„HASONLÓ" MOTOROK TORZIÓSLENGÉS-ADATAINAK SZÁMÍTÁSA

BALOGH ARTHUR
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1966. január 7-én]

A számítások gyors elvégzése céljából a gyakorlati eseteknek megfelelően a hasonló jellegű motoroknál megállapítottuk a karakterisztikus egyenlet állandó részlegét, ami csak akkor változhatik, ha a motor valamelyik mozgó része változik, vagy pl. a hengerek számát változtatják. Ilyenképpen a független tömegek figyelembevételével a számítás gyorsan elvégezhető és megállapítható, hogy kivitelre alkalmas esetről van-e szó, néhány jellegzetes példán mutattuk be a számítás menetét azzal, hogy ez az eljárás bármely más esetre is alkalmazható.

I. Bevezetés

Az elméleti vizsgálatok csak akkor bizonyulhatnak értékeseknek, ha gyakorlati alkalmazásuknál felmerülő számítások egyszerűsíthetők és gyorsan juthatunk a várt eredményhez. Számtalan olyan problémát ismerünk, amelynek több megoldását közölték és azok nagy többségükben feledésbe merültek, mert gyakorlati szerepük és értékük jelentékteleneknek bizonyult. Mindamellett az egyes problémákhoz további megoldásokat ismertetnek, mégpedig helyesen, mert olyanok is kerülhetnek elő, amelyek a gyakorlati számítás számára értékesek lehetnek.

Ha a torzióslengéssel összefüggő problémák megoldásain végigtekintünk — ezekről már vaskos kötetek jelentek meg — akkor azt találjuk, hogy azok zömét a gyakorlat nem szentesítette, tehát feledésbe merültek.

Mi is a torzióslengés esetében a probléma?

Adott esetben fontos a számítások gyors és áttekinthető elvégzése, mert a gyakorlatban elméleti tanulmányokra csak igen kevés idő juthat. Fontos ilyen számításoknál még az is, hogy alkalmazkodjunk a gyártás programjához. A mai gyártást a tömeggyártás jellemzi és így pl. a motoroknál ismert néhány típus, amelynek adatai torzióslengés szempontjából egyszer és mindenkorra ismertek. A feladat most már abban áll, hogy a kivitelezés során jelentkező változásokat csak oly mértékben vegyük figyelembe, hogy a kész anyagot minden további nélkül adottnak vehessük és csak a változásokkal kelljen foglalkozni.

Hasonló motorokon olyan adott típusokat értünk, amelyeken — szükség és kívánság szerint — a hozzácsatolt berendezések változnak.

Ha a kitűzött feladatunkat tovább kívánjuk részletezni, akkor a következőket állapíthatjuk meg:

A motorok tömeggyártása során általában 4 és 6 hengerű motorokat gyártanak soros vagy *V* alakú henger elrendezéssel. A kívánt egyenlőtlenségi foknak megfelelően megállapítják a lendkerék tehetetlenségi nyomatékát, tehát a méretét. A rendszernek van tengelykapcsolója, amihez kapcsolják pl. a villamosberendezést, vagy a hajó hajtásához szükséges csavart stb.

A csatlakozó berendezésnek többféle változata lehetséges. Így pl. a lendekereket a motorrendszer egyik oldalára, a hajtott részleget pedig a másik oldalára helyezik, de lehetséges mindezeket a motor egyik oldalán is elhelyezni.

A mondottakból következik, hogy a rendszernek két részlege van, mégpedig egy állandó, tehát változatlan, valamint egy, a kívánságnak megfelelő változó részlege. Ha tehát egyszer és mindenkorra megállapítottuk a rendszer karakterisztikus egyenletét, amely az állandó részlegnek felel meg, akkor a változó részleg figyelembevételével a karakterisztikus egyenlet végleges alakját fel lehet írni, ami kétségtelenül a számítás lényeges egyszerűsítését jelenti.

Nem kívánunk e feladattal teljes általánosságban foglalkozni, hanem csupán arra szorítkozunk, hogy néhány gyakorlati példán a számítás menetét bemutassuk.

