A FESZÜLTSÉGFÜGGVÉNY KERÜLETI FELTÉTELEI TÁBLÁK ÉS HÉJAK SZABAD PEREMSZAKASZÁN

CSONKA PÁL
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA
AZ MTA ÉPÍTÉSTUDOMÁNYI MUNKAKÖZÖSSÉGE, BUDAPEST

[Beérkezett 1966. szeptember 26-án]

A dolgozat membránszerű feszültségi állapotban levő táblák, illetve héjak Airy- illetve Pucher-féle feszültségfüggvényének kerületi feltételeit állapítja meg e szerkezetek teljesen szabad peremszakaszán. A levezetett eredmények tetszőleges megoszló erőkkel (kerületi és tömegerőkkel) terhelt táblákra és tetszőleges (nemcsak az alapsíkra merőleges) megoszló erőkkel terhelt héjakra egyaránt érvényesek.

1. Bevezetés

Szerző egyik előző dolgozatában [1] függélyes megoszló erőkkel terhelt héjak Pucher-féle $F = F(x, y)$ feszültségfüggvényének kerületi feltételeivel foglalkozott. Kimutatta, hogy ez a függvény a héj szabad peremszakaszán a

$$\frac{\partial F}{\partial x} = A\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = B\,, \qquad F = Ax + By + C \tag{1}$$

feltételeknek tartozik megfelelni, ahol A, B és C egy-egy szabad peremszakaszra nézve állandó érték. Ha a héjnak csupán egyetlen egy szabad peremszakasza van, akkor az (1) kerületi feltételek szigoríthatók, nevezetesen előírható, hogy az említett peremszakaszon

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0\,, \qquad F = 0 \tag{2}$$

legyen.

Mindazok a megfontolások, melyek membránhéjak esetében az (1) és (2) képletekre vezettek, membránszerű feszültségi állapotban levő táblák Airy-féle $F = F(x, y)$ feszültségfüggvényére nézve változatlanul megismételhetők, feltéve, hogy a szóban forgó táblák csak peremeiken vannak terhelve. Ezért az (1) és (2) kerületi feltételek értelemszerűen módosítással az említett táblák teljesen szabad peremszakaszára szintén érvényesek.

A jelen tanulmány célja az (1) és (2) képleteknek tetszőleges megoszló erőkkel (peremerőkkel és tömegerőkkel) terhelt táblákra és tetszőleges (nemcsak az alapsíkra merőleges) megoszló erőkkel terhelt héjakra való általánosítása. A levezetendő összefüggések szoros kapcsolatban állanak az Airy-féle feszültségfüggvény fizikai jelentésére vonatkozó, TREFFTZ, E. [2] és SOBRERO, L. [3] által levezetett tételekkel, melyeknek tetszőleges megoszló erőkkel terhelt táblákra és héjakra való módosított alakját FINZI, L. [4] állapította meg. Az alábbiak ezen tételek további általánosítására nyújtanak lehetőséget.

2. Az Airy-féle feszültségfüggvényre vonatkozó kerületi feltételek

A jelen pont keretében tetszőleges erőkkel (peremerőkkel és tömegerőkkel) terhelt sík táblákkal foglalkozunk. Vizsgálatainkat a tábla középsíkjába helyezett $0(x, y)$ koordinátarendszerben végezzük. A táblára ható tömegerők x, y irányú alkotóit a

$$g_x = g_x(x, y)\,, \qquad g_y = g_y(x, y)$$

teherfüggvényekkel jellemezzük.

