BELSŐÉGÉSŰ MOTOROKHOZ NEMLINEÁRIS ELEMMEL KAPCSOLT RENDSZER TORZIÓS REZGÉSEIRŐL

CSÓKA JÁNOS

GANZ-MÁVAG MOTORFEJLESZTÉSI IRODA

[Beérkezett 1966. április 5-én]

A dolgozat a nemlineáris elemmel ellátott rendszer torziós rezgésszámításánál fellépő nehézségeket hidalja át úgy, hogy a nemlineáris elem rugókarakterisztikáját a harmonikus linearizálás módszere szerint linearizálja. A linearizált rugóállandó kifejezésében a lengési amplitúdót a mozgásegyenletekben, mint ismeretlen mennyiséget szerepelteti. A mozgásegyenletek és — belsőégésű motorok esetén — a gerjesztések ismeretében olyan egyenletet állít fel, amelynek segítségével állandósult lengési állapotban az ismeretlenként szerepeltetett amplitúdót a komplex számsíkon grafikusan meg lehet határozni.

A belsőégésű motorokhoz kapcsolt erőátviteli szerkezeteknél a motor és az erőátviteli rész (sebességváltó, generátor stb.) között — nagyobb teljesítményű egységeknél — mindig alkalmaznak valamilyen nemlineáris karakterisztikájú gépelemet, rendszerint gumidugós tengelykapcsolót, aminek többek között az is a szerepe, hogy a főtengely felől érkező gerjesztő hatásokat csökkentse és az elem mögötti alkatrészeket a káros igénybevételtől megkímélje.

A nemlineáris elemmel ellátott rendszerek torziós rezgéseinek vizsgálata tetemes nehézséggel jár, mert a nemlineáris karakterisztikájú rugót a rendszer vizsgálata nélkül előre megválasztott lineáris karakterisztikájú pótrugóval helyettesíteni nem lehet, mivel nem ismeretes az a tartomány, amelyen belül a lengés végbemegy.

A következőkben a rendszer állandósult torziós rezgéseinek számítására, egy — tudomásunk szerint új, de eredményeit tekintve nem ellenőrzött — közelítő eljárást mutatunk be.

Az eljárás a nemlineáris karakterisztikájú rugót a harmonikus linearizálás [1—3] segítségével linearizálja. A linearizálás során kapott Fourier-sor tagjai közül csupán az alapharmonikusokat használja fel, mert feltételezi, hogy a magasabbrendű tagok csillapítása a rendszer lineáris tagjain nagy, és hatásuk elhanyagolható. A linearizált rugóállandó kifejezésében a lengési amplitúdót, mint ismeretlent szerepelteti és a rendszerre felírt mozgásegyenleteket úgy rendezi, hogy végül — belsőégésű motor esetén — a rendszeradatok és a gerjesztések segítségével az ismeretlenként szerepeltetett amplitúdót meg tudja határozni. Az amplitúdó ismeretében a linearizált rugóállandó számszerűen meghatározható, s így a teljes rendszer számítható.

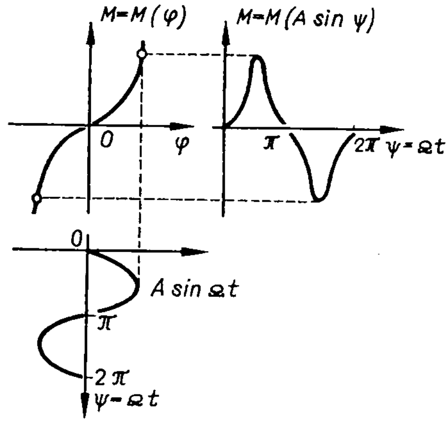
A harmonikus linearizálásnál abból indulunk ki, hogy a nemlineáris elem M nyomatékkarakterisztikája a φ szögelfordulás függvényében ismert (1. ábra).

$$M = M(\varphi). \tag{1}$$

A lengés állandósult állapotában feltételezzük, hogy a nemlineáris elem szögelfordulása

$$\varphi = A \sin \Omega t \tag{2}$$

törvényszerűség szerint változik, ahol A a lengés amplitúdója, Ω pedig egy tetszőlegesen választott szögsebesség.



