.0 = 0$$

rudak az egész tartón csak egyszer fordulnak elő, a többi összes rudaknak viszont megvannak a szimmetrikus rúdjai, maga a táblázat csupán a tartó felére dolgozandó ki, viszont a szimmetrikus helyzetű rudak értékei a szummációban kétszeres értékkel veendők. Ennek megfelelően a táblázat első szummája kétszeresen veendő figyelembe, a második szumma viszont csak egyszeresen. Tehát az ellenőrző képlet jobb oldala:

$$\Sigma S_i l_i = -2 \cdot 16 + 32 = 0.$$

Az ellenőrző képlet bal oldalának kiszámításához O kezdőpontot legcélszerűbben A pont helyén vehetjük fel, ebben az esetben ugyanis valamennyi kényszererő, nemkülönben W aktív erőkarja egyaránt 0. Így tehát a bal oldali érték:

$$\Sigma P_i q_i = 0.$$

Ezek szerint az (V) képlet által megkövetelt feltétel teljesítve van.

Fenti példában kiindulásunk az volt, hogy a teljes szimmetria miatt: $B_y = C_y$. Ezt a meghatározást másképpen is lehet fogalmazni. Fenti feltevés alapján ugyanis azt az eredményt kaptuk, hogy $D_x = -4$ Mp, $D_y = +3$ Mp. Ez a megállapítás más szóval azt jelenti, hogy tulajdonképpen a D megtámasztó rúd *irányát* rögzítettük. Ez a rúd ugyanis szükségképpen csakis olyan irányban állhat, mint az általa a tartóra átadott kényszererő, vagyis e képzelt rúdnak a vízszintessel bezárt szöge: $\tan \vartheta = 3/4$ (3a. ábra).

A D rúd irányára azonban elvileg semmiféle megkötésünk nincsen, — kivéve azt, hogy függőleges nem lehet. Kiindulhatunk például abból a fel-

tevésből is, hogy $D_x = D_y$, vagyis $\tan \vartheta = 1/1 = 45^\circ$. Erre a feltevésre ugyanúgy felírhatjuk a térbeli statika 6 egyensúlyi egyenletét és ugyanúgy, mint előbb, kiszámíthatjuk a reakcióerőket és rúderőket. A számítás részleteit mellőzve, a kiadódó eredmények:

$$\begin{aligned} A_x = D_x &= -4 \text{ Mp (} \overline{W}\text{-vel ellenkező irány),} \\ A_y &= +2 \text{ Mp; } & A_z &= 0, \\ B_y &= -2 \text{ Mp; } & C_y &= -4 \text{ Mp (lehorgonyzó erők),} \\ D_y &= +4 \text{ Mp.} \end{aligned}$$

(Lásd 3b. ábra).

Bármennyire különösnek is látszik, a D képzelt támasztórúd irányának megváltoztatásával az összes reakciók értékei megváltoznak, a tartó a reakcióerők szempontjából már nem szimmetrikus, a \overline{W} erőn át fektetett függőleges sík egyik oldalán a reakciók más értékeket adnak, mint ugyanezen sík másik oldalán. Fentiek dacára a tartó egyensúlyban van, amit bármely felvett tengelyre vonatkoztatott nyomatékösszegek 0-értékűségével ellenőrizhetünk. Viszont, természetesen ilyen felvétel mellett, az előző felvételhez képest *megváltoznak az összes rúderők*.

Azonban az ellenőrző képletünk jobb oldalán szereplő $\sum P_i q_i$ érték változatlanul 0 marad, amiről legkönnyebben úgy győződhetünk meg, ha ez esetben is az O kezdőpontot A ponttal vesszük azonosnak. Ez viszont azt jelenti, hogy az (V) ellenőrző képlet bal oldali szummája, $\sum S_i l_i$ is változatlanul az előző esetben meghatározott érték (jelen esetben 0) kell hogy maradjon. Vagyis végeredményben a rúderők és rúdhosszak algebrai összege jelen tartón *független a megtámasztás kényszererőinek idealizált felvételétől*. Ez a megállapítás tervezés szempontjából sok előnyt jelent.