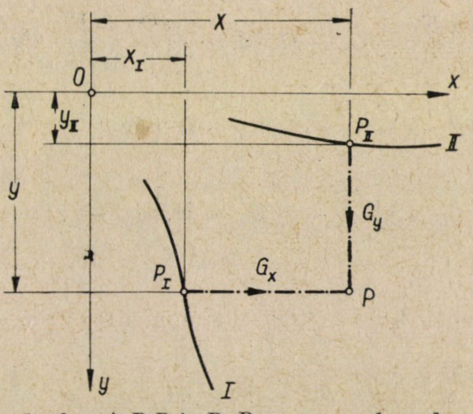
A tábla feszítő erői, mint ismeretes, az

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - G_x \\ n_{xy} = n_{yx} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}\,, \\ n_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - G_y \end{aligned} \tag{3}$$

képletekkel fejezhetők ki, ahol $F = F(x, y)$ az Airy-féle feszültségfüggvény, G_x és G_y jelentése pedig

$$G_x = \int_{x_I}^{x} g_x\, dx\,, \qquad G_y = \int_{y_{II}}^{y} g_y\, dy\,. \tag{4}$$

A fenti képletekben szereplő határozott integrálok felső határa a vizsgálati pont x, illetve y koordinátája, az integrálok alsó határa pedig szabadon választható. Ha az alsó határpontot az 1. ábrán I-gyel, illetve II-vel jelölt görbén vesszük fel, akkor a P pontbeli G_x, illetve G_y értékek számításakor az integrálást a $P_I P$, illetve $P_{II} P$ egyenes szakaszokra kell kiterjesztenünk. Maguk az I, illetve II jelű görbék tetszőlegesen választhatók, azzal a megszorítással azonban, hogy az x, illetve y irányú egyenesek az I, illetve II görbét legfeljebb egy-egy pontban metszhetik.



1. ábra. A $P_I P$ és $P_{II} P$ egyenes szakaszok

Ezek előrebocsátása után jelöljük ki a tábla középsíkjában valamely $P_1 P_2$ görbét, s tekintsük ezen a haladás irányát a P_1 pontból a P_2 pont felé irányulólag pozitívnak. Legyenek a P_1, illetve P_2 pont koordinátái x_1 és y_1, illetve x_2 és y_2, a $P_1 P_2$ görbe egy általános pontjának koordinátái pedig x és y.

Jelöljük a $P_1 P_2$ görbe haladás szerinti bal oldalán levő táblarész által a jobb oldali táblarészre gyakorolt erők R eredőjének x, illetve y irányú alkotóját R_x, illetve R_y betűvel, az R eredőnek a P_2 pontra vonatkoztatott nyomatékát pedig M betűvel, s határozzuk meg ezen mennyiségek értékét.

Az R_x, R_y és M érték számításakor a $P_1 P_2$ vonalszakaszra jutó erők helyett az ezeket egyensúlyozó erőkkel, mégpedig a $P_1 P_2 Q$ táblarészre jutó többi erővel célszerű dolgozni. Ebben az esetben az R_x, R_y és M értékét így fejezhetjük ki:

$$\begin{aligned} R_x &= \int_Q^{P_2} (n_x - H_x)\, dy + \int_Q^{P_1} n_{yx}\, dx\,, \\ R_y &= \int_Q^{P_1} (n_y - H_y)\, dx + \int_Q^{P_2} n_{xy}\, dy\,, \\ M &= \int_Q^{P_2} (y_2 - y)(n_x - H_x)\, dy + \\ &+ \int_Q^{P_1} (x - x_2)(n_y - H_x)\, dx + (y_2 - y_1) \int_Q^{P_1} n_{yx} \cdot dx\,. \end{aligned} \tag{5}$$

A fenti képletekben H_x és H_y jelentése:

$$H_x = \int_{x_2}^{x} g_x \cdot dx\,, \qquad H_y = \int_{y_1}^{y} g_y \cdot dy\,. \tag{6}$$