1. ábra

A φ szögelforduláshoz a nemlineáris elemen $\Omega t = \psi$ bevezetésével — egy

$$M = M(A \sin \psi) \tag{3}$$

nyomatékváltozás tartozik, amelyet Fourier-sorba fejtve, és a sorból csupán az alapharmonikusokat felhasználva, a nyomatékváltozás függvényét az

$$M\,(A \sin \psi) \cong A_F \sin \psi + B_F \cos \psi = y_1 \tag{4}$$

sorral pótoljuk, ahol

$$A_F = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} M\,(A \sin \psi)\cdot \sin \psi \cdot d\psi$$

és

$$B_F = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} M\,(A \sin \psi)\cdot \cos \psi \cdot d\psi\,. \tag{5}$$

A (4) kifejezést átalakítva és a

$$q = \frac{A_F}{A}, \quad \text{ill.} \quad q' = \frac{B_F}{A},$$

valamint a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = p$$

differenciál-operátor jelölést bevezetve

$$y_1 = \frac{A_F}{A} A \sin\psi + \frac{B_F}{A\Omega} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A \sin\psi) =$$

$$= \left(q + \frac{q'}{\Omega} p\right) A \sin\psi = \left(q + \frac{q'}{\Omega} p\right) \cdot \varphi \tag{6}$$

kifejezést kapjuk, ahol

$$q = \frac{q'}{A} p = F \tag{7}$$

a linearizált rugóállandó, amely mint látható, az ismeretlen A amplitúdó függvénye.

Ha például

$$M(\varphi) = m\varphi + n\varphi^3,$$

akkor, mivel $q^1 = 0$, a linearizált rugóállandó, úgy

$$F = q = \frac{m}{\pi A} \int_0^{2\pi} A \sin^2\psi \, \mathrm{d}\psi + \frac{n}{\pi A} \int_0^{2\pi} A^3 \sin^4\psi \, \mathrm{d}\psi = m + \frac{3}{4} n A^2 .$$

A vizsgálat tárgyát képező rendszerben (2. ábra) ismeretlen amplitúdónak a nemlineáris elem gerjesztett oldalán levő i-edik tömeg lengésamplitúdóját választjuk, és erről a tömegről feltételezzük, hogy a (2) egyenlethez hasonlóan a

$$\varphi_i = A_i \sin \Omega t \tag{8}$$

törvényszerűség szerint leng. A továbbiakban a rendszerre felírt mozgásegyenletek segítségével ennek az amplitúdónak az értékét határozzuk meg.

A rendszer egy k-adik ($k = 1, 2, \ldots, i + 1$) elemének mozgásegyenlete, ha Θ_k a tehetetlenségi nyomatékot, k_k a csillapítást, φ_k az elcsavarodást, c_k a rugóállandót és B_k a gerjesztést jelenti, úgy

$$\Theta_k \ddot{\varphi}_k + k_k \dot{\varphi}_k = c_k(\varphi_{k-1} - \varphi_k) - c_{k+1}(\varphi_k - \varphi_{k+1}) + B_k,$$

ami az operátoros jelölésmódot fenntartva és az egyenletet átrendezve

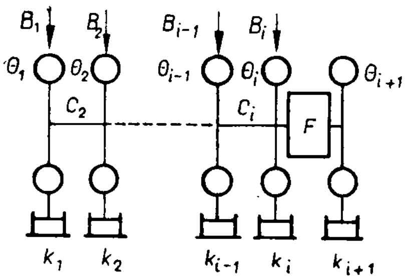
$$- c_k \cdot \varphi_{k-1} + (\Theta_k p^2 + k_k p + c_k + c_{k+1}) \varphi_k - c_{k+1} \cdot \varphi_{k+1} = B_k \tag{9}$$

alakú. Itt $c_1 = 0$, $c_{k+1} = F$, $c_{i+2} = 0$ és $B_{i+1} = 0$.

