

# AZ EGYENESTENGELYŰ KÖRKERESZTMETSZETŰ RÚD CSAVARÁS-OKOZTA KIHAJLÁSA

CSONKA PÁL,  
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA  
AZ MTA ÉPÍTÉSTUDOMÁNYI MUNKAKÖZÖSSÉGE, BUDAPEST

[Béérkezett 1965. október 18-án]

Szerző a feladatot egyszerű egyensúlyi megfontolásokkal oly módon oldja meg, hogy a rúdtengely görbületét az irodalomban használatos közelítő képlet helyett pontos értékkel veszi figyelembe. Kimutatja, hogy olyankor, midőn a rúd a kihajlást megelőzően rugalmas állapotban volt, a rúd egyensúlyi állapota a kihajlás növekedésekor mindaddig indifferens marad, amíg a rúd képlékeny alakváltozást nem szenved.

A dolgot diagramok egészítik ki, melyekkel a csavaró erőpár, illetve fajlagos elcsavarodási szög kritikus értéke különböző rúdkarcsúságok esetén közvetlenül leolvasható.

## I. Bevezetés

Mint ismeretes [1–3], a csavarásra igénybevett egyenestengelyű rúd egyensúlyi állapota a rúdvégekre ható  $M$  csavaró erőpár egyes jellegzetes értékei esetében instabillá válik. Ilyenkor az eredetileg egyenes rúdtengely csavarvonal alakban meggörbülhet, s ezáltal a rúdkeresztmetszeten a csavarás-okozta nyírófeszültségeken felül még hajlítás-okozta derékfeszültségek is keletkeznek.

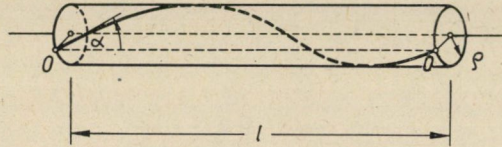
A rúd csavarvonal alakú meggörbülése — *kihajlása* — más és más módon megy végbe attól függően, hogy a kihajlást közvetlenül megelőzően a rúd teljes egészében rugalmas állapotban volt-e, avagy egyes rúdrészeken már előzőleg képlékeny alakváltozások jöttek létre. Az irodalom e két eset közül csak az első esetet tárgyalja, a második esettel nem foglalkozik. Az alábbiak mindkét kihajlási esetet felölelik, s a kritikus erőpár értékét mindkét esetben egyszerű egyensúlyi megfontolások alapján határozzák meg. Az alkalmazott tárgyalásmód feleslegessé teszi a meggörbült tengelyvonal differenciálegyenletének felírását és ezen egyenlet közelítő megoldását. Az előadandók már csak azért is érdeklődésre tarthatnak számot, mert a tanulmányozott feladat talán az egyedüli olyan kihajlási eset, melyben az ún. harmadrendű elmélet zárt megoldást eredményez.

## 2. Feltevések, jelölések

Az alábbi vizsgálatok az 1. ábra szerint terhelt, egyenestengelyű, körkeresztmetszetű rúdra vonatkoznak. A vizsgálandó rúd hossza  $l$ , keresztmetszetének sugara  $a$ . A rúd anyagát rugalmas-képlékenynek tekintjük, s feltételez-

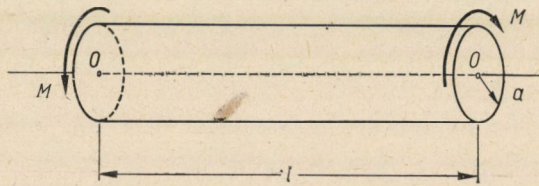
zük, hogy a képlékeny állapot a Huber—Mises-féle képlékenységi feltétel teljesedése esetében következik be.

A rúd véglapjaira ható erőpárokról feltesszük, hogy síkjuk a teljes ki-gömbülési jelenség során merőleges marad a véglapok középpontjait összekötő  $O-O$  egyenesre. Feltesszük továbbá, hogy a rúdvégek akként vannak meg-fogva, hogy a rúdtengelynek a kihajlás-okozta elferdülése, valamint a rúd véglapjainak egymáshoz való közeledése gátlás nélkül mehet végbe.



1. ábra. Csavarásra igénybe vett rúd

A csavarvonal alakban meggömbült rúdtengelyt a 2. ábrán mutatjuk be. Itt a csavarvonalat a szemléletesség kedvéért a rajta átfektethető körhengerrel együtt ábrázoltuk. Az ábrán a kihajlásnak azt a legegyszerűbb esetét tüntettük fel, melyben a meggömbült tengelyvonal egyetlenegy csavarmentet tartalmaz. Az általános esetben a meggömbült tengelyvonal több teljes csavarmentből is állhat.