Még egy utolsó megjegyzést kell tennünk fenti példával kapcsolatban. D ponton működő támaszerő irányát a tartó véglapjának síkjában fekvőnek képzeltük. Ez a feltételezés természetesen csak arra az esetre jelentheti a tartó határozott és merev megtámasztását, ha a külső aktív erő a példában megadott irányú, vagy általában a véglappal párhuzamos síkban fekszik. Egyéb esetben, pl. ferde irányú \overline{W} erő esetén, D ponton képzelt rudat szükségképpen más irányúnak, a zárólap síkjából kitérő egyenesen fekvőnek kell feltételezni.

4.2. Számpélda

A 4. ábra egy 16 m fesztávú, acélszerkezetű rácsos felülvilágító egyszerűsített szerkezetét tünteti fel. A tartónak 9 csomópontja és 21 rúdja van, tehát a $3 \cdot 9 - 6 = 21$ feltétel teljesítve van.

A tartót egyetlen vízszintes irányú, $\overline{W} = 8 \text{ Mp}$ aktív erő terheli. A megtámasztás kényszererőire vonatkozólag ismét ugyanúgy, mint előző példában, az A ponton gömbcsuklás, a B, C és D pontokon támasztórudas megtámasztást

tételezzünk fel. A D ponton, természetesen a 2. pontban mondottak alapján, nem helyezhetünk el függőlegesen álló megtámasztó rudat. Az adott esetben, vízszintes irányú és a tartó hossz tengelyére merőleges \overline{W} erő esetén, D ponton levő megtámasztó rudat a tartó véglapjának síkjában fekvőnek képzelhetjük el.

Tételezzük fel, hogy $B_y = C_y$.

Fenti feltételezésekkel, a térbeli statika 6 egyensúlyi egyenlete alapján, valamennyi támaszerő-komponens egyértelműen kiszámítható. Felírva a 3 koordinátatengelyre az erővetületek és nyomatékok 0-értékűségét, az alábbi értékeket kapjuk:

$$A_x = D_x = -4 \text{ Mp (} \overline{W}\text{-vel ellenkező irány),}$$

$$A_y = D_y = +2,67 \text{ Mp, } A_z = 0,$$

$$B_y = C_y = -2,67 \text{ Mp (lehorgonyzó erő).}$$

A reakcióerők irányát a 4a. ábra tünteti fel.

Ez a felvétel tehát azt jelenti, hogy $D_y/D_x = 2,67/4 = 0,66$, vagyis a D -pontbeli képzelt rúd tengelyvonala átmegy a Q ponton (4a. ábra).

A Q pont a C támasztórúd függőlegesének és a tetőszerkezet csúcspontján át képzelt vízszintesnek metszéspontja. Más szóval tehát ez a felvétel D -nél képzelt rúd irányát a véglap síkjában fekvőnek tekinti, tehát mint *síkbeli* rácsostartó síkjában teremti meg az egyensúlyt, ami másképpen nem képzelhető el, minthogy a közös síkban levő három erő, ti. C , D , továbbá \overline{W} erőnek a tartó tetőpontjára képzelt $\overline{W}/2$ komponense egy közös pontban metszik egymást. Síkbeli tartón ez a feltétel szükséges velejárója az egyensúlynak. Térbeli tartón ez nem feltétlen szükséges.

