AZ EGYENESTENGELYŰ KÖRKERESZTMETSZETŰ RUGALMAS RÚD CSAVARÁS OKOZTA KIHAJLÁSA

BARTA JÓZSEF
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett 1966. november 17-én]

Szerző a címben megjelölt feladat kidolgozása kapcsán felhívja a figyelmet arra, hogy a kihajlási feladatok megoldásánál a statikai módszer még egyszerű esetekben sem vezet mindig helyes eredményre. A statikai módszerrel nyert eredmény helyességét kinetikai módszerrel ellenőrzi.

Az alábbi fejtegetések egyenestengelyű körkeresztmetszetű rugalmas rúdra vonatkoznak. Feltesszük, hogy a teher (vagyis a rúdra működő aktív erők rendszere) olyan erőpár, mely a rúd végére működik és vektora a nyugalmi helyzetben is (pl. 1a. és 2a. ábra) és a kilengett helyzetben is (pl. 1b. és 2b. ábra) a véglapok A és B középpontjait összekötő egyenesbe esik. Az M pozitív skaláris jelentése e vektor nagyságát, M_k pedig azt a határt, amely azzal van jellemezve, hogy minden M_k-nál kisebb M esetében az AB egyenessel jellemzett nyugalmi helyzet stabilis. M_k tehát az ún. *kritikus csavaró nyomaték,* más szóval a kihajlási csavaró nyomaték. Felmerül a kérdés: M_k mekkora?

Ezt a kérdést az 1. ábrán feltüntetett esetben az irodalom már tárgyalta [1] és arra az eredményre jutott, hogy

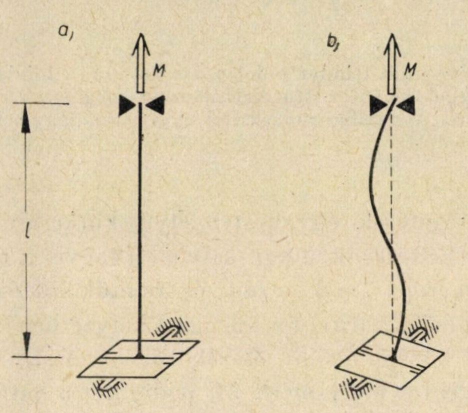
$$M_k = \frac{2\pi EI}{l}, \tag{1}$$

ahol EI a rúd hajlítási merevsége. Az (1) képlet levezetése azonban *statikai* módszerrel történt. Ezért fel kell vetni a kérdést: Jogos volt-e a statikai módszer alkalmazása?

Ennek a kérdésnek az eldöntésére a kinetikai módszer [2] használható fel. E módszer alkalmazásakor nemcsak a terhelésre, hanem arra is figyelemmel kell lenni, hogy az alakzat miképpen van megtámasztva. Ha a rúd az 1. ábra szerint van terhelve és megtámasztva (mindkét végén van megtámasztva), akkor TROESCH megállapítása szerint [3] a kinetikai módszer is az (1) eredményre vezet. — Az 1. ábrán feltüntetett terhelési és megtámasztási esetben tehát a statikai módszer helyes eredményre vezetett.

Most vegyük szemügyre a 2. ábrán feltüntetett terhelési és megtámasztási esetet (a rúd alsó vége befogott, a felső vége szabad). Feltesszük a kérdést, vajon a kinetikai módszer a 2. ábrán feltüntetett terhelési és megtámasztási esetben is az (1) eredményre vezet-e?