2. ábra. A meggömbült rúdtengely

A meggömbült rúdtengely érintőinek az eredeti  $O-O$  tengelyiránnyal bezárt szögét  $\alpha$  betűvel, a rúdanyag rugalmassági állandóit  $E$ , illetve  $G$  betűvel, a fajlagos elcsavarodás szögét pedig  $\vartheta$  betűvel jelöljük. (Az  $\alpha$ ,  $\vartheta$  és  $M$  mennyi-ségeket az 1., illetve 2. ábrán feltüntetett esetben tekintjük pozitívoknak.)

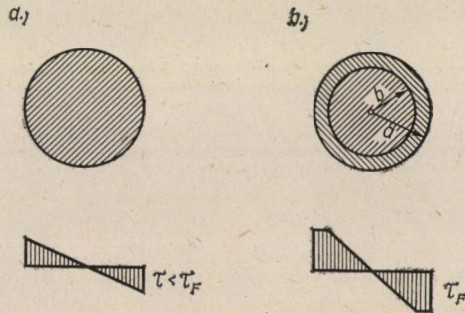
### 3. A rúd állapota közvetlenül a kihajlás előtt

Az  $M$  csavaróerőpár hatására a rúdkeresztmetszeteken nyírófeszültségek keletkeznek. Ezek értéke a csavarónyomaték növekedtével egyre nő, de értékük legfeljebb a folyást előidéző  $\tau_F$  értéket érheti el. Az a nyomaték, mely a keresztmetszet peremén éppen a  $\tau_F$  nyírófeszültséget idézi elő, a szilárdságtan ismert képlete szerint számítható:

$$M_E = \frac{\pi a^3}{2} \tau_F. \quad (1)$$

Ha  $M \leq M_E$ , a rúdkeresztmetszeteken a rúdtengelytől  $r$  távolságban keletkező nyírófeszültség nagysága

$$\tau = \frac{M}{2J_a} r, \quad \left( J_a = \frac{\pi a^4}{4} \right), \quad (2)$$



3. ábra. A rúdkeresztmetszeteken keletkező feszültségek a rúd kihajlása előtt:  
a) az  $M < M_E$  esetben, b) az  $M > M_E$  esetben

a fajlagos elcsavarodás szöge pedig

$$\vartheta = \frac{\tau}{rG} = \frac{M}{2GJ_a}. \quad (3)$$

Ha  $M \geq M_E$ , akkor a keresztmetszeteknek csak valamely  $r = b \leq a$  sugarú körön belül fekvő részei vannak kihajlás előtt rugalmas állapotban (3. ábra). Ilyenkor

$$\tau = \begin{cases} \tau_F & , \quad \text{ha } r \geq b, \\ \frac{r}{b} \tau_F, & \text{ha } r \leq b. \end{cases} \quad (4)$$

A rugalmas és képlékeny állapotban levő keresztmetszetrészeket elválasztó kör  $b$  sugarát a külső és belső erők nyomatékegyenlőségét kifejező

$$M = \int_{(A)} \tau r \cdot dA = \frac{\pi}{6} (4a^3 - b^3) \tau_F$$

egyenletből számíthatjuk. Innen

$$b = \sqrt[3]{4a^3 - \frac{6M}{\pi\tau_F}}. \quad (5)$$

Ezt ismerve, a fajlagos elcsavarodási szöveget a

$$\vartheta = \frac{\tau_F}{bG} \quad (6)$$

képlettel határozhatjuk meg.

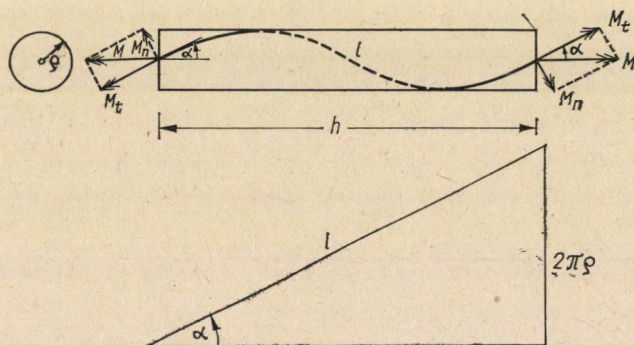
Természetesen, egyensúly csak addig lehetséges, amíg  $b \geq 0$ . Az  $M$  erőpárnak a  $b = 0$  határhelyezethez tartozó értéke:

$$M_F = \frac{2\pi a^3}{3} \tau_F = \frac{4}{3} M_E. \quad (7)$$

Ha  $M = M_F$ , a keresztmetszet egész terjedelmében folyási állapotban van. Ez az állapot a rúd teherbíróképességének lehetséges felső határa. Ilyenkor elméletileg  $\vartheta = \infty$ .