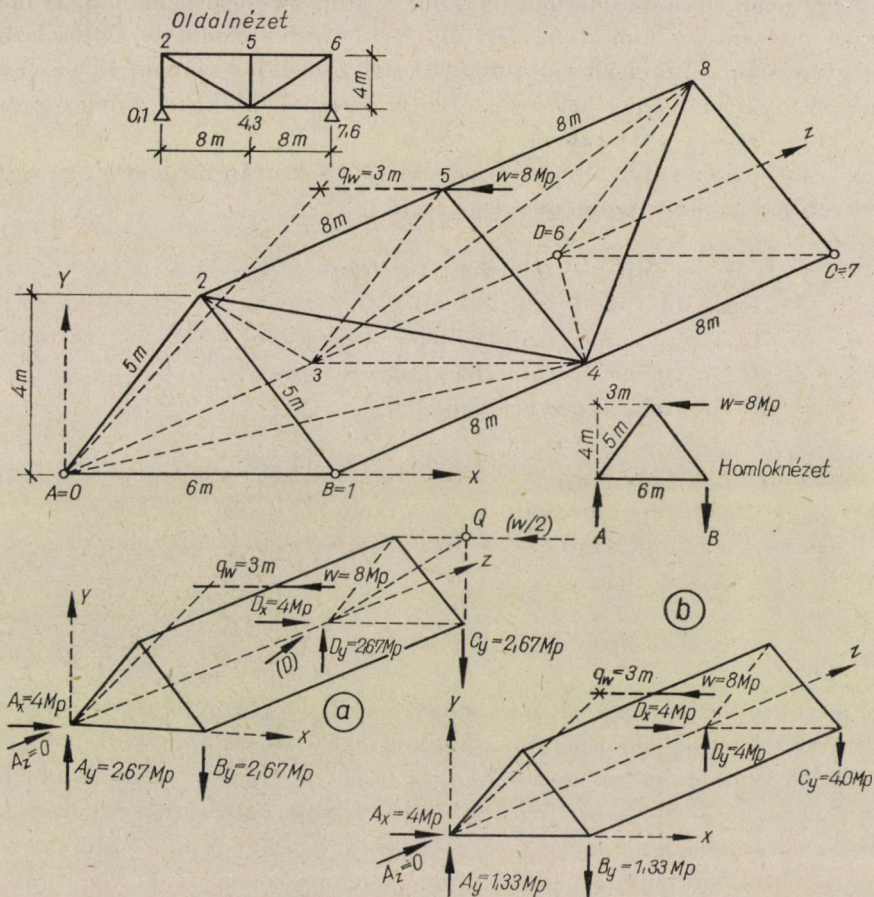
II. táblázat

Rúd jele	Rúdhossz l (m)	Rúderő S (Mp)	SI (Mpm)
1-0	6.00	- 2.00	- 12.00
1-2	5.00	+ 3.33	+ 16.67
0-2	5.00	- 3.33	- 16.67
1-4	8.00	0	0
0-3	8.00	0	0
0-4	10.00	0	0
2-4	9.434	- 6.29	- 59.34
2-5	8.00	9	0
2-3	9.434	+ 6.29	+ 59.34
		$\Sigma_1 =$	- 12.00
5-3	5.00	- 6.66	- 33.33
5-4	5.00	+ 6.66	+ 33.33
3-4	6.00	0	0
		$\Sigma_2 =$	0

$$2\Sigma_1 + \Sigma_2 = -24.00$$

Fenti előkészítés után a tartó rúdjaainak rúderői egyértelműen meghatározhatók. Mellőzve a számítási részleteket, a végeredményt a II. táblázat tünteti fel.

A szimmetria miatt itt is, ugyanúgy mint előző példában, a rúderőket csupán a tartó felére számítottuk ki. Így az ellenőrző képlet (V) jobb oldali



4. ábra. Felülvilágító-szerkezet vizsgálata vízszintes erőre

szummáját oly módon kapjuk meg, hogy a táblázat felső részének a szummációját kétszeresen, az alsó részét egyszeresen vesszük számításba.

Ezek szerint az ellenőrző képlet jobb oldala:

$$\sum S_i l_i = -2 \cdot 12 \text{ Mpm} + 0 = -24 \text{ Mpm}.$$

Az ellenőrző képlet bal oldalát legkönnyebben úgy kapjuk meg, ha az O pontot A pont helyére képzeljük. Ez esetben ugyanis az összes kényszererők

q karjai zérussal egyenlők és a szummációban egyedül az aktív erő, W marad benn. Utóbbinak karja, az ábra tanúsága szerint 3 m, tehát:

$$\Sigma P_i q_i = 3 \cdot 8 = +24 \text{ Mpm},$$

ami azt bizonyítja, hogy a rúderők kiszámítása helyesen történt.