Számításainkhoz felhasználjuk a szerző *„A torzióslengés karakterisztikus egyenletének diagramja"* c. dolgozatát, amely az *MTA Műszaki Tudományok Osztályának Közleményeiben* jelent meg, 1965-ben.*

E dolgozat kiegészítéséről, ill. annak további gyakorlati alkalmazásáról van szó.

Az említett dolgozatban ismertetett eljárás különösen alkalmas a kitűzött feladat megoldására, mert a merevségi tényezők a hozzájuk kapcsolt tömegek tehetetlenségi nyomatékával külön egységként szerepelnek a karakterisztikus egyenletben, tehát megválasztásuk kezünkben van. Hasonló eset áll a motorikus részlegre is, mert itt ugyancsak a merevségi tényező — a tömegekre jellemző tehetetlenségi nyomaték viszonyszáma — mint önálló adat szerepel az egyenletben és ennek szerepe, állandó és ugyanazon típusról lévén szó, különösen kedvező a számításra nézve.

A bemutatott példák mintául szolgálnak hasonló számítások elvégzéséhez és ha egyéb — itt nem említett esetről lenne szó — akkor e dolgozatban bemutatott eljárással járhatunk el minden nehézség nélkül.

Felmerülhet az a kérdés, hogy miért használjuk a *hasonló* Diesel-motor elnevezést, amikor a gyakorlatban a *típus* szó az elfogadott és járatos.

Előfordulhat ugyan, hogy csak a motor szerepel mint állandó anyag a számításnál, azonban igen gyakori az az eset, amikor a motor a lendkerékkel együtt szerepel, tehát ezért vezettük be a hasonló motor elrendezést. Sőt to-

* Ld. *MTA VI. Osztály Közleményei* **35** (1965), 293.

vább is mehettünk, mert a motor tengelyén a lendkereken kívül fogaskereket is szerelhetnek, amely lehet oly típusú is, hogy tehetetlenségi nyomatékot nem lehet és nem szabad figyelmen kívül hagyni.

Ismételten hangsúlyozzuk, hogy számításainkban a motor minden a torzióslengés során szerepet játszó és állandónak tekinthető alkatrészét figyelembe vesszük és ezeket a karakterisztikus egyenlet állandó részlegének fogjuk tekinteni.

Az idézett dolgozatban ismertetett módszerrel egy eddig ismeretlen feladattal is lehet foglalkozni. Adottak voltak az eddigi számításokban az u értékekre jellemző tömegek tehetetlenségi nyomatékai, valamint a megfelelő merevségi tényezők és ezen adatok felhasználásával számítottuk ki a kritikus lengésszámokat.

De jelentkezhetik a fordított feladat is. Ti. felvesszük a kritikus lengésszámot, ill. az ennek megfelelő körfrekvenciát, és keressük a motorhoz tartozó, ennek megfelelő független tömeghez rendelt u értéket. E feladat megoldásakor — minthogy rendszerint adott motortípusokról van szó — a karakterisztikus egyenlet ama részlegét, amely a motorra vonatkozik, állandónak vesszük és csak a független tömeget jellemző adatok meghatározásával foglalkozunk. Ezt a lehetőséget példán fogjuk bemutatni.

A motor üzemi fordulata legyen 520/perc. Ennek felhasználásával az I. táblázatot állítottuk fel, amelynek első sora a magasabbrendű fordulatszámokat mutatja be.

Ha tehát az alapfordulatszám 6040, akkor az üzemi fordulatszám 12-ed rendű és így az üzemre nézve már nem veszélyes. E számnak $w = 630$ és $w^2 = 3{,}4 \cdot 10^5$ felel meg. Így ismeretes a körfrekvencia, és ehhez kell most az u értéket kiszámítani. Az eredménytől függ, lehet-e a gyakorlat számára elfogadható eredményt elérni.

I. táblázat

12080	6040	4020	3020	2420	2013	1725	1510	1350
0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5

1208	1100	1006	940	862	755	660	604	550	520
5	5,5	6	6,5	7	8	9	10	11	12

II. Jelölések

G a nyírási rugalmassági tényező [kg/cm²];
I_p a tengely poláris tehetetlenségi nyomatéka [cm⁴];
l a tömegek közötti távolság [cm];

c $= G \cdot I_p/l$ a merevségi tényező [kgcm];
u_{ik} $= c_i/I_k$ [1/sec²];
I_k a tömegek tehetetlenségi nyomatéka [kgcmsec²];
$l/n,m/k$ olyan rendszer, amelyben a tömegek száma n, a motortól független tömegek száma az egyik oldalon l, a másik oldalon pedig k; a hengerek száma tehát $m-l-k$.