Az (5) képletek a (3) alattiak behelyettesítésével a következőképp írhatók:

$$\begin{aligned} R_x &= \int_Q^{P_2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - G_x - H_x\right) dy - \int_Q^{P_1} \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}\, dx\,, \\ R_y &= \int_Q^{P_1} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - G_y - H_y\right) dx - \int_Q^{P_2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}\, dy\,, \\ M &= \int_Q^{P_2} (y_2 - y)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - G_x - H_x\right) dy + \\ &\quad + \int_Q^{P_1} (x - x_2)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - G_y - H_y\right) dx - (y_2 - y_1)\int_Q^{P_1} \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}\, dx\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Ha tekintetbe vesszük, hogy a QP_2 vonal mentén, vagyis az $x = x_2$ helyen

$$G_x = \int_{x_I}^{x_2} g_x\, dx\,,$$

a QP_1 vonal mentén, vagyis az $y = y_1$ helyen pedig

$$G_y = \int_{y_{II}}^{y_1} g_y\, dy\,,$$

akkor a (6) alattiak felhasználásával a $G_x + H_x$, illetve a $G_y + H_y$ mennyiségeket így fejezhetjük ki:

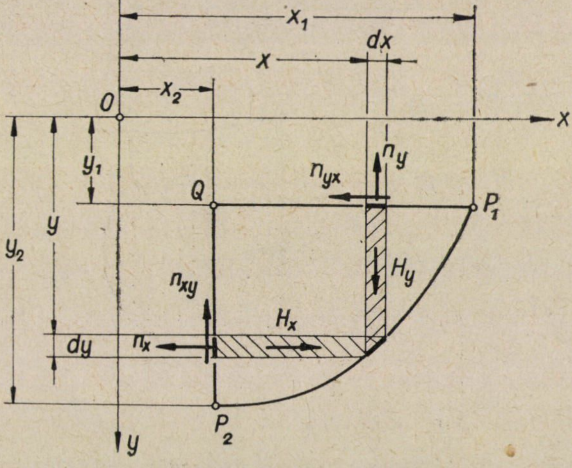
$$\begin{aligned} G_x + H_x &= \int_{x_I}^{x_2} g_x\, dx + \int_{x_2}^{x} g_x\, dx = \int_{x_I}^{x} g_x\, dx\,, \\ G_y + H_y &= \int_{y_{II}}^{y_1} g_y\, dy + \int_{y_1}^{y} g_y\, dy = \int_{y_{II}}^{y} g_y\, dy\,. \end{aligned}$$

Ezen értékeket a (7) képletekbe betéve, a következő képleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} R_x &= \int_Q^{P_2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\, dy - \int_Q^{P_1} \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}\, dx - \int_Q^{P_2}\int_{x_I}^{x} g_x \cdot dx \cdot dy\,, \\ Ry &= \int_Q^{P_1} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\, dx - \int_Q^{P_2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}\, dy - \int_Q^{P_1}\int_{y_{II}}^{y} g_y \cdot dy \cdot dx\,, \\ M &= \int_Q^{P_2} (y_2 - y)\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\, dy + \int_Q^{P_1} (x - x_2)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\, dx - \end{aligned} \tag{8}$$

$$-(y_2-y_1)\int_Q^{P_1}\frac{\partial^2 F}{\partial x\cdot\partial y}dx-\int_Q^{P_2}(y_2-y)\int_{x_{\mathrm{I}}}^{x}g_x\cdot dx\cdot dy-$$

$$-\int_Q^{P_1}(x-x_2)\int_{y_{\mathrm{II}}}^{y}g_y\cdot dy\cdot dx\,.$$



2. ábra. A vizsgált táblarész

A fenti képletekben az

$$\int_Q^{P_2}\int_{x_{\mathrm{I}}}^{x}g_x\cdot dx\cdot dy\equiv R_{\mathrm{I}} \tag{9}$$

kifejezés nem más, mint a 3. ábrán vízszintesen csíkozott $P_1P_2P_2^{\mathrm{I}}P_1^{\mathrm{I}}$ táblarészre jutó x irányú tömegerők R_{I} eredője, az

$$\int_Q^{P_2}(y_2-y)\int_{x_{\mathrm{I}}}^{x}g_x\cdot dx\cdot dy\equiv M_{\mathrm{I}} \tag{10}$$