#### 4. A rúd állapota a kihajlás kezdő pillanatában

Vizsgáljuk meg, lehetséges-e egyensúlyi állapot akkor, ha a rúdra ható külső erőket, a fajlagos elcsavarodást, valamint a rúdtengely ívhosszát válto-



4. ábra. A meggörbült rúdtengely és a rajta átfektetett hengerpalást kiterített képe

zatlanul hagyva, a rúdtengelyt a 2. ábra szerint csavarvonal alakban meggörbítjük. Ez esetben a rúdtengely görbülete (4. ábra)

$$k = \frac{\sin^2 \alpha}{\varrho}, \quad (8)$$

a külső  $M$  erőpárnak a keresztmetszetek síkjába eső, illetve azokra merőleges síkú összetevője pedig

$$\begin{aligned} M_t &= M \cos \alpha, \\ M_n &= M \sin \alpha. \end{aligned} \quad (9)$$

Egyensúly — természetesen — csak akkor lehetséges, ha  $M_t$ , illetve  $M_n$  a keresztmetszeteken működő  $\tau$ , illetve  $\sigma$  feszültségek alkotta  $M'$ , illetve  $M''$  erőpárral egyenlő:

$$\begin{aligned} M' &= M_t, \\ M'' &= M_n. \end{aligned} \quad (10)$$

Ha vizsgálatainkat a kihajlás kezdő pillanatára korlátozzuk, akkor a (9) alatti első egyenlet helyett az

$$M_t \cong M$$

összefüggést írhatjuk, s ennek megfelelőleg a (10) alatti első feltételt ekként fogalmazhatjuk:

$$M' = M.$$

Ez a feltétel esetünkben nyilván teljesítve van, s így itt csak a (10) alatti második feltétellel kell foglalkoznunk. Ezt a feltételt a (9) alattiak felhasználásával

$$M'' = M \sin \alpha \quad (11)$$

alakban írhatjuk. Ha a rúd hajlító ellenállását (az egységnyi görbületet előidéző erőpár nyomatékát)  $EJ$ -vel jelöljük, akkor

$$M'' = k \cdot EJ,$$

illetve a (8) összefüggés figyelembevételével

$$M'' = \frac{\sin^2 \alpha}{\varrho} EJ.$$

Az utóbbi értéket (11)-be betéve, az egyensúly feltételeként az

$$M = \frac{\sin \alpha}{\varrho} EJ$$

összefüggést kapjuk.

Attól függően, hogy a csavarvonal alakban meggörbült rúdtengely a két végpont közt hány csavarmentet tartalmaz,  $\sin \alpha$  más és más értékű lehet. Ezért a meggörbült rúdnak többféle egyensúlyi állapota is lehetséges. Közülük bennünket csak a legkisebb  $M$  értéknek megfelelő eset érdekel. Utóbbi akkor

jön létre, ha a rúdtengely-alkotta csavarvonal egyetlenegy menetből áll. Ilyenkor

$$\sin \alpha = \frac{2\pi \varrho}{l}, \quad (12)$$

s ennek megfelelőleg az  $M$  erőpár kritikus értéke:

$$M_{kr} = \frac{2\pi EJ}{l}. \quad (13)$$

A (13) képletben szereplő  $EJ$  érték, mint mondtuk, a rúd hajlító ellenállását jelenti a kihajlás pillanatában. Természetesen, a hajlító ellenállás szempontjából a rúdkeresztmetszeteknek csak azok a részei jöhetnek tekintetbe, amelyek a kihajlás pillanatában még rugalmas állapotban voltak, hiszen a képlékeny részeken a kihajlás során további feszültségek már nem keletkezhetnek. Ezek szerint olyankor, midőn a kihajlást közvetlenül megelőzően a rúd teljes egészében még rugalmas állapotban volt,

$$EJ = EJ_a = E \frac{\pi a^4}{4}, \quad (14)$$

olyankor viszont, midőn az  $r = b$  sugarú hengeren kívüli rúdrészek már a kihajlást megelőzően is képlékeny állapotba kerültek,