Megjegyzés: Az u kifejezése független a választott mértékegységtől.

III. Gyakorlati példák

1. példa

6 tömegű rendszerrel foglalkozunk, amelynek egyik oldalán a független tömegek száma 2. Tehát végeredményben a motor hengereinek száma 4.

A független tömegek közül az egyik a motor állandó felszereléséhez tartozik, amely lehet lendkerék, a másik független tömeg pedig változhatik kívánság szerint, tehát változónak vesszük:

$$u_{11} = \frac{c_1}{I_1} \quad \text{és} \quad u_{12} = \frac{c_1}{I_2},$$

ahol végeredményben a c_1 és az I_1 a változó.

A felvett $2/6$ m/o rendszerre érvényes karakterisztikus egyenletet megtaláljuk az idézett dolgozatban (229. old.), amelyet (1) alatt írtunk fel. Az itt szereplő jelöléseket (2) alatt találjuk. Az egyenletet átírtuk olyképpen, mint az a (3) alatt található, u_{11} és u_{12} szerint csoportosítva. Adottak tehát u, u_{22} és u_{23}. A következőkben külön vesszük azokat a tagokat, amelyek u_{11}-et, ill. u_{12}-t tartalmazzák és végül azokat a tagokat, amelyek ezek közül egyiket sem tartalmazzák. Így kapjuk a (4) alatti kifejezéseket:

$$\begin{aligned} w^{10} &- (u_{11} + u_{12})\, w^8 - (u_{22} + u_{23} + 6u)\, w^8 + \left[u_{11}(u_{22} + u_{23} + 6u) + \right. \\ &+ \left. u_{12}(u_{23} + 6u)\right] w^6 + (6u_{22} + 5u_{23} + 10u)\, u\, w^6 - \\ &- \left[u_{11}(6u_{22} + 5u_{23} + 10u)\, u + u_{12}(5u_{23} + 10u)\, u\right] w^4 - \\ &- (10u_{22} + 6u_{23} + 4u)\, u^2 w^4 + \left[u_{11}(10u_{22} + 6u_{23} + 4u)\, u^2 + \right. \\ &+ \left. u_{12}(6u_{23} + 4u)\right] u^2 w^2 + (4u_{22} + u_{23})\, u^3 w^2 - u_{11}(4u_{22} + u_{23})\, u^3 - \\ &- u_{12}\, u_{23}\, u^3 = 0\,; \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &u_{22} + u_{23} + 6u = k_{223}\,, \\ &u_{23} + 6u = k_{23}\,, \\ &(6u_{22} + 5u_{23} + 10u)\, u = U_6\,, \qquad (5u_{23} + 10u)\, u = U_5\,, \\ &(10u_{22} + 6u_{23} + 4u)\, u^2 = U_{10}\,, \qquad (6u_{23} + 4u)\, u^2 = \overline{U}_6\,; \\ &(4u_{22} + u_{23})\, u^3 = U_4\,, \end{aligned} \tag{2}$$

$$w^{10} - (u_{11} + u_{12}) w^8 - k_{223} w^6 + u_{11} k_{223} w^6 + u_{12} k_{23} w^6 + U_6 w^6 -$$
$$- (u_{11} U_6 + u_{12} U_5) w^4 - U_{10} w^4 + (u_{11} U_{10} + u_{12} \overline{U}_6) w^2 + U_4 w^2 -$$
$$- u_{11} U_4 - u_{12} u_{23} u^3 = 0 \, ; \qquad (3)$$

$$w^{10} - k_{223} w^8 + U_6 w^6 - U_{10} w^4 + U_4 w^2 = w^2 F_1 (w^2) \, ,$$
$$- u_{11} (w^8 - k_{223} w^6 + U_6 w^4 - U_{10} w^2 + U_4) = - u_{11} F_1 (w^2) \, , \qquad (4)$$
$$- u_{12} (w^8 - k_{23} w^6 + U_5 w^4 - \overline{U}_6 w^2 + u_{23} u^3) = - u_{12} F_2 (w^2) \, ;$$

