

KÖRFURATTAL BÍRÓ VASTAGFALÚ PRIZMATIKUS RUDAK CSAVARÁSA

CSONKA PÁL
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA
AZ MTA ÉPÍTÉSTUDOMÁNYI MUNKAKÖZÖSSÉGE, BUDAPEST

[Beérkezett 1967. február 15-én]

A dolgozat körfurattal bíró rugalmas anyagú prizmatikus rudak tiszta csavarásával foglalkozik; módszert mutat be e rudak csavarási feszültségfüggvényének közelítő előállítására, s azokat a különleges eseteket tanulmányozza, melyekben a rúdkeresztmetszet valamelyik feszültségi vonala önmagát metsző görbe.

1. Bevezetés

A tiszta csavarásra igénybe vett rugalmas anyagú prizmatikus rudak keresztmetszetén a nyíró feszültségek irányát jelző ún. *feszültségi vonalak* általában nem metszik sem egymást, sem a keresztmetszet határoló vonalát. Egyes esetekben — így konkáv, illetve üreges keresztmetszetek esetében — előfordulhat azonban, hogy egyes feszültségi vonalak elágaznak, sőt az is lehetséges, hogy egyes feszültségi vonalak metszik a keresztmetszet határoló vonalát. Üreges keresztmetszetek esetében a keresztmetszet belső határoló vonalát metsző feszültségi vonalakat *választóvonalaknak* nevezzük.

Választóvonal létrejöttének lehetőségére egy körfurattal bíró ellipszis keresztmetszetű rúd csavarásproblémájának tárgyalásakor szerző egyik korábbi dolgozatában már rámutatott [1]. Ugyanakkor közelítő eljárást ismertetett körfurattal bíró vastagfalú keresztmetszetek feszültségfüggvényének előállítására is. A jelen dolgozat célja az említett eljárás pontosságának fokozása, továbbá a körüreg határolóvonalát metsző választóvonal alakjának és keletkezési feltételeinek tanulmányozása.

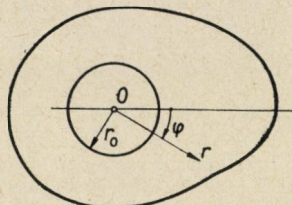
2. Alapösszefüggések

Vizsgálatainkat a rúdtengelyre merőleges síkban fekvő $O(r, \varphi)$ poláris koordinátarendszerben végezzük (1. ábra). E koordinátarendszer kezdőpontja a keresztmetszet körüregének középpontjával esik egybe. A körüreg határvonalának sugara r_0 .

Tárgyalásunkat a rugalmasságtannak a tiszta csavarásra vonatkozó ismert elméletére alapozzuk. Ezen elmélet szerint a csavarási probléma meg-

oldása egy olyan $\Psi = \Psi(r, \varphi)$ függvénynek — az ún. feszültségfüggvénynek — a meghatározására vezethető vissza, mely a keresztmetszet minden pontjában megfelel a

$$\Delta \Psi = -2, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (1)$$



1. ábra. Az $O(r, \varphi)$ koordináta-rendszer

differenciálegyenletnek [2], a körüreg kerületén a

$$\Psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial r} d\varphi = -2\pi r_0 \quad (2)$$

feltételeket teljesíti, a keresztmetszet külső határvonalán pedig állandó értékű. A feszültségi vonalak mentén $\Psi = \text{konst.}$

3. A feszültségfüggvény

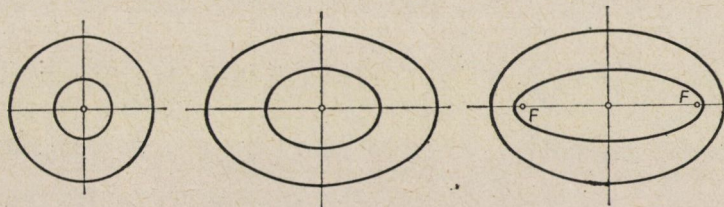
A csavarási probléma feszültségfüggvénye csak egyes egyszerű esetekben fejezhető ki véges, zárt alakban, miért is pontos megoldás helyett általában különféle közelítő eljárásokra, főként numerikus módszerek alkalmazására vagyunk utalva. Az egyébként is fennforgó nehézségek még sokszorosan fokozódnak üreges keresztmetszetek esetében. Véges, zárt alakú megoldás mindössze a körgyűrű keresztmetszetre, a koaxiális helyzetű hasonló ellipszisekkel határolt gyűrű keresztmetszetre, valamint a konfokális ellipszisekkel határolt keresztmetszetre ismeretes (2. ábra).

Körüreggel bíró vastagfalú keresztmetszetek feszültségfüggvényének előállítására — zárt alakú megoldás hiányában — szerző [1] közelítő eljárást dolgozott ki. Eljárása feltételezi, hogy az üreges keresztmetszet külső határoló görbéjével azonos külső határoló görbével bíró teli keresztmetszet feszültségfüggvénye ismeretes. Ha ez utóbbit

$$\Psi = -\frac{r^2}{2} + \sum_n \frac{r_0^{2-n} r^n}{2n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad (3)$$

alakra hozzuk, akkor a körüreggel bíró, de a teli keresztmetszet határoló vonalával azonos külső határolású vastag falu üreges keresztmetszet közelítő feszültségfüggvénye

$$\Psi = -\frac{r^2}{r} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + \sum_n \frac{r_0^{2-n} r^n}{2n} \left(1 - \frac{r_0^{2n}}{r^{2n}}\right) (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (4)$$



2. ábra. Zárt alakban felírható feszültségfüggvénnyel bíró üreges keresztmetszetek

Az alábbiakban a körüreggel bíró vastagfalú keresztmetszetek feszültségfüggvényének közelítő előállítására a (4) sor helyett a hozzá hasonló alakú

$$\Psi = -\frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + \sum_n \frac{r_0^{2-n} r^n}{2n} \left(1 - \frac{r_0^{2n}}{r^{2n}}\right) (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) \quad (5)$$

sorot fogjuk alkalmazni, mely nyilván kielégíti az (1) és (2) egyenleteket. E sorban a C_n és D_n együtthatók szabadon választhatók (tehát függetlenek a (3) képlet A_n és B_n együtthatóitól). Alkalmas C_n és D_n értékeket választván, az (5) kifejezés már kevés taggal is általában jól közelít. A közelítés még olyankor is kielégítő lehet, amidőn — mint pl. központos körüreggel bíró szabályos háromszögkeresztmetszet esetében [3] — a (4) sor konvergenciája nincs is biztosítva.