A jelölésmódból adódó egyszerűsítés miatt az egyes tömegek mozgásegyenletét a (9) alapján írjuk fel a következő módon:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}\varphi_1 + a_{12}\varphi_2 &&= B_1\,,\\
&a_{21}\varphi_1 + a_{22}\varphi_2 + a_{23}\varphi_3 &&= B_2\,,\\
&\quad a_{32}\varphi_2 + a_{33}\varphi_3 + a_{34}\varphi_4 &&= B_3\,,\\
&\qquad \dots\\
&a_{i,i-1}\varphi_{i-1} + (a_{i,i} + F)\varphi_i - F\cdot\varphi_{i+1} &&= B_i\,,\\
&\quad - F\cdot\varphi_i + (a_{i+1,i+1} + F)\varphi_{i+1} &&= 0\ ,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

ahol a_{jk} valamilyen állandó, illetve az állandók és a p operátor ismert függvénye.



2. ábra

A (10) egyenletrendszer olyan tulajdonsággal rendelkezik, hogy ha φ_i-re megoldjuk általánosságban, egy olyan egyenletet kapunk, amelynek egyik oldalán φ_i és egy F és p-től függő, ismert $Q(F, p)$ függvény szorzata, a másik oldalán pedig az egyes gerjesztések és a p operátortól függő ismert $\delta_k(p)$ függvények szorzata áll; tehát

$$Q(F,p)\cdot\varphi_i = \sum_1^i \delta_k(p)\cdot B_k\,. \tag{11}$$

Az állítás igazolására a (10) egyenletből fejezzük ki a φ_i és φ_{i+1} elmozdulásokat és képezzük ezek különbségét. Mint ismeretes

$$\varphi_i - \varphi_{i+1} = \frac{D_i - D_{i+1}}{D} = \frac{\Delta D_{i,i+1}}{D}\,, \tag{12}$$

ahol D a rendszer determinánsa; a D_i és D_{i+1} pedig olyan determinánsok, amelyeket úgy kapunk, hogy a D-ben a φ_i, ill. a φ_{i+1} ismeretlenek együtthatóiból $a_{i,j}$ és a_{i+1} álló oszlopot, a B_k gerjesztések oszlopával helyettesítjük. Csak a $\Delta\, D_{i,i+1}$ determinánskülönbséget vizsgálva a

$$\Delta D_{i,i+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \vdots & 0 & B_1 & 0 \\ a_{21} & \vdots & 0 & B_2 & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \vdots & a_{i,i-1} & B_i & -F \\ & \vdots & 0 & 0 & (a_{i+1,i+1}+F) \end{vmatrix} - $$

$$- \begin{vmatrix} a_{11} & \vdots & 0 & 0 & B_1 \\ a_{21} & \vdots & 0 & 0 & B_2 \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \vdots & a_{i,i-1} & (a_{i,i}+F) & B_i \\ & \vdots & 0 & -F & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \vdots & 0 & B_1 & 0 \\ a_{21} & \vdots & 0 & B_2 & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \vdots & a_{i,i-1} & B_i & a_{i,i} \\ & \vdots & 0 & 0 & a_{i+1,i+1} \end{vmatrix} \tag{13}$$

végeredményt kapjuk. Ugyanis, ha a kivonandó determinánsban az utolsó két oszlopot felcseréljük, a kivonás helyett két olyan determinánst kell összeadnunk, amelyben az utolsó oszlop kivételével, minden elem megegyezik. Az utolsó oszlopban az egyes elemek összevonását elvégezve, kapjuk a (13) alatti eredményt, amiből látható, hogy a determinánsok különbsége nyilván felírható az általános

$$\Delta D_{i,i+1} = \sum_{1}^{i} \delta_k(p) \cdot B_k$$

alakban is, mert az F-et nem tartalmazza.

A (10) egyenletrendszer utolsó egyenletéből azonban

$$\varphi_{i+1} = \frac{F}{a_{i+1,i+1}+F} \cdot \varphi_i , \tag{14}$$

amit a (12) egyenletbe téve, rendezés után azt kapjuk, hogy

$$D\left(1 - \frac{F}{a_{i+1,i+1}+F}\right) \varphi_i = \sum_{1}^{i} \delta_k(p) \cdot B_k .$$

Ez pedig értelemszerűen a (11) egyenlettel azonos. Így az ott kifejtettek fennállnak.