a végeredmény pedig:

$$(w^2 - u_{11}) F_1 (w^2) - u_{12} F_2 (w^2) = 0 \, , \qquad (5)$$

ahol F_1 és F_2 állandó értékek, mert csak u-t és u_{22}, ill. u_{23} értékeit tartalmazzák. Tehát F_1 és F_2 kifejezései ily hasonló jellegű rendszereknél állandók. A következőkben erre számpéldát mutatunk be.

Számpélda. Legyen

$$u_{22} = 0{,}1.10^6 \, ; \qquad u_{23} = 10^6 \text{ és } u = 4.10^6 \, .$$

Ezen adatokkal számítsuk ki F_1 és F_2 értékeit:

$$F_1 (w^2) = w^8 - 25{,}1.10^6 w^6 + 182{,}4.10^{12} w^4 - 318.10^{18} w^2 + 89{,}6.10^{24} \, ,$$
$$F_2 (w^2) = w^8 - 25\text{-}10^6 w^6 + 180.10^{12} w^4 - 352.10^{18} w^2 + 64.10^{24} \, .$$

A következő jelölést vezetjük be:

$$w^2 = a.10^6 \, .$$

Ezzel az F_1 és F_2 kifejezései a következőképpen alakulnak:

$$F_1\text{-re } a^2 (a^2 + 182{,}4) + 89{,}6 \text{ és } - a (25{,}1 a^2 + 368) \, ;$$
$$F_2\text{-re } a^2 (a^2 + 184) + 64 \text{ és } - a (25 a^2 + 352) \, .$$

Különböző a értékekhez tartozó F_1-et és F_2-t a II. táblázat tartalmazza.

II. táblázat

a	F_1	F_2
0	+ 89,6	+ 64
0,1	+ 54,62	+ 30,6
0,2	+ 23,09	− 0,6
0,317	− 9,45	− 28
0,5	− 52	− 70
0,707	− 88	− 103
1	− 120	− 132

Az (5) alatti egyenlet most a következő alakú:

$$(a - u_{11}) F_1 (a) - u_{12} F_2 (a) = 0 \, . \qquad (6)$$

Felhasználva a II. táblázat adatait adott u_{11} és u_{12}-nek megfelelően elvégezzük a számítást.

A II. táblázatban néhány a, ill. w^2 értékekhez kiszámítottuk az F_1 és F_2 kifejezéseket, amelyek a hasonló motor állandói. Közbenső a értékekhez is kiszámíthatjuk e kifejezéseket, de mind az F_1, mind az F_2-t a függvényeként fel is rajzolhatjuk, amikor is a tetszőleges közbenső adatot lemérhetjük.

Egy esetre, mégpedig $u_{11} = 0{,}05 \cdot 10^6$ és $u_{12} = 0{,}1 \cdot 10^6$ kiszámítjuk a (6) alatti kifejezést. Minthogy minden u érték szorzója 10^6 a (6) kifejezésbe 10^6 melletti értéket helyettesítjük be. Az itt következő számításból látható, hogy az F_1 és F_2 ismeretében a számítást igen gyorsan lehet elvégezni.

Mindenekelőtt lássuk az F_1 és F_2 felállításához szükséges számításokat:

$$k_{23} = 1 + 6.4 = 25.10^6\,, \qquad k_{223} = 0{,}1 + 25 = 25{,}1\ 10^6\,,$$

$$U_6 = (6u_{11} + 5u_{23} + 10u)\,u = (0{,}6 + 5 + 40)\,4 = 182{,}4\ 10^{12}\,,$$

$$U_5 = (5u_{23} + 10u)\,u = 180\ 10^{12}\,,$$

$$U_{10} = (10u_{22} + 6u_{23} + 4u_2)\,u^2 = (1 + 6 + 16)\,16 = 368\ 10^{18}\,,$$

$$U_6 = (6u_{23} + 4u)\,u^2 = 352\ 10^{18}\,,$$

$$U_4 = (4u_{22} + u_{23})\,u^3 = (0{,}4 + 1)\,64 = 89{,}6.10^{24}\,;$$

$$u_{23}\,u^3 = 64.10^{24}\,.$$

Legyen

$$u_{11} = 0{,}05.10^6 \text{ és } u_{12} = 0{,}1.10^6\,.$$

Ugyanazokat az a értékeket használjuk, amelyek a II. táblázatban találhatók. Tehát