4. A választó vonal

Annak megállapítására, hogy valamely körüreggel bíró keresztmetszeten keletkezik-e választóvonal, vagyis az $r = r_0$ kört metsző feszültségi vonal, vizsgáljuk meg, hogy a $\Psi = 0$ feltétel csupán az $r = r_0$ kör mentén teljesedik-e, vagy egyebütt is. E célból emeljük ki az (5) kifejezésben az első tagot:

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \cdot \left[-1 + \frac{r_0}{r} (C_1 \cos \varphi + D_1 \sin \varphi) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) (C_2 \cos 2\varphi + D_2 \sin 2\varphi) + \\ & + \frac{r}{3r_0} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0^4}{r^4}\right) (C_3 \cos 3\varphi + D_3 \sin 3\varphi) + \\ & \left. + \frac{r^2}{4r_0^2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0^4}{r^4} + \frac{r_0^6}{r^6}\right) (C_4 \cos 4\varphi + D_4 \sin 4\varphi) + \dots \right]. \quad (6) \end{aligned}$$

Mint látható, ahhoz, hogy a $\Psi = 0$ feltétel az $r = r_0$ körön felül még egyéb helyeken is teljessédjék, az szükséges, hogy

$$\begin{aligned}
 & -1 + \frac{r_0}{r} (C_1 \cos \varphi + D_1 \sin \varphi) + \\
 & + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) (C_2 \cos 2\varphi + D_2 \sin 2\varphi) + \\
 & + \frac{r}{3r_0} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0^4}{r^4} \right) (C_3 \cos 3\varphi + D_3 \sin 3\varphi) + \\
 & + \frac{r^2}{4r_0^2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0^4}{r^4} + \frac{r_0^6}{r^6} \right) (C_4 \cos 4\varphi + D_4 \sin 4\varphi) + \dots = 0 \quad (7)
 \end{aligned}$$

legyen. Ha a (7) egyenlet jellemezte görbe metszi az $r = r_0$ kört, akkor a szóban forgó görbe: választóvonal.

5. Egyszeresen szimmetrikus alakzatok

E cikkely keretében a (6) képlettel jellemzett keresztmetszetek különleges eseteként a

$$\Psi = \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \left(-1 + \frac{C_1 r_0}{r} \cos \varphi \right) \quad (8)$$

feszültségfüggvénynek megfelelő egyszerűen szimmetrikus keresztmetszetekkel s az azokon esetleg létrejövő választóvonalal foglalkozunk.

5.1. A választóvonal alakja

A tárgyalandó esetben a választóvonal (7) alatti egyenlete

$$-1 + \frac{C_1 r_0}{r} \cos \varphi = 0,$$

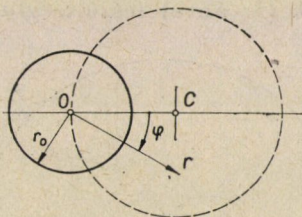
illetve

$$r = C_1 r_0 \cos \varphi \quad (9)$$

alakban írható. A fenti egyenlet, mint látható, az O kezdőponton átmenő $C_1 r_0/2$ sugarú olyan kör egyenlete, melynek C középpontja a $\varphi = 0$ egyenesen van. A szóban forgó kör csak akkor metszi az $r = r_0$ kört, tehát akkor alkot ténylegesen választóvonalat, ha $|C_1| > 1$.

A választóvonalnak a $\varphi = 0$ sugárhoz képest elfoglalt helyzete C_1 előjelétől függ. Ha C_1 pozitív, a választóvonal a 3. ábrán feltüntetett módon

helyezkedik el. Ha C_1 negatív, a választóvonal 180° -kal elfordított helyzetet foglal el.

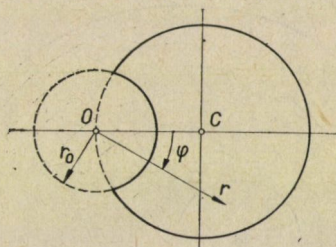


3. ábra. A körüreg és a választóvonal viszonylagos helyzete

5.2. Keresztmetszet alakok

Az alábbiakban a (8) alatti feszültségfüggvénnyel jellemzett keresztmetszetek háromféle típusával foglalkozunk.