Jelen példával kapcsolatban ugyanúgy, mint az előző példában, D megtámasztó rúdként az előbbi felvételtől eltérő irányú rudat is feltételezhetünk. Így például feltételezhetjük, hogy D rúd a véglap síkjában, 45° -os ferde egyenes irányában van elhelyezve. Ez erőkomponensekben kifejezve azt jelenti, hogy $D_x = D_y$ (4b. ábra).

A térbeli egyensúlyt kifejező 6 egyenletet ezek után megoldva, az egyes kényszererőkre alábbi eredményeket kapjuk:

$$\begin{aligned} A_x &= D_x = +4 \text{ Mp (} W\text{-vel ellentétes irány),} \\ A_y &= +1,33 \text{ Mp (felfelé mutató erő), } A_z = 0, \\ B_y &= -1,33 \text{ Mp (lefelé mutató, lehorgonyzó erő),} \\ C_y &= -4 \text{ Mp (lefelé mutató, lehorgonyzó erő),} \\ D_y &= +4 \text{ Mp (felfelé mutató erő).} \end{aligned}$$

Ismét azt találjuk, hogy a reakciókomponensek értékei az előző felvételhez képest lényegesen megváltoztak, a tartó középsíkjához képest a szimmetria nincs meg. Ebből kifolyólag természetesen megváltoznak az összes rúderők értékei is, így pl.

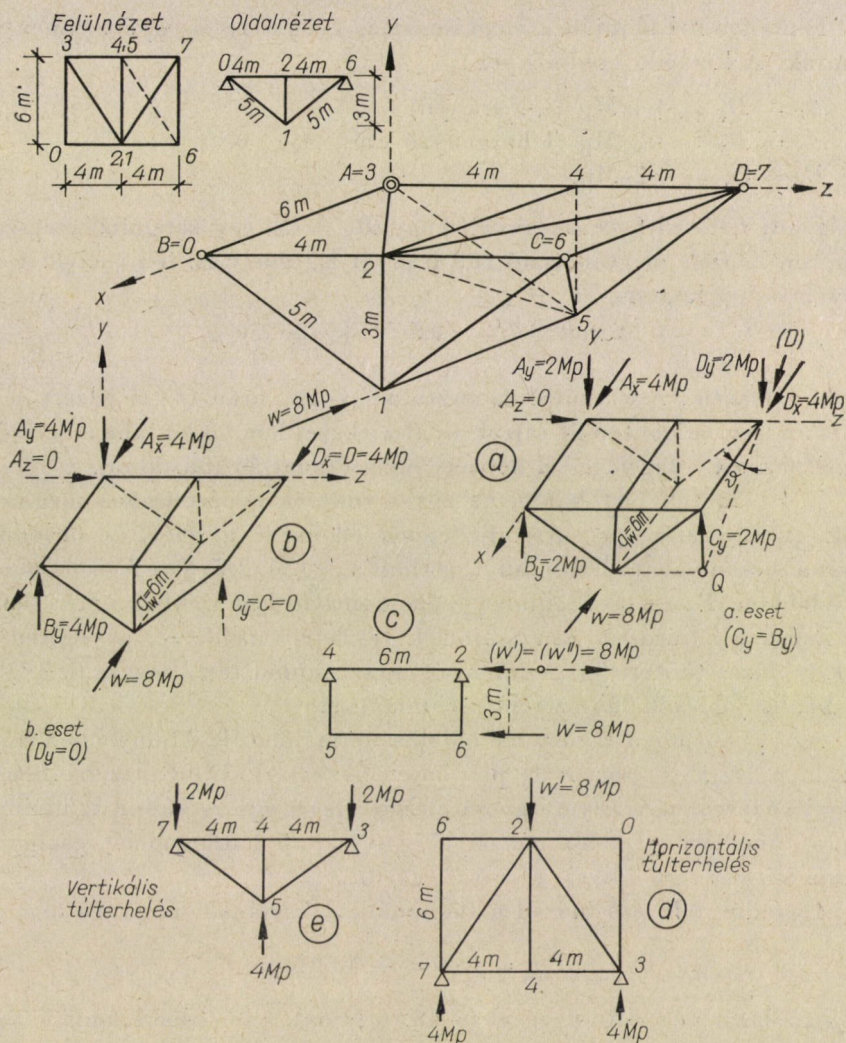
$$S_{1-0} = -1,0 \text{ Mp; } S_{1-2} = +1,67 \text{ Mp; } S_{0-2} = -2,0 \text{ Mp stb.,}$$