$a = 0$:

$$-\,0.05.89{,}6 - 0{,}1.64 = -\,10{,}88\,;$$

$a = 0{,}1$:

$$(0{,}1 - 0{,}05)\,54{,}62 - 0{,}1.30{,}6 = -\,0{,}33\,;$$

$a = 0{,}2$:

$$(0{,}2 - 0{,}05)\,23 + 0{,}01.0{,}6 = +\,3{,}456\,;$$

$a = 0{,}317$:

$$-\,(0{,}317 - 0{,}05)\,9{,}45 + 0{,}1.28 = +\,0{,}28\,;$$

$a = 0{,}5$:

$$-\,(0{,}5 - 0{,}05)\,52 + 143.0{,}1 = -\,9{,}1\,;$$

$a = 0{,}707$:

$$-\,(0{,}707 - 0{,}05)\,88 + 0{,}1.114.8 = 41{,}33\,;$$

$a = 1$:

$$-\,(1 - 0{,}5)\,120 + 0{,}1.94{,}8 = -\,104{,}5\,.$$

A kritikus lengésszám a fentiek szerint:

$$a_2 = 0{,}1\,, \qquad a_2 = 0{,}317\,,$$

$$w^2 = 100\ 000\,, \qquad w^2 = 317\ 000\,,$$

$$w = 316\,, \qquad w = 563\,,$$

$$n = 3020/\text{perc}\,; \qquad n = 5370/\text{perc}\,.$$

2. példa

Oly négyhengeres elrendezéssel fogunk foglalkozni, amelynél a motor mindkét oldalán van egy-egy független tömeg, tehát jelölésünk szerint:

$$1/6\ m/1.$$

Ezek közül az egyik állandó éspedig mint lendkerék szerepel, a másik a változó, amely lehet generátor, lehet hajócsavar stb.

Az ennek megfelelő karakterisztikus egyenletet nem találjuk az idézett dolgozatban, azért az ott lefektetett elvek alapján fogjuk a karakterisztikus egyenletet erre az esetre felírni. Felhasználjuk természetesen az idézett dolgozatban található diagramot.

Mindenekelőtt az u értékeket csoportosítjuk:

a) u_{11}, u_{12} megfelel az állandó lendkeréknek, amelyet az egyenlőtlenségi fok szempontjából állapítanak meg;

b) $u = u_{22} = u_{23} = u_{33} = u_{34} = u_{44} = u_{45}$ azok az értékek, amelyek a motornak felelnek meg. Ezek száma 6 és ennek szerepe van az egyenlet felállításában;

c) u_{55}, u_{56} Ezek azok a változó értékek, amelyek a motor másik oldalán levő független tömegnek felel meg.

Az idézett dolgozatból a következő számokat olvassuk ki:

$$1/6_{f_1}\, m/1 : 10{,}6{,}4{,}1 \,.$$

Ezek felhasználásával és az egyenlő u értékek számának felhasználásával

$$U_6 = (6u_{11} + 5u_{12} + 10u)\, u \,,$$
$$U_{10} = (10u_{11} + 6u_{12} + 4u)\, u^2 \,,$$
$$U_4 = (4u_{11} + u_{12})\, u^3 \,.$$

E kifejezéseket ismervén, a következő összefüggést írjuk fel:

$$f_1 (w^2) = w^{10} - (u_{11} + u_{12} + 6u) w^8 + U_6 w^6 - U_{10} w^4 + U_4 w^2 .$$

Az idézett dolgozatból még a következőket olvashatjuk ki:

$$1/6_{f_2} m/1 : 6, 3, 1 \,,$$

Ezek felhasználásával

$$U_5 = (5u_{11} + 4u_{12} + 6u)\, u \,,$$
$$U_6 = (6u_{11} + 3u_{12} + u)\, u^2 \,.$$