Első típus. Ebbe a csoportba a két körívvel határolt *sarló alakú keresztmetszetek* tartoznak (4. ábra). A két körív egyikének középpontja a másik körív kerületén fekszik. Az efféle keresztmetszetek határoló vonalának és feszültségi vonalainak egyenlete a (8) alattiak figyelembevételével



4. ábra. Sarló alakú keresztmetszet

$$(r^2 - r_0^2) \left(-1 + \frac{C_1 r_0}{r} \cos \varphi \right) = K r_0^2, \quad (10)$$

illetve

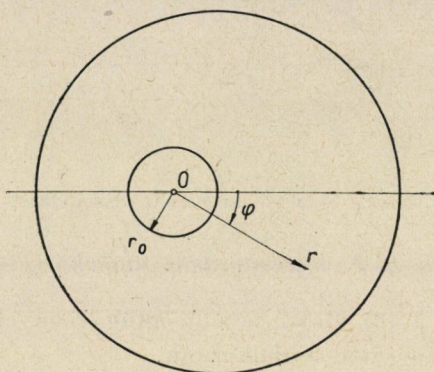
$$\cos \varphi = \frac{r}{C r_0} \left(1 + \frac{K r_0^2}{r^2 - r_0^2} \right), \quad (11)$$

ahol K a szóban forgó vonal mentén állandó. A keresztmetszet belső határoló vonalához $K = 0$, a feszültségi vonalához $K > 0$ érték tartozik.

Második típus. Ebbe a csoportba a *külpontos körüreggel bíró körszerű keresztmetszetek* tartoznak (5. ábra). Ezek határoló vonalainak, illetve feszültségi vonalainak egyenlete ugyanolyan alakú, mint az első típusú keresztmetszeteké. Különbség mindössze az, hogy ez esetben a választóvonalon

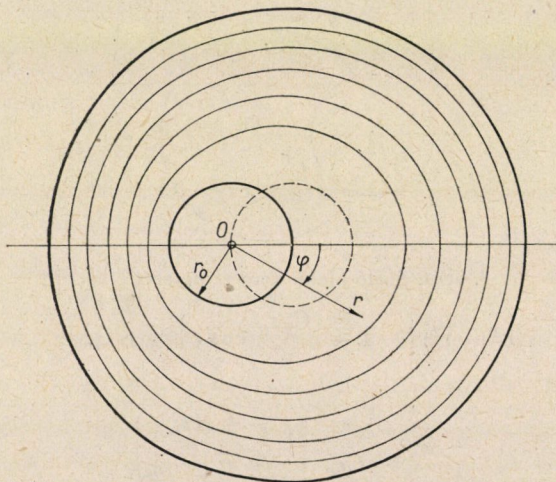
kívül fekvő keresztmetszetrészeken (6. ábra) a feszültségvonalak egyenletében $K < 0$.

A (11) képletet célszerűen felhasználhatjuk *külpontos körüreggel bíró vastagfalú körkeresztmetszetek* (7. ábra) feszültségfüggvényének közelítő elő-



5. ábra. Külpontos körüreggel bíró körszerű keresztmetszet

állítására. Ily esetekben a (11) képletben szereplő C_1 és K paraméterek értékét két illesztési feltételből határozhatjuk meg, előírván, hogy a (11) képlettel



6. ábra. Külpontos körüreggel bíró körszerű keresztmetszet feszültségi vonalai

jellemzett görbe az adott keresztmetszet célszerűen választott két kerületi pontján menjen át. Illesztési pontokul vagy a szimmetriatengelyen fekvő A és B pontot (8a. ábra), vagy a $\varphi = \pi/4$, illetve $\varphi = 3\pi/4$ sugáron fekvő C , illetve D pontot (8b. ábra) célszerű választani. A C_1 paraméter értéke mindkét esetben azonos,

$$C_1 = \frac{2e(R^2 - e^2)}{r_0(R^2 - r_0^2 - e^2)},$$

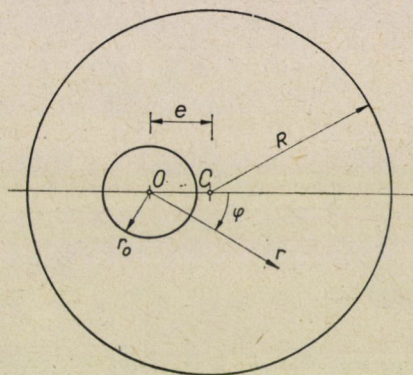
viszont a K paraméter értéke az első esetben

$$K = - \frac{(R^2 - e^2)^2 - r_0^2(2R^2 - r_0^2 - 2e^2)}{r_0^2(R^2 - r_0^2 - e^2)},$$

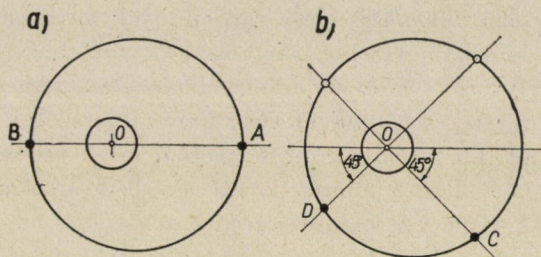
a második esetben pedig

$$K = - \frac{(R^2 - e^2)^2 - r_0^2(2R^2 - r_0^2)}{r_0^2(R^2 - r_0^2 - e^2)}.$$

A két illesztő eljárás közül a második vezet pontosabb eredményre.



7. ábra. Körkeresztmetszet külpontos körüreggel

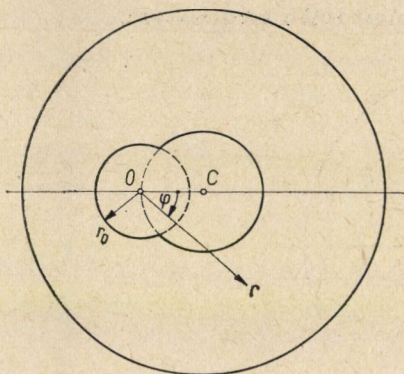


8. ábra. Az illesztési pontok kijelölése

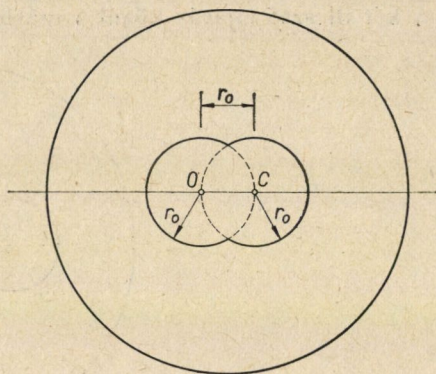
A javasolt eljárás pontosságának szemléltetésére az $R = 4r_0$, $e = r_0$ esetre mindkét eljárással kiszámítottuk a radiusvektorok pontos és közelítő értékét az illesztési pontokhoz tartozó központi szögek felezőjében. A legnagyobb hiba ui. ezek környezetében várható. Az első eljárás esetében a