E kérdés megválaszolása végett a kinetikai módszert a következőképpen alkalmazzuk. Valamely eléggé kicsiny zavarás (kezdeti kilengés, kezdeti sebesség) okozta mozgás jellemzésére szolgáljanak az $u(z, t)$ és $v(z, t)$ elmozdulás-komponensek (2b. ábra). x, y, z a derékszögű koordinátákat, t az időt jelentik. A z irányú elmozduláskomponens mint magasabbrendű kicsiny mennyiség a szóban levő stabilitási feladatnál nem jut szerephez. A meggörbült rúdtengely, vagyis a rugalmas vonal differenciálegyenletei



1. ábra

$$EIu_{zz}(z,t) = \frac{v(l,t)}{l} M - \int_z^l (\zeta - z)\, u_{tt}(\zeta, t)\, m d\zeta\,, \tag{2}$$

$$EIv_{zz}(z,t) = -\frac{u(l,t)}{l} M - \int_z^l (\zeta - z)\, v_{tt}(\zeta, t)\, m d\zeta\,, \tag{3}$$

ahol m a rúdhosszra vonatkoztatott tömeg, $-u_{tt}(\zeta, t) m d\zeta$ és $-v_{tt}(\zeta, t) m d\zeta$ az elemi tehetetlenségi erők. A $w(z, t)$ komplex elmozdulásfüggvény legyen a $w = u + iv$ képlettel definiálva, ahol z valós és most is a függőleges irányú koordinátát jelenti (2. ábra). Így a (2) és (3) egyenletekből az

$$EIw_{zz}(z,t) = -i\frac{w(l,t)}{l} M - \int_z^l (\zeta - z)\, w_{tt}(\zeta, t)\, m d\zeta \tag{4}$$

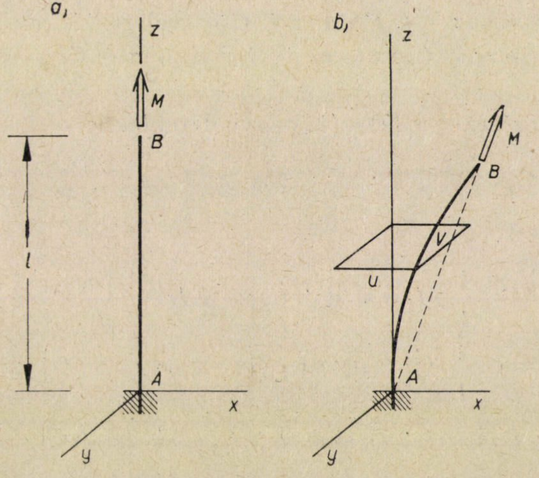
egyenlet következik.

Vizsgáljuk meg, hogy a komplex elmozdulásfüggvény lehet-e

$$w(z, t) = W(z) \sin(\omega t + \psi) \tag{5}$$

alakú, ahol ω és ψ valós állandók. E vizsgálatot úgy végezzük el, hogy megnézzük, mire vezet a számítás, ha az (5) képletből indulunk ki. Helyettesítsük tehát (5)-öt (4)-be. Ily módon az

$$EIW_{zz}(z) = -i\frac{W(l)}{l}M + m\omega^2 \int_z^l (\zeta - z)\, W(\zeta)\, d\zeta \tag{6}$$



2. *ábra.*

egyenlet adódik, amiből differenciálással az

$$EIW_{zzz}(z) = -m\omega^2 \int_z^l W(\zeta)\, d\zeta\,, \tag{7}$$

majd újbóli differenciálással az

$$EIW_{zzzz}(z) = m\omega^2 W(z) \tag{8}$$

egyenleteket kapjuk. Az (5) feltevésből tehát a (8) differenciálegyenlet és a

$$W(0) = 0\,, \tag{9}$$

$$W_z(0) = 0\,, \tag{10}$$

$$EIW_{zz}(l) = -i\frac{W(l)}{l}M\,, \tag{11}$$

$$W_{zzz}(l) = 0 \tag{12}$$

peremfeltételek következnek. A (8) differenciálegyenlet általános megoldása

$$W = C_1 \cos rz + C_2 \sin rz + C_3 \cosh rz + C_4 \sinh rz \,, \tag{13}$$

$$\left(r = |\sqrt{\omega}| \cdot \left| \sqrt[4]{\frac{m}{EI}} \right| \right).$$

