A HAJLÍTOTT RÚD VIZSGÁLATA A „SAJÁTTEHER" ÉS A KRITIKUS NYOMÓERŐ ALAPJÁN

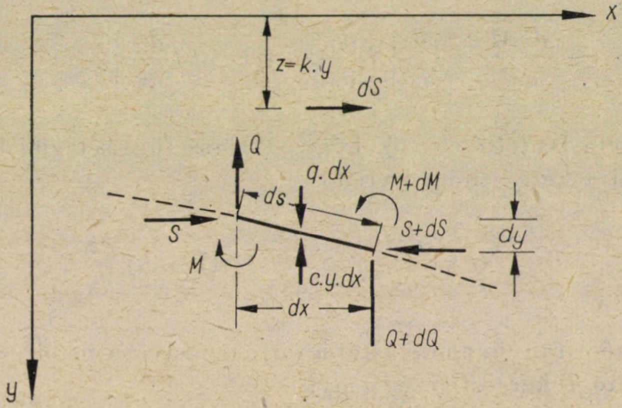
SZIDAROVSZKY JÁNOS,
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA
KÖZLEKEDÉS- ÉS POSTAÜGYI MINISZTÉRIUM

[Beérkezett 1965. április 28-án]

A dolgozat az egyrészt csak hajlított, másrészt az egyidejűen nyomott és hajlított rúd belsőerői, valamint alakváltozása közti összefüggéseket vizsgálja. Egy a sajátteher hatására fellépő alakváltozás, ill. belsőerő a nyomóerő hatására arányosan megnövekszik. Az állandó szelvényű rúdra ismert növelő tényező, valamint a sajátteher és a lehajlás közti összefüggések érvényességét változószelvényű rúdra, sőt rugalmas ágyazaton való felfekvés esetére is igazolja a dolgozat — némi megszorítással — a nyíróerők hatásának figyelembevétele esetében is.

I. Az egyensúlyi egyenlet

Az x tengelyben fekvő egyenes tengelyű rúdra $S = S(x)$ tengelyirányú erő, $q = q(x)$ keresztirányú teher, valamint $p(x) = p = c(x) \cdot y(x) = cy$ ágyazati nyomás hat, ahol c az ágyazati tényező és y a rúd tengelyére merőleges irányú eltolódás.



1. ábra

Vizsgálatunkban nem kívánjuk meg azt, hogy a terhelő nyomóerő megtartsa eredeti egyenesét, csupán azt, hogy az egyes keresztmetszetekben ható külső nyomóerőnövekmény hatásvonalának és a rúd keresztmetszetének eltolódása arányos legyen.

A rúd dx elemére ható erőket az 1. ábra tünteti fel.

A rúdelemre ható erők egyensúlyi erőrendszert alkotnak. Igy a terhelőerőknek a rúdelem jobb oldali végpontjára vonatkozó nyomatéka zérus:

$$-(M + dM) + M + S \cdot dy + dS \left[y - z + \frac{dy}{2} \right] +$$

$$+ Q \cdot dx - \frac{(q - cy)\, dx^2}{2} = 0 .$$

Hasonlóképpen zérus az erők x tengelyre vett vetületösszege is, azaz

$$dQ = -(q - cy) dx. \tag{1}$$

A másodrendű kis mennyiségek: $dx \cdot dy$ és $(q - cy) \cdot dx^2$ elhanyagolása, valamint a

$$z = ky$$

összefüggés behelyettesítése és dx mennyiséggel való osztás után a fenti összefüggésből a

$$-\frac{dM}{dx} + S\frac{dy}{dx} + y(1 - k)\frac{dS}{dx} + Q = 0 \tag{2}$$

egyenlőséget kapjuk.

A (2) egyenlőség x szerinti differenciálása és (1) behelyettesítése után a

$$-\frac{d^2 M}{dx^2} + \frac{d}{dx}\left[S\frac{dy}{dx} + y(1 - k)\frac{dS}{dx} \right] + c \cdot y = q \tag{3}$$

alakra hozható. Itt feltételeztük, hogy a (2) összefüggés tagjai differenciálhatók.

(2)-ből a keresztirányú eredő

$$Q = \frac{dM}{dx} - S\frac{dy}{dx} - y(1 - k)\frac{dS}{dx} . \tag{4}$$

A Q erő y irányú, amitől eltér a tartó tengelyére merőleges keresztmetszet síkjában ható T keresztmetszeti nyíróerő.