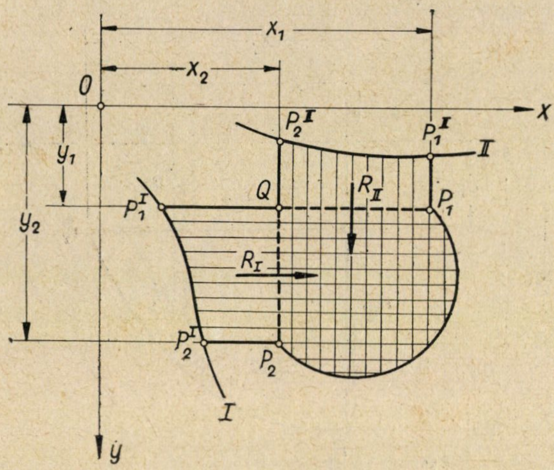
kifejezés pedig ezen R_{I} eredőnek a P_2 pontra felírt M_{I} nyomatéka. Hasonlóképp az

$$\int_Q^{P_1}\int_{y_{\mathrm{II}}}^{y}g_y\cdot dy\cdot dx\equiv R_{\mathrm{II}} \tag{11}$$

kifejezés a 3. ábrán függélyes csíkozással jelzett $P_1P_2P_2^{\mathrm{II}}P_1^{\mathrm{II}}$ táblarészre jutó y irányú tömegerők R_{II} eredőjét, az

$$\int_Q^{P_1}(x-x_2)\int_{y_{\mathrm{II}}}^{y}g_y\cdot dy\cdot dx\equiv M_{\mathrm{II}} \tag{12}$$

kifejezés pedig ezen R_{II} eredőnek a P_2 pontra való nyomatékát jelenti. Az ábrán szereplő I, illetve II jelű görbék, mint említettük, tetszőleges olyan görbék, melyeket az x, illetve y irányú egyenesek legfeljebb egy-egy pontban metszenek.



3. *ábra*. Az R_I és R_{II} eredők

A (8) képletekben szereplő többi integrálkifejezés értéke egyszerű, illetve parciális integrálással határozható meg:

$$\begin{aligned}
&\int_Q^{P_2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\, dy - \int_Q^{P_1} \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}\, dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{P_2} - \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{P_1},\\
&\int_Q^{P_1} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\, dx - \int_Q^{P_2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}\, dy = \left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{P_1} - \left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{P_2},\\
&\int_Q^{P_2} (y_2 - y) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\, dy = y_2 \int_Q^{P_2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\, dy - \int_Q^{P_2} y \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\, dy =\\
&\qquad = - y_2 \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_Q + y_1 \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_Q + [F]_{P_2} - [F]_Q ,\\
&\int_Q^{P_1} (x - x_2) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\, dx = - x_2 \int_Q^{P_1} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\, dx + \int_Q^{P_1} x \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\, dx =\\
&\qquad = - x_2 \left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{P_1} + x_1 \left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{P_1} - [F]_{P_1} + [F]_Q ,\\
&\int_Q^{P_1} \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}\, dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{P_1} - \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_Q .
\end{aligned} \tag{13}$$

Ha az így nyert (9)—(13) kifejezéseket a (8) képletekbe behelyettesítjük, egyszerűsítés után azt találjuk, hogy

$$\begin{aligned} R_x &= \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{P_2} - \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{P_1} - R_{\mathrm{I}} , \\ R_y &= -\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{P_2} + \left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{P_1} - R_{\mathrm{II}} , \\ M &= [F]_{P_2} - [F]_{P_1} - x_2\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{P_1} - y_2\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{P_1} + \\ &+ x_1\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{P_1} + y_1\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{P_1} - M_{\mathrm{I}} - M_{\mathrm{II}} . \end{aligned} \tag{14}$$

Az eddigiekben a P_1P_2 vonalszakasz mindkét végpontját fix helyzetűnek tekintettük. A következőkben csak a P_1 pontot tekintjük fixnek, a P_2 pontot pedig adott görbevonalon pozitív irányban futó pontként kezeljük. Ennek megfelelőleg a továbbiakban P_2 helyett egyszerűen P-t írunk, e pont koordinátáit pedig x_1 és y_1 helyett x és y betűvel jelöljük. Ugyanakkor bevezetjük a