$$EJ = EJ_b = E \frac{\pi b^4}{4}. \quad (15)$$

Adott esetben annak eldöntésére, hogy valamely  $M$  nagyságú csavaróerőpár hatására a rúd kihajolhatik-e vagy sem, először is a rugalmas henger  $b$  sugarát kell megállapítanunk. E célra az (5) képletet használhatjuk fel. Ezután aszerint, hogy  $b \geq a$ , illetve  $b \leq a$ , a (14), illetve (15) képlet segítségével az  $EJ$  értéket kell kiszámítanunk. Végül a (13) képlettel  $M_{kr}$  értékét kell meghatározni, s azt az adott  $M$  értékekkel össze kell hasonlítanunk. Kihajlási veszély akkor fog fenn, ha

$$M \geq M_{kr},$$

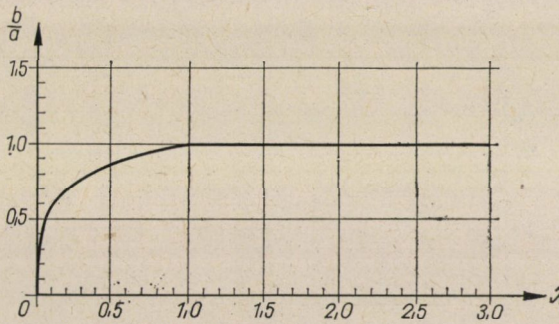
mert ekkor a terhelés fokozatos növekvése során elérkezünk egy olyan helyzethez, amidőn a csavarónyomaték már éppen az  $M_{kr}$ -al egyenlő.

Az imént említett vizsgálat alkalmával a keresztmetszet képlékenységi fokára jellemző  $b/a$  viszonzyszámot, mint a

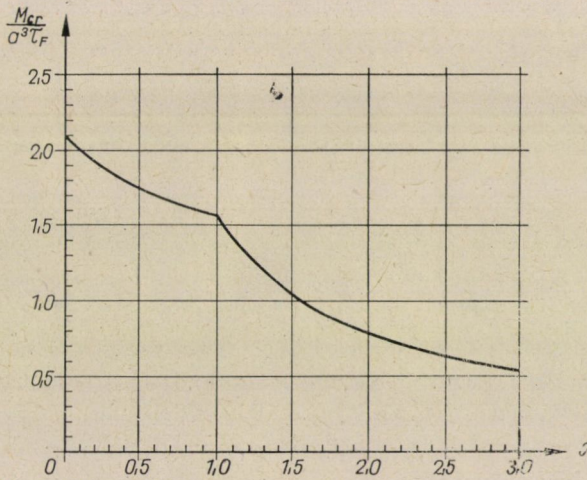
$$\lambda = \frac{\tau_F}{\pi E} \frac{l}{a} \quad (16)$$

tényező függvényét vagy az (5) képlettel, vagy az 5. ábrán látható diagram segítségével határozhatjuk meg. A diagramvonal görbe szakaszának implicit egyenlete:

$$\lambda = \frac{3b^4/a^4}{4 - b^3/a^3}, \quad \lambda \leq 1.$$



5. ábra. Diagram a keresztmetszetek képlékenységi fokának meghatározásához



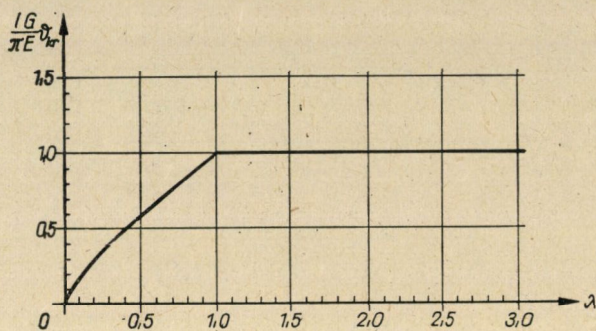
6. ábra. Diagram  $M_{kr}$  meghatározásához

A levezetett képletek alapján a kihajlás szempontjából veszélyes  $M_{kr}$  erőpár nagyságának megállapításához a 6. ábrán látható diagramot használhatjuk. Az itt feltüntetett diagramvonal egyenlete:

$$\frac{M}{a^3 \tau_F} = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \left( 4 - \frac{b^3}{a^3} \right), & \lambda \leq 1; \\ \frac{\pi^2 E}{2\tau_F} \cdot \frac{1}{l/a}, & \lambda \geq 1. \end{cases}$$

A fajlagos elcsavarási szög kritikus értékének, vagyis a  $\vartheta_{kr}$  értéknek közvetlen megállapítása viszont a 7. ábrán látható diagram segítségével lehetséges. Az itt szereplő diagramvonal egyenlete

$$\frac{IG}{\pi E} \vartheta_{kr} = \begin{cases} \frac{3b^3/a^3}{4 - b^3/a^3}, & \lambda \leq 1; \\ 1, & \lambda \geq 1. \end{cases}$$



7. ábra. Diagram  $\vartheta_{kr}$  meghatározásához

### 5. A rúd állapota fokozottabb mértékű kihajlás esetében

Az előző cikkelyben a (10) alatti első feltétel tárgyalása során az  $M_t = M$  közelítéssel éltünk, tehát az ott előadottak csak a kihajlás kezdő pillanatára vonatkoztak. Fokozottabb mértékű kihajlás esetében az említett közelítést nem alkalmazhatjuk, helyette a pontos (9) képletekkel kell dolgoznunk.