$\varphi = r/2$ központi szöghöz tartozó rádiuszvektor a pontos $r = 3,873 r_0$ helyett $r = 3,836 r_0$ értékre adódott, tehát a viszonylagos hiba $\Delta r/r = -0,0096$ volt. A második eljárással a $\varphi = 0, \varphi = \pi/2, \varphi = \pi$ központi szöghöz tartozó rádiuszvektorra a pontos $r = 5r_0, r = 3,8730 r_0, r = 3r_0$ érték helyett az $r \doteq 5,0183 r_0, r = 3,8545 r_0, r = 3,0170 r_0$ értéket kaptuk, tehát a viszonylagos hiba csupán $\Delta r/r = +0,0037, \Delta r/r = -0,0048, \Delta r/r = +0,0057$ volt.

Harmadik típus. Az ide sorolt keresztmetszetek csak a keresztmetszeti üreg alakjában térnek el a második típusba tartozó keresztmetszetektől (9. ábra). Ez esetben ui. az üreg határvonalát az r_0 sugarú kör és a $C_1/2$ sugarú választóvonal egy vagy két szakasza alkotja. E keresztmetszetek feszültségi vonalai ugyanolyan alakúak, mint a neki megfelelő második típusú keresztmetszetek feszültségi vonalai.



9. ábra. Körszerű keresztmetszet két körív határolta üreggel



10. ábra. Körszerű keresztmetszet két azonos körív határolta szimmetrikus elhelyezkedésű üreggel

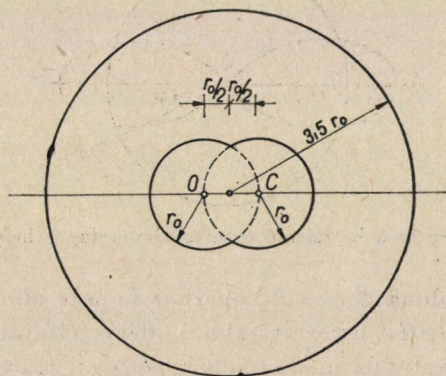
Mint ide tartozó *különleges esetet* megemlítjük a 10. ábrán feltüntetett harmadik típusú keresztmetszetet, melyen a körfurat és a választóvonal azonos alakú és helyzetű, s mint ilyen, egymással felcserélhető. Ez a keresztmetszet — bár az egyszerűen szimmetrikus keresztmetszetek közt említjük — kétszeresen szimmetrikus elrendezésű. A szóban forgó különleges esetben az előzőleg említett két illesztő eljárás közül az elsőt alkalmazva, az $e = r_0$ helyettesítéssel a C_1 , illetve K paraméterre a

$$C_1 = \frac{2(R^2 - r_0^2)}{R^2 - 2r_0^2}, \quad K = \frac{R^2 - 2r_0^2}{r_0^2}$$

értéket kapjuk.

Ezt az eljárást a 11. ábrán feltüntetett keresztmetszetre alkalmazva azt találtuk, hogy a keresztmetszet külső határoló vonala csak jelentéktelenül tér el az $R = 3,5r_0$ sugarú körtől. A külső határoló görbének a függőleges

szimmetriatengelybe eső pontja *ui.* $y = 3,5r_0$ helyett $y = 3,487r_0$ távolságban van a vízszintes szimmetriatengelytől, tehát a viszonylagos méreteltérés $\Delta y/y = -0,0037$.



11. ábra. Körkeresztmetszet két azonos körív határolta szimmetrikus elhelyezkedésű üreggel

6. Kétszeresen szimmetrikus alakzatok

E cikkelyben a (6) képlettel jellemzett alakzatok közül a

$$\Psi = \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \left[-1 + \frac{C_2}{2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos 2\varphi \right] \quad (14)$$

feszültségfüggvénynek megfelelő kétszeresen szimmetrikus keresztmetszeteket s azokon esetleg létrejövő választóvonalakat tanulmányozzuk.

6.1. A választóvonal alakja

A tárgyalandó különleges esetben a választóvonal (7) alatti egyenlete

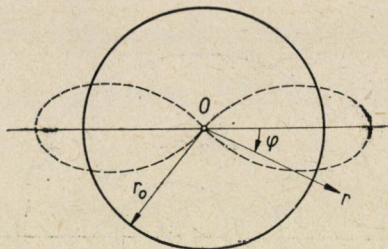
$$-1 + \frac{C_2}{2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos 2\varphi = 0,$$

illetve

$$\cos 2\varphi = \frac{2}{C_2 \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right)} \quad (15)$$

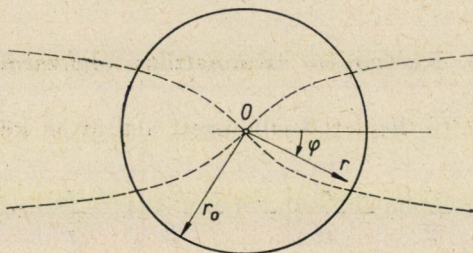
alakban írható. Ezen egyenletnek általában egy kétszirmú rozetta felel meg. Ha $|C_2| < 1$, ez a görbe teljesen az $r = r_0$ körön belül helyezkedik el. Ha $1 < |C_2| < 2$, a szóban forgó görbe metszi az $r = r_0$ kört, tehát ténylegesen

választóvonalat alkot. Ha $|C_2| = 2$, a választóvonal a végtelenbe nyúló görbévé fajul el.