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{P_1} &= \text{const} \equiv A , \\ \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{P_1} &= \text{const} \equiv B , \\ x_1\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{P_1} + y_1\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{P_1} - [F]_{P_1} &= \text{const} \equiv -C \end{aligned}$$

jelöléseket. E módosításokkal a (14) képletek helyett ezeket írhatjuk:

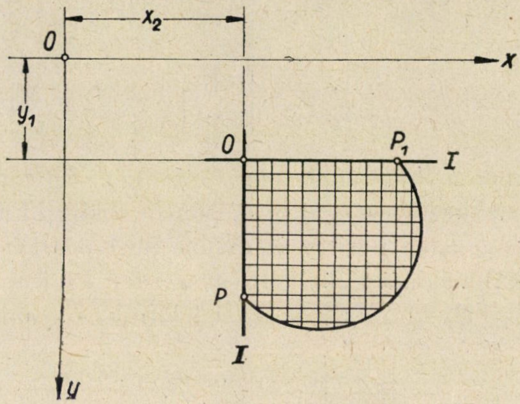
$$\begin{aligned} R_x &= \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{P} - B - R_{\mathrm{I}} , \\ R_y &= -\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{P} + A - R_{\mathrm{II}} , \\ M &= [F]_P - Ax - By - C - M_{\mathrm{I}} - M_{\mathrm{II}} . \end{aligned} \tag{15}$$

Fenti képletek szerint

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{P} &= -R_y - R_{\mathrm{II}} + A , \\ \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{P} &= R_x + R_{\mathrm{I}} + B , \\ [F]_P &= M + M_{\mathrm{I}} + M_{\mathrm{II}} + Ax + By + C , \end{aligned} \tag{16}$$

illetve, ha a feszültségszámítás szempontjából jelentéktelen lineáris tagoktól eltekintünk, akkor

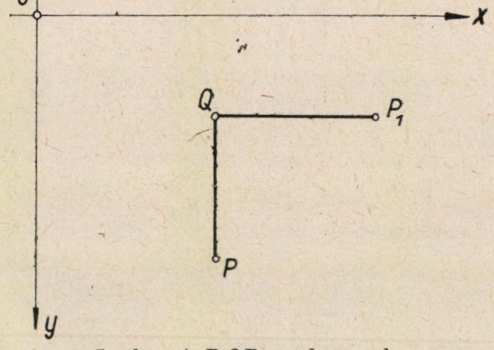
$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_P = -R_y - R_{II}\,,$$
$$\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_P = R_x + R_I\,, \tag{17}$$
$$[F]_P = M + M_I + M_{II}\,.$$



4. *ábra*. A P_1PQ táblarész

Ha az eddigi levezetésekben szereplő *I*, illetve *II* jelű görbék gyanánt az $x = x_2$, illetve $y = y_1$ egyeneseket választjuk (4. ábra), akkor a (17) képletekben az R_I, illetve R_{II} mennyiség a P_1PQ táblarészre ható tömegerők x, illetve y irányú alkotóját, az $M_I + M_{II}$ kifejezés pedig a P_1PQ táblarészre ható tömegerőknek a futó P pontra felírt nyomatékát jelenti.

Természetesen a P_1P_2 görbe maga is tetszőlegesen jelölhető ki. Ha e célra a P_1QP szögletvonalat választjuk (5. ábra), akkor a P_1QP terület egyetlen



5. *ábra*. A P_1QP szegletvonal

vonallá zsugorodik össze. Ilyenkor $R_{\mathrm{I}} = 0$, $R_{\mathrm{II}} = 0$, $M = 0$, s így a (17) képletek a Finzi, L.-féle

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_P = -R_y\,, \qquad \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_P = R_x\,, \qquad [F]_P = M \tag{18}$$

képletekbe [4] mennek át. Ezek a képletek — miként azt FINZI, L. megállapította — a feszültségfüggvény egyszerű fizikai értelmezésére nyújtanak lehetőséget: a feszültségfüggvény P pontbeli x, illetve y szerinti parciális deriváltja — előjeltől eltekintve — a P_1QP szegletvonal egyik oldalára ható belsőerők eredőjének y, illetve x irányú alkotójával egyenlő; a feszültségfüggvény P pontbeli értéke pedig a szegletvonal egyik oldalára ható belső erők nyomatékával azonos.