azonban ebben az esetben is, ugyanúgy, mint az előző felvétel esetében, az ellenőrző képlet bal oldali szummájának értéke változatlan, tekintettel arra, hogy utóbbi szummából az összes kényszererők, ugyanúgy, mint előbbi felvétel esetében, kiesnek és csupán a W erő marad benn, változatlan 3,0 m karral. Vagyis a bal oldali szumma értéke változatlanul $+24,0$ Mpm. Ebből következőleg a jobb oldali szumma értéke sem változhat meg. Tehát ismét ahhoz az eredményhez jutunk, hogy a rúderők és rúdhosszak szorzatának algebrai összege függetlenné vált a megtámasztás kényszererőinek idealizált felvételétől és utóbbiak számszerű értékétől.)

4.3. Számpélda

Az 5. ábra felsőpályás hídszerkezetet leegyszerűsített formában tüntet fel. A szerkezet viszonylag széles tartónak tekintendő, minthogy fesztáva 8,0 m, szélessége pedig 6,0 m. A térbeli rácsostartó csomópontjainak száma 8, a rudak száma 18, tehát a $3 \cdot 8 - 6 = 18$ feltétel teljesítve van. A felépítés

a (7, 4, 5) alapháromszögből indult ki, ehhez kapcsoltuk, a tetraédéres felépítési szabály szerint, egymás után a 2, 6, 1 és 3 csomópontokat. A 0 csomóponton az előbbi szabálytól némileg eltértünk. Meg kell jegyezni, hogy a megkívánt *határozott* szerkezet elérése céljából, a szerkezet maga aszimmetrikus, ti. az (5–6) rúdnak megfelelő szimmetrikus rúd hiányzik.



5. ábra. Felsőpályás hídszerkezet vizsgálata vízszintes erőre

A szerkezet a 0, 3, 6 és 7 csomópontokon van megtámasztva, és pedig $A = 3$ ponton gömbcsukló, $B = 0$ ponton, továbbá $C = 6$ ponton függőlegesen álló támasztórúd, végül $D = 7$ ponton ferdén álló megtámasztó rúd alkotják a szerkezet megtámasztási rendszerét.

A szerkezetet az 1 jelű csomóponton egyetlen vízszintes, $W = 8 \text{ Mp}$ erő (szélterő) terheli.

Vizsgáljuk meg a tartót kétféle megtámasztási rendszer alapján.

a) Tekintsük a megtámasztás feltételének, hogy B és C megtámasztási pontokon a szerkezetre adódó függőleges megtámasztó erők egyenlők, vagyis $B_y = C_y$.

Fenti feltétel alapján a megtámasztás kényszererői egyértelműen kiszámíthatók. A kiadódó eredmények:

$$\begin{aligned} A_x = D_x &= +4 \text{ Mp} \text{ (+}x \text{ irányú)}, \\ A_y = D_y &= -2 \text{ Mp} \text{ (lehorgonyzó erő)}, A_z = 0, \\ B_y = C_y &= +2 \text{ Mp}. \end{aligned}$$

Fenti feltétellel, tehát avval, hogy $B_y = C_y$, egyszersmind megszabtuk D ponton képzelt megtámasztó rúd irányát is, amely ti. fenti felvétel esetén a vízszinteshez képest

$$\tan \vartheta = 2/4 = 0,5 \quad (\sim 26^\circ 30')$$

irányban fekszik, más szóval keresztülmegy az ábrán Q -val jelzett ponton, vagyis az 1 csomóponton át rajzolt és a szerkezet homloklapjába eső vízszintes egyenesnek a C függőlegessel képzett metszéspontján (5a. ábra).