12. ábra. A körüreg és a kétszirmú rozetta viszonylagos helyzete ($1 < C_2 < 2$)

A választóvonalnak a $\varphi = 0$ sugárhoz képest elfoglalt helyzete C_2 előjelétől függ. Ha C_2 pozitív, a rozetta alakú, illetve elfajult választóvonal a 12., illetve 13. ábrán feltüntetett módon helyezkedik el. Ha C_2 negatív, a választóvonal a $\varphi = 0$ sugárhoz képest 90° -kal elfordul.

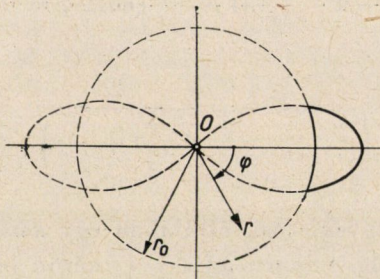


13. ábra. A körüreg és az elfajult választóvonal viszonylagos helyzete ($C_2 = 2$)

6.2. Keresztmetszet alakok

A következőkben a (14) képlettel jellemzett keresztmetszetek háromféle típusát mutatjuk be.

Első típus. Ebbe a keresztmetszet csoportba *sarló alakú keresztmetszetek* tartoznak (14. ábra). Ezeket egyrészt az $r = r_0$ kör egy ívdarabja, másrészt a



14. ábra. Sarló alakú keresztmetszet

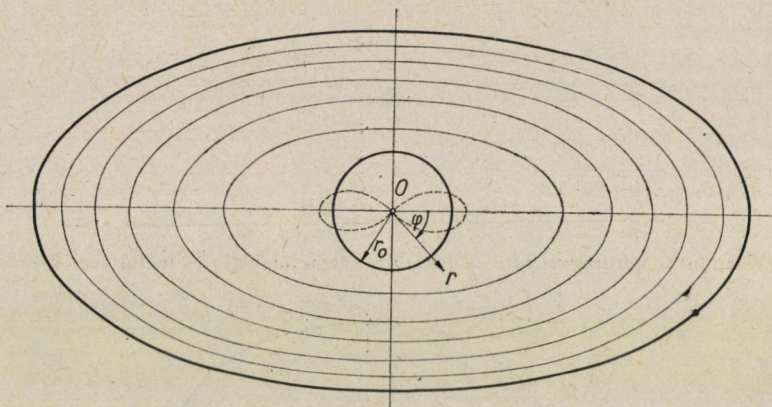
választóvonal egyik szirmának egy szakasza határolja. A szóban forgó keresztmetszetek feszültségi vonalainak egyenlete

$$(r^2 - r_0^2) \left[-1 + \frac{C_2}{2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos 2\varphi \right] = Kr_0^2, \quad (16)$$

illetve

$$\cos 2\varphi = \frac{2r^2}{C_2(r^2 + r_0^2)} \left(1 + \frac{Kr_0^2}{r^2 - r_0^2} \right), \quad (17)$$

ahol $K = \text{konst} \geq 0$.



15. ábra. Központos körüreggel bíró ellipszisszerű keresztmetszet és feszültségi vonalai ($1 < C_2 < 2$)

Második típus. Ide soroljuk a centrikus körüreggel bíró *ellipszisszerű keresztmetszeteket* (15. ábra). E keresztmetszetek határoló görbéinek, illetve feszültségi vonalainak egyenlete az első típusú keresztmetszetekéihez hasonló alakú.

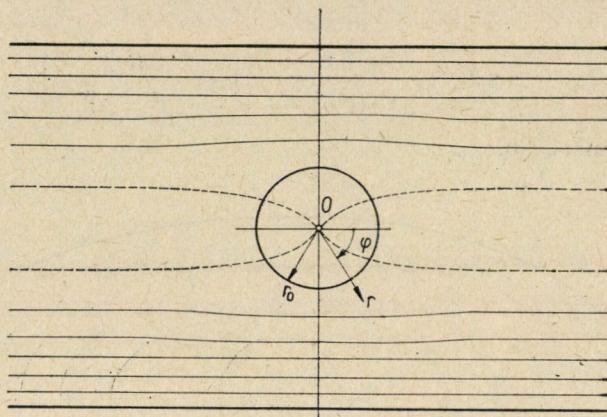
Olyankor, amidőn a választóvonal a végtelenbe nyúló görbévé fajul el, a feszültségi vonalak a körüregtől távolodva mindinkább egyenesszerűvé válnak, s az ellipszisszerű keresztmetszet *szalagszerű keresztmetszetté* alakul (16. ábra).

A (14) képlet lehetőséget nyújt *központos körüreggel bíró vastagfalú ellipsziskeresztmetszetek* (17. ábra) feszültségfüggvényének közelítő előállítására. Ez esetben a (14) képletben szereplő C_2 és K paramétereket akként célszerű felvenni, hogy az általuk meghatározott kerületi görbe az ellipszis előírt pontjain menjen át. E követelmény feltételeként itt is két illesztési egyenlet írható fel.