Most már felírhatjuk a következő kifejezést:

$$f_2 (w^2) = w^8 - (u_{11} + u_{12} + 5u)\, w^6 + U_5 w^4 - U_6 w^2 + u_{11} u^3 \,.$$

A végeredmény:

$$f_1(w^2) - u_{55} f_2(w^2) - u_{56} f_3(w^2) = 0\,,$$

ahol

$$f_1 = w^2 \cdot f_3\,.$$

Végeredményben az f_1 és f_2 kifejezések állandók és csak a választott w^2 értékétől függnek. Ha tehát különböző w^2-hez az f_1-et és f_2-t kiszámítottuk, akkor csak a választott u_{55} és u_{56} figyelembevételével kell a számítást befejezni. A számítás menetét számpéldán fogjuk bemutatni.

Számpélda. Legyen:

$$u_{11} = 0{,}1.10^6,\ u_{12} = 3 \cdot 10^6 \text{ és } u = 4.10^6\,;$$

$$u_{11} + u_{12} + 6u = 26{,}1.10^6\,, \qquad u_{11} + u_{12} + 5u = 22{,}1.10^6\,,$$

$$(6u_{11} + 5u_{12} + 10u)\,u = 202{,}4.10^{12}\,, \qquad (5u_{11} + 4u_{12} + 6u)\,u = 120.10^{12}\,,$$

$$(10u_{11} + 6u_{12} + 4u)\,u^2 = 464.10^{18}\,, \qquad (6u_{11} + 3u_{12} + u)\,u^2 = 170.10^{18}\,,$$

$$(4u_{11} + u_{12})\,u^3 = 153{,}6 \cdot 10^{24}\,, \qquad u_{11}\,u^3 = 6{,}4.10^{24}\,;$$

$$f_1(w^2) = w^{10} - 26{,}1.10^6\,w^8 + 202{,}4.10^{12}\,w^6 - 464.10^{18}\,w^4 + 153{,}6.10^{24}\,w^2\,,$$

$$f_2(w^2) = w^8 - 22{,}1.10^6\,w^6 + 130.10^{12}\,w^4 - 170 \cdot 10^{18}\,w^2 + 6{,}4.10^{24}\,;$$

ha $w^2 = a.10^6$, úgy $f_1(a) = a^5 - 26{,}1\,a^4 + 202{,}4\,a^3 - 464\,a^2 + 153{,}6\,a\,,$

$$f_2(a) = a^4 - 22{,}1\,a^3 + 130\,a^2 - 170\,a + 6{,}4\,,$$

és

$$f_1 - u_{56} f_2 - u_{66} f_3 = 0,$$

$$f_1 = a f_3\,.$$

Az itt közölt számításnál felvettük a hasonló motor adatait és kiszámítottuk az előzően megadott U kifejezéseket. Az ekként kapott eredményeket behelyettesítettük az f_1, ill. f_2 kifejezéseibe. A 10 magasabb hatványainak kiküszöbölése céljából bevezettük az a értéket és ennek behelyettesítése után kaptuk a végeredményt.

A III. táblázatban különböző a értékekhez kiszámítottuk az f_1 és f_2 kifejezéseit. Közbenső értékekre is elvégezhetjük szükség szerint a számítást, vagy pedig e két kifejezést mint az a függvényét felrajzoljuk és a közbenső értékeket lemérhetjük.

A III. táblázatot követően az *a)* és *b)* esetekre felvettük az u_{55}, ill u_{56} értékeit és ugyanazon a értékekre, amelyekre az f_1-et, ill. f_2-t kiszámítottuk, kaptuk meg azokat az adatokat, amelyek felhasználásával az önlengésszámokat, ill. a kritikus lengésszámokat — szükség szerint az interpoláció segítségével — megállapíthatjuk.

Ismét azt találtuk, hogy hasonló motorok esetében az f_1 és f_2 ismeretével, amelyet egyszersmindenkorra kiszámítottunk, a végső számítást igen gyorsan el lehet végezni, mert ami állandó, arra nézve nem érdemes a számítást mindig megismételni.