Fenti adatok birtokában az egyes rúderők egyértelműen meghatározhatók. A meghatározás sorrendje éppen ellenkező a felépítés sorrendjével, vagyis a O csomópontból kiindulva, sorban a 3, 1, 6, 2, 5, 4 és 7 csomópontokat kell feloldani. Ez esetben minden csomópontban legfeljebb 3 ismeretlen rúderőt kell meghatározni. A számítások részleteit mellőzve, a végeredményt a III. táblázat tünteti fel. A táblázat egyszersmind tartalmazza az (V) ellenőrző képlet jobb oldalán szereplő szummát is.

Az (V) ellenőrző képlet bal oldali szummájához legkönnyebben úgy juthatunk, ha O kezdőpontot A pontban vesszük fel. Ebben esetben valamennyi kényszererő irányára bocsátott merőleges egyszersmind az illető kényszererő támadáspontjában metszi a kényszererő hatásvonalát és így valamennyi kényszererő q karja zérussal egyenlő.

Egyedül a W erő marad a szummában, karjának nagysága 6 m és így

$$\sum P_i q_i = 8 \cdot 6 = +48,0 \text{ Mpm},$$

ami a táblázat végeredményével ($-48,16 \text{ Mpm}$), a logarléc számítási pontosságán belül, jól megegyezik.

b) Ugyanezt a szerkezetet, ugyanilyen aktív erő mellett, oldjuk fel azzal a feltételezéssel, hogy D megtámasztási ponton az átadódó reakcióerő iránya vízszintes, vagyis $D_y = 0$.

Ugyanúgy, miként előbb, egyértelműen meghatározhatjuk az összes kényszererőket. Az eredmények:

III. táblázat

Rúd jеле	Rúdhossz l (m)	Rüderők S (Mp)		SI (Mpm)		Horizontális és vertikális túlterhelésként szá- mítva	
		a. eset $B_y=C_y$	b. eset $D_y=0$	a. eset	b. eset	Rüderő S (Mp)	SI (Mpm)
0-1	5.00	+ 3.33	+ 6.67	+ 16.67	+ 33.33	+ 3.33	+ 16.67
0-2	4.00	- 2.67	- 5.33	- 10.66	- 21.33	- 2.67	- 10.66
0-3	6.00	0	0	0	0	0	0
3-2	7.21	- 4.80	- 4.80	- 34.61	- 34.61	- 4.80	- 34.61
3-4	4.00	+ 5.33	+ 8.00	+ 21.33	+ 32.00	+ 5.33	+ 21.33
3-5	5.06	- 3.33	- 6.67	- 16.67	- 33.33	- 3.33	- 16.67
1-6	5.00	+ 3.33	+ 6.67	+ 16.67	+ 33.33	+ 3.33	+ 16.67
1-5	6.00	- 8.00	- 8.00	- 48.00	- 48.00	0	0
1-2	3.00	- 4.00	- 8.00	- 12.00	- 24.00	0	0
2-6	4.00	- 2.67	0	- 10.66	0	- 2.67	- 10.66
2-7	7.21	- 4.80	- 14.37	- 34.61	- 103.61	- 4.80	- 34.61
2-4	6.60	0	0	0	0	0	0
2-5	6.71	+ 8.90	+ 17.90	+ 59.72	+ 120.01	0	0
6-5	7.81	0	- 10.50	0	- 82.01	0	0
6-7	6.00	0	+ 8.00	0	+ 48.00	0	0
4-5	3.00	0	0	0	0	0	0
4-7	4.00	+ 5.33	+ 8.00	+ 21.33	+ 32.00	+ 5.33	+ 21.33
5-7	5.00	- 3.33	6	- 16.67	0	- 3.33	- 16.67
		Σ SI =		- 48.16	- 48.22		- 47.88

$$A_x = +4 \text{ Mp}, D_x = +4 \text{ Mp},$$

$$B_y = +4 \text{ Mp}, C_y = 0,$$

$$A_y = -4 \text{ Mp (lehorgonyzó erő)}, A_z = 0 \text{ (5b. ábra)}.$$

A reakcióerők meghatározása után meghatározhatók az egyes rüderők is. Utóbbiak értékeit ugyancsak a III. táblázat tartalmazza. Ugyanott van kiszámítva az (V) ellenőrző képlet jobb oldali szummája is, erre az esetre.