A 2. ábra alapján

$$T = T_1 + T_2 = Q \cos \varphi + S \sin \varphi .$$

Mivel φ kis szög

$$\cos \varphi \approx 1 ,$$

$$\sin \varphi \approx \varphi \approx \tan \varphi = \frac{dy}{dx} ,$$

és így

$$T = Q + S\frac{dy}{dx}. \tag{5}$$

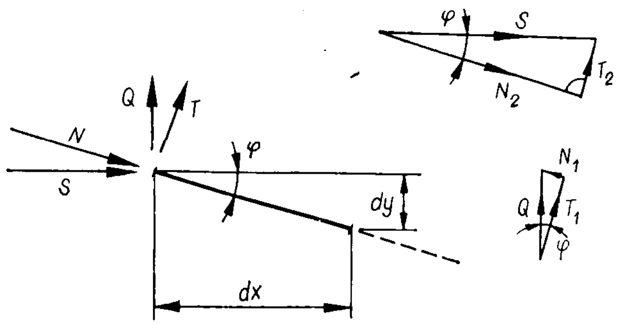
Ezt (4)-el összevetve, a keresztmetszeti nyíróerőre a

$$T = \frac{dM}{dx} - y(1-k)\frac{dS}{dx} \tag{6}$$

összefüggést kapjuk.

A keresztmetszetre merőleges irányú erő, vagyis a normálerő ugyancsak a 2. ábra alapján

$$N = N_1 + N_2 = Q\sin\varphi + S\cos\varphi \approx Q\frac{dy}{dx} + S.$$



2. ábra

Minthogy dy/dx rendkívül kis mennyiség és Q sem nagyon nagy, $Q \cdot dy/dx$ az S-hez képest elhanyagolható, így

$$N = S. \tag{7}$$

II. Az alakváltozási egyenlet

A belsőerők ismeretében a rúd alakváltozása meghatározható. Tömörtartós rúdra érvényes az [1]

$$y = -\iint \frac{M}{EJ}\,dx\cdot dx + \int \frac{T}{\varrho G F}\,dx \tag{8}$$

összefüggés, ahol E a rugalmassági tényező, I a rúd tehetetlenségi nyomatéka G a nyírási rugalmassági tényező, F a rúd keresztmetszeti területi és ϱ alaki tényező.

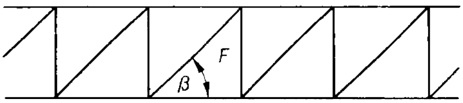
Egész hasonló összefüggés adja meg a párhuzamos övű rácsos tartó alakváltozását [2]:

$$y = -\iint \frac{M}{EJ} dx \cdot dx + \int \frac{T}{E A_r} dx. \tag{9}$$

Itt A_r az egyenértékű terület, ami pl. szimmetrikus rácsozás esetében az

$$A_r = F \sin^2 \beta \cdot \cos\beta$$

képlettel határozható meg, ahol F a rácsrúd keresztmetszeti területe és β a rácsrúd és a tartó tengelye által bezárt szög (3. ábra).



3. ábra

III. Az alakváltozás és a belsőerők növekedése a nyomóerő következtében

Ha a tartót nem terheli sem külső q erő, sem külső M^* hajlítónyomaték, akkor (3) alapján a

$$-\frac{d^2 \mathfrak{M}_i}{dx^2} + \frac{d}{dx}\left[\nu_i S \frac{d\eta_i}{dx} + \eta_i (1-k)\nu_i \frac{dS}{dx}\right] + c\,\eta_i = 0 \tag{10}$$

összefüggés érvényes, ahol η_i az elmozdulás, $\mathfrak{M}_i$ a hajlítónyomaték és $\nu_i S$ a nyomóerő. A (10) kifejezés a (8)-al, illetve (9)-el együtt homogén lineáris differenciálegyenletté alakítható, melynek — mint a kézikönyvek alapján ismeretes (pl. [3]) — csak különleges ν_i értékek mellett lehet a triviálistól eltérő megoldása. Az ilyen

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_i, \ldots$$

értékek a rendszer *sajátértékei* is egyben a tényleges S nyomóerőnek az egyensúlyi módszer alapján meghatározható i-edik kritikus nyomóerővel szembeni biztonság mérőszámai is.