Következésképpen

$$W_z = -C_1 r \sin rz + C_2 r \cos rz + C_3 r \sinh rz + C_4 r \cosh rz \,, \tag{14}$$
$$W_{zz} = -C_1 r^2 \cos rz - C_2 r^2 \sin rz + C_3 r^2 \cosh rz + C_4 r^2 \sinh rz \,, \tag{15}$$
$$W_{zzz} = C_1 r^3 \sin rz - C_2 r^3 \cos rz + C_3 r^3 \sinh rz + C_4 r^3 \cosh rz \,. \tag{16}$$

A (13)—(16) kifejezéseket a (9)—(12) egyenletekbe helyettesítvén, a

$$\begin{aligned}
&C_1 + C_3 = 0 \,, \\
&C_2 + C_4 = 0 \,, \\
&C_1 \left(-EIr^2 + \frac{i}{l} M \right) \cos rl + C_2 \left(-EIr^2 + \frac{i}{l} M \right) \sin rl \\
+ &C_3 \left(EIr^2 + \frac{i}{l} M \right) \cosh rl + C_4 \left(EIr^2 + \frac{i}{l} M \right) \sinh rl = 0, \\
&C_1 \sin rl - C_2 \cos rl + C_3 \sinh rl + C_4 \cosh rl = 0
\end{aligned}$$

egyenleteket kapjuk. Ez a négy egyenlet a C_1, C_2, C_3, C_4 állandókra nézve homogén lineáris. Minthogy a $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ esetet már eleve kizárhatjuk, a négy egyenlet determinánsa zérus tartozik lenni, azaz

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
\varrho \cos rl & \varrho \sin rl & \sigma \cosh rl & \sigma \sinh rl \\
\sin rl & -\cos rl & \sinh rl & \cosh rl
\end{vmatrix} = 0 \,,$$

$$\left(\varrho = -EIr^2 + \frac{i}{l} M \,, \quad \sigma = EIr^2 + \frac{i}{l} M \right).$$

Kifejtvén a determinánst, az egyenlet

$$EIr^2 (1 + \cos rl \cosh rl) + i \frac{M}{l} \sin rl \cdot \sinh rl = 0$$

alakban jelenik meg. Ebből a komplex egyenletből az

$$1 + \cos rl \cdot \cosh rl = 0 \,, \tag{17}$$

$$\sin rl \cdot \sinh rl = 0\,, \tag{18}$$

$$\left(r = |\sqrt{\omega}| \cdot \left|\sqrt[4]{\frac{m}{EI}}\right|\right)$$

valós egyenletek következnek. A (17) és (18) egyenletek ellentmondanak egymásnak, mert nem létezik olyan valós ω érték, amely a (17) egyenletet is és a (18) egyenletet is kielégíti.

Az (5) feltevés tehát ellentmondásra vezetett, vagyis (5) alakú komplex elmozdulásfüggvény nem lehetséges. Ez azt jelenti, hogy van eléggé kicsiny zavarás okozta olyan kilengés, amely nem marad eléggé kicsiny. Más szóval, a 2. ábrán feltüntetett terhelési és megtámasztási esetben az AB egyenessel jellemzett nyugalmi helyzet a zérustól különböző M hatása alatt instabilis, s így erre az esetre a statikai módszerrel levezetett (1) képlet nem alkalmazható.

A tárgyalt eset jó példa arra, hogy kihajlási feladatok megoldásakor a statikai módszer még egyszerű esetekben sem vezet mindig helyes eredményre.

Fenti fejtegetéseink nem vonatkoznak olyan esetekre, amelyekben az EI_x és EI_y hajlítási merevségek egymástól különböznek vagy a súrlódás is szerephez jut, avagy plasztikus jelenség is fellép.

IRODALOM

1. Csonka, P.: Az egyenestengelyű körkeresztmetszetű rúd csavarás okozta kihajlása. *MTA VI. Oszt. Közl.* **37** (1966), 218.
2. Bolotin, V. V.: Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability. Pergamon Press, Oxford—London—New York—Paris 1963. (E műben számos irodalmi utalás található.)
3. Troesch, A.: Stabilitätsprobleme bei tordierten Stäben und Wellen. *Ing. Arch.* **20** (1952), 258.