Érdekes alakot öltenek a (17) képletek abban az esetben is, ha az I és a II jelű görbe céljára magát a P_1P görbét választjuk. Ez esetben ismét

$$R_{\mathrm{I}} = 0\,, \quad R_{\mathrm{II}} = 0\,, \quad M = 0\,,$$

tehát

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_P = -R_y\,, \qquad \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_P = R_x\,, \qquad [F]_P = M\,. \tag{19}$$

Az utóbbi képletek, bár formájukat illetően a Finzi-féle képletekkel azonosak, azoknál tágabb tartalmúak. A (19) képletek szerint ui. a feszültségfüggvény x, illetve y szerinti parciális deriváltja — előjeltől eltekintve — a P_1P görbe egyik oldalára ható belsőerők eredőjének x, illletve y irányú alkotójával egyenlő; a feszültségfüggvény P pontbeli értéke pedig a P_1P görbe egyik oldalára ható belsőerők nyomatékával azonos. Ezek szerint a Finzi-féle tételek nemcsak a P_1QP szegletvonalra, hanem a tetszőleges P_1P görbére is érvényesek, feltéve, hogy az x, illetve y irányú egyenesek a P_1P görbét nem metszik egynél több pontban.

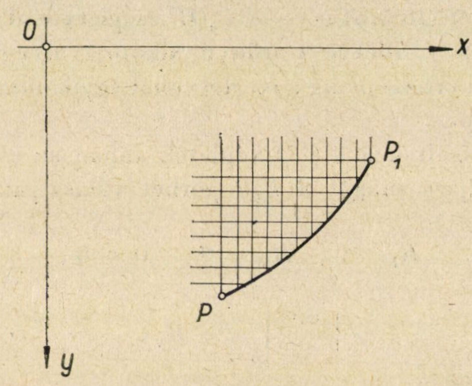
Természetesen, a (19) képletek olyankor is alkalmazhatók, midőn a P_1P görbe a tábla teljesen szabad peremvonala. Ilyenkor a P_1P görbe mentén a táblára semmiféle erő sem hat, tehát

$$R_x = 0\,, \quad R_y = 0\,, \quad M = 0\,,$$

miért is a (19) képletek a következőképp egyszerűsbödnek:

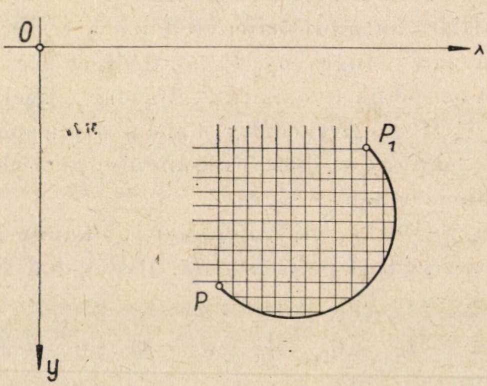
$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_P = 0\,,$$
$$\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_P = 0\,, \qquad (20)$$
$$[F]_P = 0\,.$$

A fenti képletek alakjukra nézve azonosak a csupán peremerőkkel terhelt táblák szabad peremvonalára vonatkozó képletekkel [1], érvényességük azonban tömegerők jelenléte esetében némiképp korlátozott. Ezek a képletek ui. a szabad peremvonalnak csak arra a szakaszára érvényesek, melyet az x, illetve y irányú egyenesek legfeljebb egy-egy pontban metszenek (6. ábra).