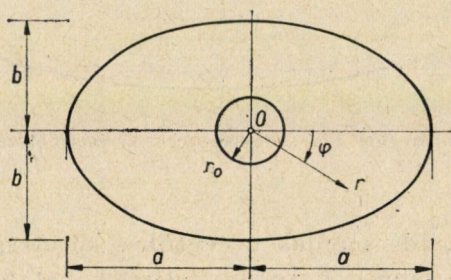
Ha illesztési pontokul a 18a. ábrába berajzolt A és B pontokat választjuk, akkor az említett két paraméter

$$C_2 = \frac{2 a^2 b^2 (a^2 - b^2)}{(a^2 b^2 - r_0^4) (a^2 + b^2)},$$

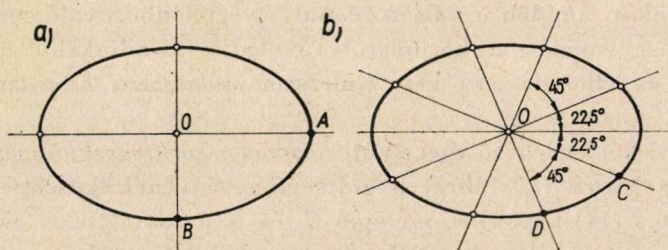
$$K = 2 \frac{a^4 b^4 - r_0^4 (a^2 + b^4)}{r_0^2 (a^2 b^2 - r_0^4) (a^2 + b^2)} - 1.$$



16. ábra. Központos körüreggel bíró szalagszerű keresztmetszet és feszültségi vonalai ($C_2 = 2$)



17. ábra. Ellipsziskeresztmetszet központos körüreggel



18. ábra. Az illesztési pontok kijelölése

Ha viszont a $\varphi = \pi/8$ és a $\varphi = 3\pi/8$ sugarakon fekvő — a 18b. ábrán C és D betűvel jelölt — ellipszispontokban illesztünk, akkor azt találjuk, hogy

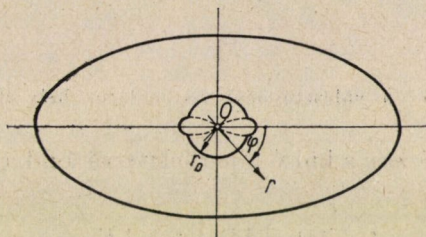
$$C_2 = \frac{16 a^4 b^4}{8 a^4 b^4 - r_0^4 (a^4 + 6 a^2 b^2 + b^4)} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2},$$

$$K = \frac{C_2}{2 \sqrt{2}} (\lambda^2 - 1) - 1,$$

ahol

$$\lambda = \frac{1}{r_0^2} \cdot \frac{4 a^2 b^2}{a^2 (2 - \sqrt{2}) + b^2 (2 + \sqrt{2})}.$$

Harmadik típus. Ez a keresztmetszettípus (19. ábra) csak a keresztmetszeti üreg alakja tekintetében különbözik a második típustól. Most ti. az üreget az $r = r_0$ körnek, valamint a rozettaszerű választóvonalnak egy vagy két szakasza határolja. A szóban forgó keresztmetszetek feszültségi vonalai azonosak a megfelelő második típusú keresztmetszetek feszültségi vonalaival.



19. ábra. Ellipszisszerű keresztmetszet kör- és rozettaív határolta üreggel

7. Háromszorosan szimmetrikus alakzatok

E cikkely keretében a (6) képlettel jellemzett keresztmetszetek közül a

$$\Psi = \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \left[-1 + \frac{C_3 r}{3 r_0} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0^4}{r^4} \right) \cos 3 \varphi \right] \quad (18)$$

feszültségfüggvénynek megfelelő *háromszorosan szimmetrikus* keresztmetszetekkel s az azokon esetleg létrejövő választóvonalakkal foglalkozunk.

7.1. A választóvonal alakja

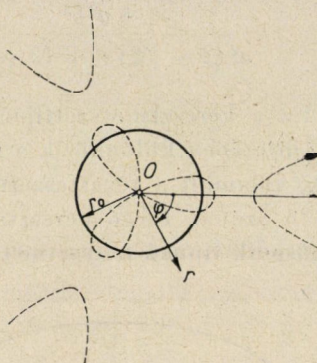
Ebben az esetben a választóvonal (7) alatti egyenlete

$$-1 + \frac{C_3 r}{3 r_0} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0^4}{r^4} \right) \cos 3 \varphi = 0,$$

illetve

$$\cos 3 \varphi = \frac{3 r_0}{C_3 r \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0^4}{r^4} \right)}$$

alakú. Ez az egyenlet általában egy *háromszirmú rozetta-alkotta középrész*ből és *három hiperbolaszzerű ágból* álló görbét jellemez. Utóbbi ágak a körüregen kívül helyezkednek el. A háromszirmú rozetta a $|C_3| < 1$ esetben teljesen a körüregen belül foglal helyet, a $|C_3| > 1$ esetben viszont metszi a körüreg peremét, tehát választóvonalat alkot (20. ábra). A C_3 érték növekedtével a

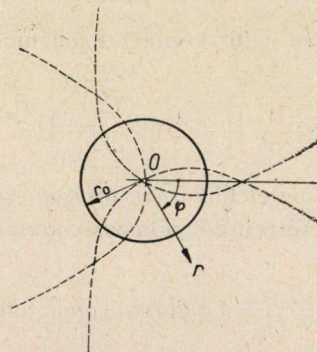


20. ábra. A körüreg és a választóvonal viszonylagos helyzete ($1 < C_3 < 1,2182\dots$)

rozetta alakú középrész és a külső hiperbolaszzerű ágak egyre közelebb kerülnek egymáshoz, a

$$|C_3| = \frac{(-2 + \sqrt{13}) \sqrt{1 + \sqrt{13}}}{\sqrt{8}} = 1,2182\dots$$

határesetben pedig a külső és belső részek egyesülnek (21. ábra). A



21. ábra. A körüreg és az elfajult rozetta viszonylagos helyzete ($C_3 = 1,2182\dots$)

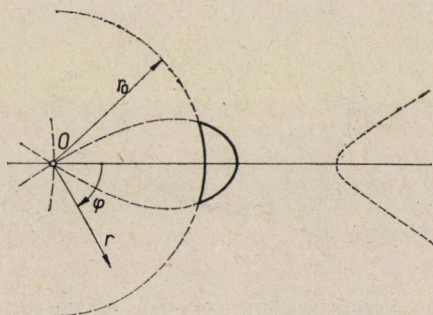
$$|C_3| > \frac{(-2 + \sqrt{13}) \sqrt{1 + \sqrt{13}}}{\sqrt{8}} = 1,2182\dots \quad (19)$$

esetben nem alakul ki valós választóvonal. Ha C_3 negatív, a választóvonal a 20., illetve 21. ábrán feltüntetett helyzetéhez képest $\pi/3$ szöggel elfordul.