Vizsgáljuk meg ezekután a (11) egyenlet jobb oldalán levő gerjesztéseket. Belsőégésű motoroknál az egyes tömegekre ható B_1, B_2, ... stb. gerjesztések amplitúdói azonosak, csupán a főtengelyalaktól és a gyújtássorrendtől függő, meghatározott fázisszöggel vannak egymástól eltolva. Ha B a gerjesztés amplitúdója, akkor ($k = 1, 2, \ldots, i$)

$$B_k = B \sin(\Omega t + \gamma + \alpha_k) = \\ = B \left[\sin(\Omega t + \gamma) \cdot \cos \alpha_k + \cos(\Omega t + \gamma) \cdot \sin \alpha_k\right], \tag{15}$$

ahol α_k ismert fázisszögek; $\alpha_1 = 0$, és γ a φ_i elcsavarodáshoz viszonyított ismeretlen fázisszög.

Minthogy a gerjesztések kifejezéseiben szereplő koszinuszos tag felírható a

$$\cos(\Omega t + \gamma) = \frac{p}{\Omega} \sin(\Omega t + \gamma)$$

alakban, így

$$\sum_1^i \delta_k(p) \cdot B_k = B \sin \left(\Omega t + \gamma) \cdot (\cos \alpha_k + \frac{p}{\Omega} \sin \alpha_k\right) \cdot \sum_1^i \delta_k(p) = \\ = S(p) \cdot B \sin(\Omega t + \gamma),$$

ahol $S(p)$ a p operátor ismert függvénye.

Tekintve azonban, hogy

$$B \sin(\Omega t + \gamma) = \frac{B}{A_i} \left(\cos \gamma + \frac{p}{\Omega} \sin \gamma\right) \cdot A_i \sin \Omega t = \\ = \frac{B}{A_i} \left(\cos \gamma + \frac{p}{\Omega} \sin \gamma\right) \cdot \varphi_i,$$

azért a (11) egyenlet a

$$\frac{Q(F, p)}{S(p)} \cdot \varphi_i = \frac{B}{A_i} \left(\cos \gamma + \frac{p}{\Omega} \sin \gamma\right) \cdot \varphi_i \tag{16}$$

alakra hozható.

Mivel a rendszernek csupán az állandósult lengési állapotát vizsgáljuk, a (16) egyenletet a szabályozástechnikában használatos frekvenciafüggvénnyé alakítjuk, amihez, mint ismeretes [3, 161. o.] p helyére $j\Omega$-t kell helyettesítenünk.

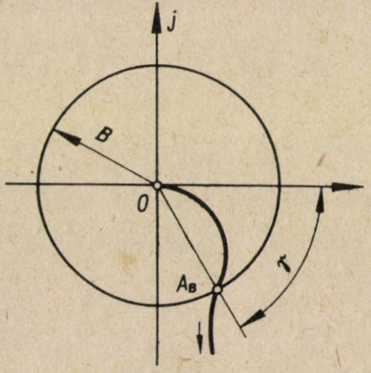
Felhasználva azt, hogy

$$\cos \gamma + j \sin \gamma = e^{j\gamma},$$

a (16) egyenlet végleges alakja φ_i-vel való egyszerűsítés után:

$$\frac{Q(F, j\Omega)}{S(j\Omega)} \cdot A_i = Be^{j\gamma}, \tag{17}$$

ahonnan az ismeretlen A_i amplitúdó és a γ fázisszög meghatározható. Az egyenletet ugyanis komplex számsíkon vizsgálva, jobb oldalon B sugarú körrel ábrázolható. Az egyenlet bal oldalán szereplő függvénybe pedig változó A_i



3. ábra

értéket helyettesítsünk mindaddig, míg a függvény görbéje a kört metszi (3. ábra). A metszéspontnál levő γ_B szög és a metszéspontban szereplő A_B amplitúdó a keresett értékek, amelyek ismeretében a (7)-ből a linearizált rugóállandó számítható, és a rendszer további vizsgálata a szokásos módszerekkel elvégezhető.

IRODALOM

1. *Попов, Э. П.—Палтов:* Приближенные методы исследования автоматических систем. Физматгиз, Москва 1960.
2. Chestnut, H.—Mayer, R.: Servomechanisms and regulating systems design; Vol. II.
3. Raven, F. H.: Az önműködő szabályozás. Műszaki Kiadó, Budapest 1965.