6. ábra. A P_1P szabad peremvonal szakaszt az x és az y irányú egyenesek csak egy pontban metszik

Az általánosabb esetben, tehát olyankor, amidőn az x vagy y irányú egyenesek (vagy azok közül egyesek) a P_1P szabad peremvonal szakaszt egynél több pontban metszik (7. ábra), a teljesen szabad peremvonalra vonatkozó kerületi feltételeket a (17) képletekből az



7. ábra. A P_1P szabad peremvonal szakaszt egyes x és y irányú egyenesek két pontban metszik

$$R_x = 0\,, \quad R_y = 0\,, \quad M = 0$$

helyettesítésekkel levezethető következő egyenletek fejezik ki:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_P = -R_{II}\,,$$

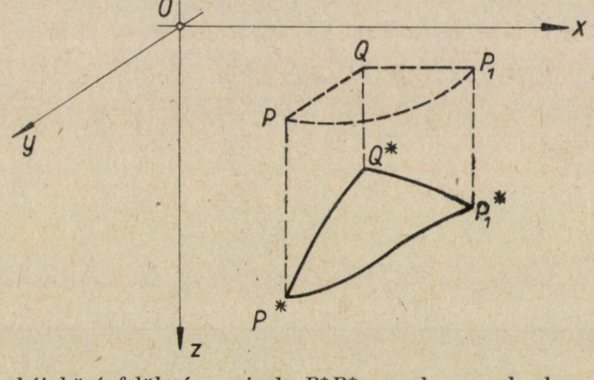
$$\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_P = R_I\,, \tag{21}$$

$$[F]_P = M_I + M_{II}\,.$$

3. A Pucher-féle feszültségfüggvényre vonatkozó kerületi feltételek

A jelen pont keretében azt vizsgáljuk meg, miként lehet a membránhéj teljesen szabad peremszakaszán a Pucher-féle feszültségfüggvény kerületi feltételeit kifejezni, ha a héjra tetszőleges (nemcsak az alapsíkra merőleges) megoszló erők hatnak.

Vizsgálatainkat olyan $0(x, y, z)$ derékszögű koordinátarendszerben végezzük, melynek x és y tengelyei a héj alaprajzi síkjával párhuzamosak. A héjra ható terhek x, y, z irányú alkotóit a héjalaprajz területegységére vonatkoztatott g_x, g_y, g_z fajlagos teherértékekkel, a héj belsőerőit pedig az n_x, n_{xy}, n_{yx}, n_y redukált feszítőerőkkel jellemezzük. Utóbbiak ugyanolyan kapcsolatban állanak a héj Pucher-féle $F = F(x, y)$ feszültségfüggvényével, mint a tetszőleges erőkkel terhelt táblák feszítőerői az Airy-féle $F = F(x, y)$ feszültségfüggvénnyel. Ebből az azonosságból következik, hogy az előző pontban levezetett tételek értelemszerű módosítással membránhéjakra is érvényesek. Ez esetben, természetesen, a P_1P vonal a héj középfelületére rajzolt $P_1^*P^*$ vonal alaprajzi vetületét jelenti (8. ábra), a képletekben szereplő erőkön és nyomatékokon pedig a vetületi erőket és azok nyomatékát kell érteni.



8. ábra. A héj középfelületére rajzolt $P_1^*P^*$ vonal s annak alaprajzi vetülete

IRODALOM

1. CSONKA, P.: Membrane Shells with Perfectly Free Edges. *Acta Techn. Hung.* **40** (1962), 151—167.
2. TREFFTZ, E.: Mathematische Elastizitätstheorie; Handbuch der Physik, VI. Julius Springer, Berlin 1928.
3. SOBRERO, L.: Del significato meccanico della funzione di Airy. *Rendiconti dell'Accademia Naz dei Lincei* 21 (1935); Ricerche di Ingegneria 3 (1935).
4. FINZI, L.: Sulle equazioni di Pucher nell'equilibrio delle strutture a guscio. Instituto di Scienza delle Construzioni del Politecnico di Milano, Publicazione No 42. Estratto dai *Rendiconti Classe di Scienze* 88 (1955).