7.2. Keresztmetszet alakok

A következőkben a (18) képlet-jellemezte keresztmetszetek három jellegzetes típusát tanulmányozzuk.

Első típus. Az ide sorolt keresztmetszeteket részben az $r = r_0$ kör egy ívdarabja, részben pedig a választóvonal egyik szirmának egy szakasza határolja. Az el nem fajuló esetben a keresztmetszet *sarló alakú* (22. ábra),



22. ábra. Sarló alakú keresztmetszet

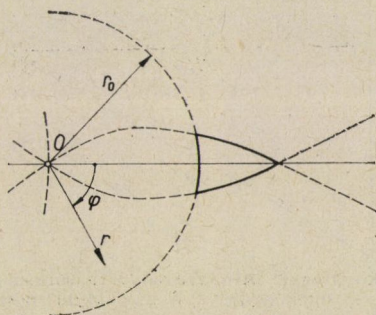
az elfajuló esetben *püspöksüveg alakú* (23. ábra). A sarló és püspöksüveg alakú keresztmetszetek határoló görbéinek és feszültségi vonalainak egyenlete:

$$(r^2 - r_0^2) \left[-1 + \frac{C_3 r}{3 r_0} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0^4}{r^4} \right) \cos 3\varphi \right] = K r_0^2, \quad (20)$$

illetve

$$\cos 3\varphi = \frac{3 r_0 r^3}{C_3 (r^4 + r_0^2 r^2 + r_0^4)} \left(1 + \frac{K r_0^2}{r^2 - r_0^2} \right), \quad (21)$$

ahol $K = \text{konst} \geq 0$.

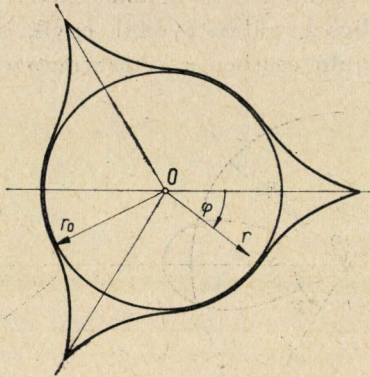


23. ábra. Püspöksüveg alakú keresztmetszet

Második típus. E csoportot a *központos körüreggel bíró szabályos háromszög-szerű keresztmetszetek* alkotják (24. ábra). Ezek határoló vonalainak, illetve

feszültségi vonalainak egyenlete ugyanolyan alakú, mint az első típusú keresztmetszetek esetében, azonban jelenleg

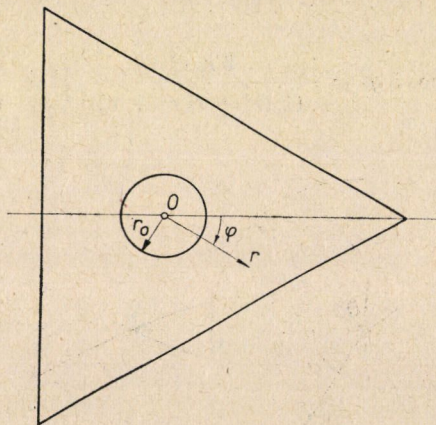
$$K = \text{konst} < 0.$$



24. ábra. Központos körüreggel bíró szabályos háromszögszerű keresztmetszet
($C_3 = 1,188\ 402$, $K = -0,034\ 363\ 4$)

A különböző feszültségi vonalak közül különös érdeklődésre tarthat igényt az egymást keresztező három ágból álló feszültségi vonal (25. ábra). A három ág keresztezési pontjai a $C_3 > 0$ esetben a

$$\varphi = 0, \quad \varphi = 2\pi/3, \quad \varphi = 4\pi/3$$



25. ábra. Központos körüreggel bíró szabályos háromszögszerű keresztmetszet
($C_3 = 0,333\ 3262$, $K = -11,001\ 0288$)

sugarakra esnek. A szóban forgó sugarak mentén a (21) egyenlet szerint

$$\frac{3 r_0 r^3}{C_3 (r^4 + r_0^2 r^2 + r_0^4)} \left(1 + \frac{K r_0^2}{r^2 - r_0^2} \right) = 1. \quad (22)$$

Innen rendezés után a

$$\varrho = \frac{r}{r_0} \quad (23)$$

jelöléssel a

$$\varrho^6 - \frac{3}{C_3} \varrho^5 + \frac{3}{C_3} (1 - K) \varrho^3 - 1 = 0 \quad (24)$$

egyenlet adódik.