Minden ν_i sajátértékhez hozzá tartoznak az η_i és az $\mathfrak{M}_i$ sajátmegoldáspárok, vagyis a kihajlási alakok és a nyomatékok.

Ha η_i és $\mathfrak{M}_i$ összetartozó sajátmegoldáspárok, akkor az $r\eta_i$ és az $r\mathfrak{M}_i$ függvények is sajátmegoldáspárok, ahol r tetszés szerinti (általában valós) állandó.

Terhelje a nem nyomott rudat

$$q_i = -\frac{d^2 \mathfrak{M}_i}{dx^2} + c\,\eta_i \tag{11}$$

sajátteher, ahol $\mathfrak{M}_i$ és η_i összetartozó sajátmegoldások.

Felmerül a kérdés, hogy létezik-e ilyen teher.

A (11) alatti összefüggés (3) alapján $S = 0$ esetében valóban kielégíti a sztatikai feltételt, de kérdés az, hogy kielégíti-e egyben a (8), ill. (9) alatti alakváltozási feltételt is. Az alábbiakban a (9) alatti jelölést alkalmazzuk.

Ha $c = 0$, úgy (11) független az alakváltozási feltételtől és ez esetben mindig létezik (11)-et kielégítő teher.

A $c \neq 0$ eset vizsgálata érdekében legyen a terhelőerő νS és ekkor (6)-ot (9)-be írva, az eltolódásra az

$$y = -\iint_0^x \frac{M}{EJ}\,dx \cdot dx + \int_0^x \frac{M'}{EA_r}\,dx - \nu(1-k)\int_0^x \frac{y}{EA_r} \cdot \frac{dS}{dx}\,dx \tag{12}$$

összefüggést kapjuk.

Ha az i-edik kritikus erő hat, úgy $\nu = \nu_i$ és a nyomaték valamint az eltolódás sajátmegoldáspárok. (12)-ből így

$$\eta_i = -\iint_0^x \frac{\mathfrak{M}_i}{EJ}\,dx \cdot dx + \int_0^x \frac{\mathfrak{M}_i'}{EA_r}\,dx - \nu(1-k)\int_0^x \frac{\eta_i}{EA_r} \cdot \frac{dS}{dx}\,dx. \tag{13}$$

Ha viszont a nyomóerő zérus, a (11)-ben szereplő nyomaték és lehajlás közti összefüggésre (12) alapján érvényes az

$$\eta_i = -\iint_0^x \frac{\mathfrak{M}_i}{EJ}\,dx \cdot dx + \int_0^x \frac{\mathfrak{M}_i'}{EA_r}\,dx \tag{14}$$

összefüggés. A (13) és (14) kifejezések bal oldala csak akkor lehet egyenlő, ha

$$\nu_i(1-k)\int_0^x \frac{\eta_i}{EA_r} \cdot \frac{dS}{dx}\,dx = 0. \tag{15}$$

Ez az azonosság viszont csak akkor áll fenn (az $y = 0$ triviális megoldás kizárása esetében), ha vagy

$$1 - k = 0,$$

vagy

$$\frac{dS}{dx} = 0.$$

A fentiek alapján akkor létezik (11)-et kielégítő sajátteher, ha vagy

a) $c = 0$, azaz a rúd nem nyugszik rugalmas ágyazaton, vagy ha

b) $1 - k = 0$, azaz a nyomóerőnövekmény a rúd deformált tengelyében hat, vagy ha

c) $dS/dx = 0$ (Ez azonban nem az $S =$ konstans speciális esete 2.-nek, mert $M = z \cdot dS$ külsőnyomaték terhelése esetére is vonatkozhatik, amikor is $dS \to 0$ és $z = k \cdot y \to \infty$.)

Gyakorlati szempontból azonban a (11) alatti qi sajátteher létezik, mert a hibát csak a nyíróerő okozta alakváltozás egy része okozza, aminek hatása általában elhanyagolhatóan kicsi.

Vonjunk ki (10)-ből (11)-et, akkor a

$$\frac{d}{dx}\left[S\frac{d\eta_i}{dx} + \eta_i(1-k)\frac{dS}{dx}\right] = -\frac{q_i}{\nu_i} \tag{16}$$

összefüggést kapjuk.