Az (V) ellenőrző képlet bal oldala, az előző esethez képest, semmiféle változást sem mutat, e szummában ismét csupán W külső erő szerepel, $q = 6 \text{ m}$ kartávolsággal. Vagyis (V) ellenőrző képletünk bal oldala változatlanul $+48,0 \text{ Mpm}$. Evvel szemben a táblázat $-48,22 \text{ Mpm}$ -et eredményez, az eltérés ismét a logarléccel való számítás pontatlanságából adódik.

Érdeemes megfigyelni, hogy az egyes rüderők értékei miképpen változnak D képzelt megtámasztó rúd irányának felvételével kapcsolatban.

A III. táblázatot kiegészítettük a horizontális és vertikális túlterhelés számítási elve alapján nyerhető rüderőkkel is. Megfigyelhető, hogy ez az általánosan alkalmazott számítási módszer a rudak egy részénél az a) esettel azonos rüderő-értékeket szolgáltat (5c., 5d., 5e. ábrák). De az is megállapítható, hogy szemben az a) és b) feltételezésekkel, egyes rudakban, éppen a legna-

gyobb igénybevételt szenvedőkben, ez az eljárás nem ad rúderő-értékeket. Ez a tény azt mutatja, hogy széles hidakon, széles szerkezeteken a túlterhelésalapon való számítás a valóságtól lényegesen eltérhet. Az (V) ellenőrző képlet szummációja azonban ezen utóbbi módszer esetében is változatlan (+48,0 Mpm), amit a III. táblázat utolsó oszlopa mutat ki (-47,88 Mpm).

5. Összefoglalás

A bemutatott számpéldák szerint a térbeli rácsostartó egyes rúdjaiban keletkező rúderők értékei nagymértékben függnnek attól a körülménytől, hogy a tartó, mint térbeli szerkezet, miképpen van megtámasztva, a földhöz kapcsolva, illetve, hogy a megtámasztások okozta kényszererőket miképpen *képzeld el*. Pontos képünk ugyanis ezekről a megtámasztó erőkről általában nincsen. A legsűrűbben alkalmazásra kerülő rendszer: 2 álló- és 2 mozgósaru (a tartó hossz tengelyének irányában gördülő hengerversorral), mint azt 2. alatt kimutattuk, 12-szeresen statikailag határozatlan.

Míg a *belső* statikai határozatlanság feloldására pontos módszerek állnak rendelkezésünkre, addig ennek a *külső* határozatlanságnak feloldására nincs általánosan alkalmazható megoldás. A szokásos elrendezések csakis függőleges terhelés esetében szolgáltatnak hibátlan megoldásokat (a kényszererők pontosan számíthatók), ám általános irányú erőhatások esetén a megtámasztás kényszererői meghatározhatatlanok. A meglehetősen önkényes felvételek fajtái, rendszerei szerint változnak az egyes rúderők értékei is.

Viszonylag keskeny, hosszú szerkezeteken, nagy függőleges terhelést feltételezve, ez a bizonytalanság nem számottevő; a függőleges terhelések okozta hatások mellett a ferde erők fentiek szerinti változása végeredményben nem jelent nagy eltérést.

Rövid, széles szerkezeteken, kis függőleges terhelések mellett azonban ezek a körülmények nem hanyagolhatók el.

Utóbbi szerkezeteken a méretezést a képzelt megtámasztó rudak „veszélyes állása” alapján volna célszerű elvégezni.

Térbeli tartót ferde irányú erők ellenében kizárólag függőleges képzelt rudakkal nem lehet megtámasztani. Ferde vagy részben ferde irányú képzelt rudakkal természetesen lehetséges, ilyen rudak azonban a valóságban nem léteznek. Végeredményben a ferde erőket a saruknál fellépő *csúszó súrlódási erők* veszik fel. Utóbbiak maximumai viszont számíthatók és így a képzelt megtámasztások szélső irányai, tehát a maximális ferdeségű megtámasztó erők is meghatározhatók.

Mindezek a szempontok számításainkat némileg bonyolultabbá teszik. Ezért felette indokolt a fentiekben ismertetett egyszerű ellenőrzési eljárás alkalmazása.