Idevágó tárgyalásaink során csak a rugalmas kihajlás esetével, tehát csak azzal az esettel foglalkozunk, mely akkor forog fenn, ha a rúd minden pontja a kihajlást megelőzően rugalmas állapotban volt. Ez az eset a kihajlás fokozódásával a *rugalmas-képlékeny kihajlás* esetébe megy át. A két esetet elválasztó határhelyzetben képlékeny állapot csak a rúdkeresztmetszetnek a hajlítás semleges tengelyétől legtávolabb fekvő két kerületi pontján alakul ki. A nyírófeszültségek ui. a rúdtengelytől mért  $r$  távolsággal, a derültfeszültségek pedig a semleges tengelytől mért távolsággal arányosak (6., illetve 7. ábra). A hajlítás semleges tengelyétől legtávolabb fekvő két pontban a feszültségalkotók értéke:

$$\sigma_E = \frac{M_n}{J} a = \frac{M \sin \alpha}{J} a,$$

$$\tau_E = \frac{M_t}{2J} a = \frac{M \cos \alpha}{2J} a,$$



illetve a (12) és (13) alattiak figyelembevételével

$$\sigma_E = \frac{4\pi^2 E \varrho a}{l^2}, \quad (17)$$

$$\tau_E = \frac{\pi E a}{l} \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 \varrho^2}{l^2}}. \quad (18)$$

Az utóbbi értékeket a Huber—Mises-féle folyási feltételt kifejező

$$\sigma^2 + 3\tau^2 \leq 3\tau_F^2 \quad (19)$$

egyenletbe behelyettesítve, a kihajlási henger sugarára a rugalmas kihajlás határhelyzetében a

$$\varrho_E = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} l \sqrt{\frac{\tau_F^2 l^2}{\pi^2 E^2 a^2} - 1}$$

képletet kapjuk, ezt pedig a (16) alattiakra való tekintettel így is írhatjuk:

$$\varrho_E = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} l \sqrt{\lambda^2 - 1}.$$

Ily mértékű kihajlás esetében a keresztmetszeteken keletkező legnagyobb feszültségek:

$$\sigma_E = 2\sqrt{3} \tau_F \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}}, \quad (20)$$

$$\tau_E = 2\tau_F \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{3}{4}}. \quad (21)$$

Meg kell jegyeznünk, hogy  $\tau_E$  nem azonos a kihajlás kezdő pillanatában működő legnagyobb nyírófeszültséggel. Utóbbi a (18) képletből a  $\varrho = 0$  helyettesítéssel számítható. Értéke

$$\tau_{\max} = \frac{\pi E a}{l},$$

illetve a (16) összefüggés figyelembevételével

$$\tau_{\max} = \frac{\tau_F}{\lambda}. \quad (22)$$

A (21) és (22) alatti értékeket egymással egybevetve, megállapíthatjuk, hogy a kihajlás fokozódásával a keresztmetszet peremén a nyírófeszültség értéke csökken.

Rá kell mutatnunk arra is, hogy rugalmas kihajlás esetében a (13) képlet nemcsak a kihajlás kezdő pillanatában, hanem annak fokozódásakor is változatlanul érvényes. Ez más szóval azt jelenti, hogy a rúdvégekre működ-tetendő  $M$  erőpár értéke a kihajlás mértékétől független állandó, vagyis a külső erőpár értékének változása nélkül növekedhetik. Ilyenkor mindaddig, amíg a rúdon semmiféle képlékeny alakváltozás nem jön létre, a rúd egyensúlyi állapota *indifferens*. Ez az állapot képlékeny alakváltozások bekövetkezése után *labilissá* válik.

#### IRODALOM

1. FÖPPL, A.: Vorlesungen ü. Technische Mechanik. Teubner, Leipzig und Berlin 1922.
2. GEIGER, H.—SCHEEL, K.: Handbuch d. Physik. Vol. 6: Mechanik der elastischen Körper J. Springer, Berlin 1928.
3. GRAMMEL, R.: Drillmoment von Wellen. *Zeitschrift f. Angewandte Mathematik u. Mechanik* 3 (1923), 262—271.