Terhelje a nyomott rudat is olyan q_i^* teher, melynek hatására keletkező lehajlás és hajlítónyomaték az előbbi $\mathfrak{M}_i$ és η_i saját megoldáspárok lesznek. (3) alapján

$$-\frac{d^2\mathfrak{M}_i}{dx^2} + \frac{d}{dx}\left[S\frac{d\eta_i}{dx} + \eta_i(1-k)\frac{dS}{dx}\right] + c\cdot\eta_i = q_i^* . \tag{17}$$

(16)-t (11)-be írva rendezés után a

$$-\frac{d^2\mathfrak{M}_i}{dx^2} + c\cdot\eta_i = q_i^* + \frac{q_i}{\nu_i} \tag{18}$$

egyenlőséget kapjuk. Azonban (11) alapján (18) bal oldala maga a q_i teher és így

$$q_i = q_i^* + \frac{q_i}{\nu_i},$$

amiből

$$q_i^* = \frac{\nu_i - 1}{\nu_i} q_i . \tag{19}$$

Szorozzuk meg (17)-at a

$$\frac{\nu_i}{\nu_i - 1}$$

mennyiséggel, akkor (19) felhasználásával és az

$$y_i = \frac{\nu_i}{\nu_i - 1}\eta_i = \mu\,\eta_i , \tag{20}$$

valamint az

$$M_i = \frac{\nu_i}{\nu_i - 1} \mathfrak{M}_i = \mu \mathfrak{M}_i \tag{21}$$

jelölések bevezetésével a

$$-\frac{d^2 M_i}{dx^2} + \frac{d}{dx}\left[\frac{S dy_i}{dx} + y_i (1 - k) \frac{dS}{dx}\right] + c y_i = q_i \tag{22}$$

egyenlőséget kapjuk. A (20)—(22) alapján megállapítható, hogy ha a nem nyomott rúd terhelése olyan, hogy hatására a lehajlás és hajlítónyomaték sajátmegoldáspár, akkor ugyanezen terhelés hatására a nyomott rúdon bekövetkező lehajlás és hajlítónyomaték is sajátmegoldáspár; továbbá a megoldáspárok páronként affinok és a nyomóerő hatására mind a hajlítónyomaték, mind a lehajlás

$$\mu = \frac{\nu_i}{\nu_i - 1} \tag{23}$$

szeresére növekszik. A (6) alattiak alapján a fenti megoldás a keresztmetszeti nyíróerőre csak akkor érvényes, ha a nyomóerőnövekmény a deformált rúd tengelyében hat ($z = y$ és így $k = 1$). Ugyanis v-el dS/dx és y is növekszik.

IV. Az alakváltozás meghatározása

Vonjuk ki a (1) egyenlőség

$$\frac{\nu_i}{\nu_i - 1}$$

szereséből (22)-öt, akkor (20)—(21) felhasználásával a

$$(\nu_i - 1) \frac{d}{dx}\left[S \frac{dy_i}{dx} + y_i (1 - k) \frac{dS}{dx}\right] = - q_i \tag{24}$$

összefüggést kapjuk. Ez integrálás és rendezés után az

$$S \frac{dy_i}{dx} + y_i (1 - k) \frac{dS}{dx} = - \frac{\int q_i \, dx}{\nu_i - 1} \tag{25}$$

egyenlőségre vezet.

A szorzat differenciálására vonatkozó

$$(S\, y)' = S\, y' + S'\, y$$

képlet alapján

$$S\frac{dy_i}{dx}+y_i(1-k)\frac{dS}{dx}=kS\frac{dy_i}{dx}+(1-k)\frac{d}{dx}(Sy_i). \tag{26}$$

A (26)-nak (25)-be való helyettesítésével nyerhető

$$kS\frac{dy_i}{dx}+(1-k)\frac{d}{dx}(Sy_i)=-\frac{\int q_i\,dx}{\nu_i-1} \tag{27}$$

összefüggés a következő két speciális esetben alkalmas az alakváltozás meghatározására.

a) A nyomóerő (növekmény) a rúd eredeti tengelyében hat.