A (24) egyenlet célszerűen felhasználható az O kezdőponttól előírt r_1 távolságban fekvő keresztvezési pontokkal bíró keresztmetszetek C_3 és K értékeinek meghatározására. A keresztvezési pontokhoz rendelhető

$$\varrho_1 = \frac{r_1}{r_0}$$

érték ui. a (24) egyenlet kétszeres gyöke. Ha a szóban forgó egyenlet bal oldalát $f(\varrho)$ függvénynek tekintjük, akkor a ϱ_1 érték, mint az $f(\varrho) = 0$ egyenlet kétszeres gyöke, az $f'(\varrho) = 0$ feltételt is kielégíteni tartozik. A deriválást elvégezve, a

$$6\varrho^5 - \frac{15}{C_3} \varrho^4 + \frac{9}{C_3} (1 - K) \varrho^2 = 0 \quad (25)$$

egyenletet kapjuk, mely a (24) egyenlettel együtt a C_3 és K paraméterekre a

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{2\varrho_1^5}{1 + \varrho_1^6}, \\ K &= 1 - \frac{\varrho_1^2}{3} \cdot \frac{5 + \varrho_1^6}{1 + \varrho_1^6} \end{aligned} \quad (26)$$

értéket szolgáltatja.

Az egymást metsző ágakból álló feszültségi vonal által határolt idom külső határoló vonala annál kevésbé tér el a szabályos háromszögtől, minél nagyobb a keresztmetszet legkisebb falvastagsága a körüreg sugarához képest. Ha $\varrho_1 \geq 6$, a két idom egymástól való eltérése elenyészően kicsiny.

A $\varrho_1 = 6$ esetben

$$C_3 = \frac{2 \cdot 6^5}{1 + 6^6} = 0,333\ 3262,$$

$$K = 1 - \frac{6^2}{3} \cdot \frac{5 + 6^6}{1 + 6^6} = -11,001\ 0288,$$

tehát a keresztmetszet közelítő feszültségfüggvénye a (18) alattiak szerint

$$\psi = \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \left[-1 + \frac{0,333\ 3262}{3r_0} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0^4}{r^4} \right) \cos 3\varphi \right].$$

A keresztmetszet külső határvonalának egyenlete pedig

$$\cos 3\varphi = \frac{3r_0 r^3}{0,333\ 3262 (r^4 + r_0^2 r^2 + r_0^4)} \left(1 - \frac{11,001\ 0288 r_0^2}{r^2 - r_0^2} \right).$$

Az utóbbi képlet segítségével könnyűszerrel meg lehet határozni a külső határoló vonalnak az O kezdőponttól r távolságban levő P pontjához tartozó középponti szöget, valamint a szóban forgó pont x és y koordinátáit, lévén

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Az elvégzett számítás a vizsgált idom BC oldalán fekvő különböző P pontokban az I. táblázatba foglalt értékeket szolgáltatta. A táblázatban Δx a P pontnak az ABC háromszög BC oldalától való távolságát jelzi, nevezetesen

$$\Delta x = x - 3r_0,$$

az utolsó oszlop pedig a Δx eltérésnek és a háromszög oldalhosszának viszony-számát tünteti fel.

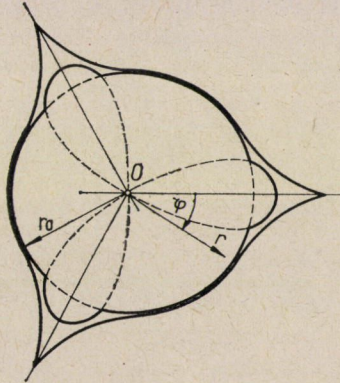
I. táblázat

A viszonylagos hibaérték

r/r_0	$\cos 3\varphi$	$\cos \varphi$	x/r_0	$ y /r_0$	x/r_0	$x/6\sqrt{3}r_0$
3,000 578	-1	-1	-3,000 578	0	-0,000 578	-0,000 055
3,10	-0,723 171 264	-0,967 880	-3,000 429	0,779 374	-0,000 429	-0,000 041
3,25	-0,377 475 690	-0,923 160	-3,000 269	1,249 354	-0,000 269	-0,000 026
3,5	+0,052 291 746	-0,857 175	-3,000 112	1,793 257	-0,000 112	-0,000 011
4,0	+0,562 504 711	-0,749 999	-2,999 995	2,646 754	+0,000 005	+0,000 000
4,5	+0,814 828 796	-0,666 661	-2,999 973	3,354 235	+0,000 027	+0,000 003
5,0	+0,936 005 892	-0,599 996	-2,999 978	4,000 017	+0,000 022	+0,000 002
5,5	+0,987 228 820	-0,545 452	-2,999 989	4,771 013	+0,000 011	+0,000 001
6,0	+1	-0,5	-3,0	5,196 152	0	0

Mint látható, a vizsgált példában a keresztmetszet külső határvonala valóban csak egészen lényegtelenül tér el az ABC szabályos háromszögtől. A legnagyobb eltérés a keresztmetszeti oldalak felezőpontjában jön létre, s értéke itt, a legnagyobb eltérés helyén is csak alig haladja meg a háromszög oldalhosszúságának $1/20\ 000$ részét (vagyis a 25. ábra vonalvastagságának $1/50$ részét).

Harmadik típus. E csoportbeli üreges keresztmetszetek belső határoló vonalát az $r = r_0$ körnek és a választóvonalnak egy, két vagy három szakasza alkotja (26. ábra). Ezt a típust, mely egyáltalán nem tekinthető vastagfalú keresztmetszetnek, csupán a teljesség kedvéért említjük.



26. ábra. Háromszorosán szimmetrikus üreges keresztmetszet; belső határoló vonalát az $r = r_0$ körnek és a választóvonalnak három-három szakasza alkotja

IRODALOM

1. CSONKA, P.: Die Verdrehung dickwandiger prismatischer Hohlstäbe. *Ingenieur Archiv* 6 (1935), 373—382.
2. GRAMMEL, R.: Mechanik elastischer Körper. (Handbuch der Physik, Bd. VI). Julius Springer, Berlin 1928; 1. Aufl., 145—146.
3. WEBER, C.—GÜNTHER, W.: Torsionstheorie. Friedr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig; Akademie Verlag, Berlin 1958, 38.