Ekkor

$$y=z,$$

és

$$k=1$$

(27)-ből S-el való osztás és integrálás után az alakváltozásra az

$$y_i=-\int\frac{\int q_i\cdot dx}{S(\nu_i-1)}\cdot dx \tag{28}$$

összefüggést kapjuk. Ha a rudat tengelyirányú nyomóerő nem terheli, az i-edik kritikus nyomóerő

$$S_i=\nu_i S, \tag{29}$$

így

$$y_i==\int\frac{\int q_i\cdot dx}{S_i}dx=-\int\frac{\int q_i\cdot dx}{\nu_i S}dx. \tag{30}$$

A fenti összefüggés az i-edik kritikus erő meghatározására is felhasználható. Átrendezés után

$$\nu_i=-\frac{1}{y_i}\int\frac{\int q_i\cdot dx}{S}dx. \tag{31}$$

b) Ha a nyomóerőnövekmény a deformált rudat terheli

$$z=o,$$
$$k=o.$$

Igy (27)-ból integrálás és S-el való osztás után az

$$y_i=-\frac{\iint q_i\cdot dx\cdot dx}{S(\nu_i-1)} \tag{32}$$

összefüggést kapjuk. Ha a rudat tengelyirányú nyomóerő nem terheli, (29) alapján

$$y_i = -\frac{\iint q_i \cdot dx \cdot dx}{S_i} = -\frac{\iint q_i \cdot dx \cdot dx}{\nu_i S}. \tag{33}$$

Átrendezés után a

$$\nu_i = -\frac{\iint q_i \cdot dx \cdot dx}{y_i S} \tag{34}$$

képlet a kritikus erő meghatározására szolgálhat. Ha a nyíróerők hatását elhanyagoljuk, az

$$S_i = -\frac{M_i}{\iint \frac{M_i}{EJ} dx \cdot dx} \tag{35}$$

összefüggést kapjuk, ami egyezik az Engesser—Vianello-féle módszer alkalmazásával levezetett képlettel.

Ha a kritikus erők és a kihajlási alakok ismertek, a rúd alakváltozása meghatározható a (28), ill. (30) vagy (32), ill. (33) képlettel, feltéve, hogy a külsőteher a (11) képlet-adta függvény alapján meghatározható sajátterhek szerint sorba fejthető.

Ez esetben a q külső terhelést a sajátterhek szerint sorba fejtjük. Ekkor a külsőteher

$$q = \sum_{i=1}^{\infty} q_i, \tag{36}$$

amit pl. (32)-be helyettesítve, az alakváltozás

$$y = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\iint q_i \cdot dx \cdot dx}{S_i - S}. \tag{37}$$

Megjegyezzük, hogy a fenti összefüggés általában túl nehézkes a gyakorlati számítás céljára, de a lehajlás közelítő meghatározására egyes esetekben gyakorlatilag is felhasználható.

V. Példák

1. Határozzuk meg az S centrikus erővel és háromszög alakú megoszló terheléssel egyidejűleg terhelt állandó szelvényű kétcsuklós, l hosszúságú, rugalmas ágyazaton nyugvó rúd közepén a lehajlást a nyíróerők hatásának figyelembevételével (4. ábra).

A nyíróerők hatásának elhanyagolása mellett a fenti tartó kritikus nyomóerejét és kihajlási alakját az

$$M^{IV} + 2a^2 M'' + b^4 M = 0 \tag{a}$$

differenciálegyenlet alapján lehet meghatározni [4].

A kritikus alakváltozást az

$$y_i = d \sin \frac{i \pi x}{l} \tag{b}$$

és a kritikus erőt a

$$b^4 = \left(2a^2 - \frac{i^2 \pi^2}{l^2}\right) \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \tag{c}$$

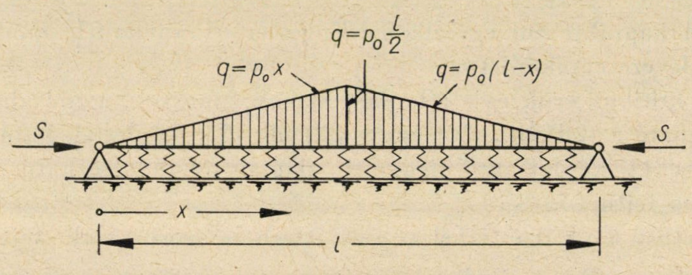
összefüggés adja meg.

(8)-at (10)-be helyettesítve, az (a) alatti összefüggést kapjuk, ahol

$$2a^2 = \frac{\dfrac{S_i}{EJ} - \dfrac{c}{\varrho G F}}{1 - \dfrac{S_i}{\varrho G F}}, \tag{d}$$

és

$$b^4 = \frac{\dfrac{c}{EJ}}{1 - \dfrac{S_i}{\varrho G F}}. \tag{e}$$



4. *ábra*

Igy a nyíróerő figyelembevétele mellett is (b) adja meg a kihajlási alakot és (c) a kritikus erőt. A (d) és (e) egyenlőségeknek (c)-be való behelyettesítése és rendezés után az i-edik kritikus nyomóerő:

$$S_i = \frac{i^2 \pi^2 E \cdot J}{l^2} \left(\frac{1}{1 + \dfrac{i^2 \pi^2 EJ}{l^2 \varrho GF}} + \frac{cl^4}{i^4 \pi^4 EJ} \right). \tag{f}$$

Az adott terhelést a

$$q = p_0 x \qquad \left(0 \leq x \leq \frac{l}{2}\right)$$

$$q = p_0 (l - x) \qquad \left(\frac{l}{2} \leq x \leq l\right)$$

függvény írja le.

E függvény Fourier-sora

$$q = - p_0 \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i-1)^2} \sin \frac{(2i-1)\pi x}{l}$$

(33) felhasználásával

$$y = - p_0 \frac{4l^4}{\pi^5 EJ} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\dfrac{(-1)^i}{(2i-1)^6} \sin \dfrac{(2i-1)\pi x}{l}}{\dfrac{1}{1 + \dfrac{(2i-1)^2 \pi^2 EJ}{l^2 \varrho GF}} + \dfrac{cl^4}{(2i-1)^4 \pi^4 EJ} - \dfrac{l^2}{(2i-1)^2 \pi^2 EJ} S}$$

alakra hozható.

2. Határozzuk meg egy $l = 800$ cm hosszú kéttámaszú, $q = 250$ kp/m megoszlóerővel terhelt tartó lehajlását a tartó közepén (5. ábra).

A tartó hajlítómerevsége

$$EJ = 4{,}055 \cdot 10^6\, Mp \cdot \text{cm}^2, \quad \text{ha} \quad x < 300 \text{ cm},$$

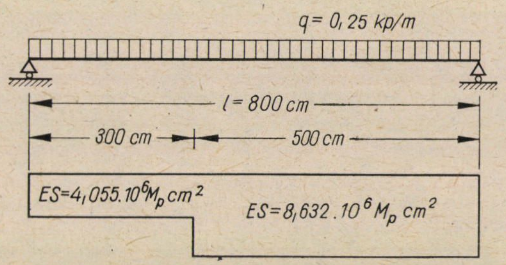
$$EJ = 8{,}632 \cdot 10^6\, Mp \cdot \text{cm}^2, \quad \text{ha} \quad x > 300 \text{ cm}.$$

Az (5) alattiak szerint az első kritikus erő

$$S_1 = 97{,}5\, Mp,$$

és a rúd közepének lehajlása

$$y = 1{,}97 \text{ cm}.$$



5. ábra

Bár a terhelés nem affin a kihajlási alakkal, annak első integrálja már hasonlít hozzá és így a lehajlást közelítőleg a (33) képlet alapján határozhatjuk meg.

$$\iint q \cdot dx \cdot dx = \frac{q}{2}\, x(l - x),$$

és középen $x = 400$ m-nél

$$\int\!\!\int_0^{400} q \cdot dx \cdot dx = -\,200 \text{ Mp} \cdot \text{cm}.$$

(33) alapján

$$y = \frac{200 \text{ Mp} \cdot \text{cm}}{97{,}5 \text{ Mp}} = 2{,}05 \text{ cm}.$$

A százalékos eltérés

$$E\,\% = 100\, \frac{2{,}05 - 1{,}97}{1{,}97} = 4.$$

IRODALOM

1. Korányi I.: Tartók statikája. Tankönyvkiadó, Budapest 1953.
2. Szidarovszky, J.: Corrected Deflection Theory of Suspension Bridges. *ASCE Transactions*, New York 1963.
3. Collatz, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Akad. Verlag, Leipzig 1949.
4. Ratzersdorfer: Die Druckfestigkeit von Stäben und Stabwerken; 1936.
5. Szidarovszky, J.: Gyakorlati módszer egyidejűen hajlított és nyomott rúdban keletkező hajlítónyomaték meghatározására (*Acta Technica*, sajtó alatt).