III. táblázat

a	f_1	f_2
0	0	+ 6,4
0,1	+ 10,92	− 9,5
0,2	+ 13,73	− 22,57
0,317	− 91,2	− 35,18
0,5	− 15,5	− 48,8
0,707	− 58,22	− 56,3
1	− 133	− 54,7

$$f_1 - u_{55}f_2 - u_{56}f_3 = 0\,, \qquad f_1 = af_3\,;$$

$$f_1\,(a - u_{56}) - u_{55}f_2 = 0\,.$$

a) $u_{55} = 0{,}1.10^6$ és $u_{56} = 0{,}1.10^6$.

$a = 0$: $\quad -0{,}1.6{,}4 = -0{,}64\,;$

$a = 0{,}1$: $\quad 10{,}92\,(0{,}1 - 0{,}1) + 9{,}5.0{,}1 = 0{,}95\,;$

$a = 0{,}2$: $\quad 13{,}73\,(0{,}2 - 0{,}1) + 0{,}1\cdot 2{,}57 = +\,3{,}59\,;$

$a = 0{,}317$: $\quad -91{,}2\,(0{,}317 - 0{,}1) + 0{,}1.35{,}18 = -16{,}44\,;$

$a = 0{,}5$: $\quad -15{,}5\,(0{,}5 - 0{,}1) + 0{,}1.48{,}8 = -1{,}32\,,$

$a = 0{,}707$: $\quad -58{,}2\,(0{,}707 - 0{,}1) + 0{,}1.56{,}3 = -30{,}49\,;$

$a = 1$: $\quad -133\,(1 - 0{,}1) + 0{,}1.54{,}7 = -114{,}23\,.$

b) $u_{55} = 0{,}3.10^6$ és $u_{56} = 0{,}2.10^6$.

$a = 0,$: $-\;1{,}92\,;$

0,1: $+\;0{,}76\,;$

0,2: $+\;6{,}77\,;$

0,317: $+\;0{,}06\,;$

0,5: $+\;9{,}99\,;$

0,707: $-\;22{,}61\,;$

1: $-\;90.\,;$

3. példa

E példában csak a motorhoz tartozó részleg állandó és az összes független tömeg változtatható. Tárgyaljuk a következő rendszert:

$$2/7\;m/1\,.$$

Tehát oly négy hengeres motorral foglalkozunk, amelynél a motor egyik oldalán a független tömegek száma 2, a másik oldalán 1, de mind a három változtatható.

E célból a karakterisztikus egyenletben külön kell csoportosítani azokat a tagokat, amelyek a független tömegekre és külön azokat, amelyek a motorra vonatkoznak. E célból a karakterisztikus egyenletet teljesen részletesen kell felírni. Magát a karakterisztikus egyenletet megtalálhatjuk az idézett dolgozat ban (308. oldal), ahol a végeredményt a bevezetett jelölésekkel egyszerűsítettük, amit célunk érdekében mellőzni kell.

Írjuk fel részletesen a szóban forgó esetre a karakterisztikus egyenletet és ennek érdekében vezessük be a következő jelöléseket:

$$h_1(w^2) = h_1 = w^6 - 6uw^4 + 10u^2w^2 - 4u^3,$$

$$h_2(w^2) = h_2 = w^6 - 5uw^4 + 6u^2w^2 - u^3,$$

$$h_3(w^2) = h_3 = w^4 - 4uw^2 + 3u^2.$$

E kifejezésekben csak az u szerepel, tehát az az adat, amely szorosan a motor hengeréhez tartozik és így e kifejezések adott típuson állandóak.

Az itt tárgyalt esetben az u értékek következő csoportját állapíthatjuk meg:

a) $u_{11}, u_{12}, u_{22}, u_{23}$ vonatkozik a motor egyik oldalán elhelyezett 2 független tömegre.

b) $u = u_{33} = u_{34} = u_{44} = u_{45} = u_{55} = u_{56}$ a motorral kapcsolt tömegekre vonatkozik és az egyenlő u értékek száma 6. E számnak szerepe van a karakterisztikus egyenlet felállításánál. Az ezzel kapcsolatos h függvények az adott típusra nézve állandók.

c) u_{66}, u_{67} vonatkozik a motor másik oldalán elhelyezett független tömegre.

A számításnál az f_1 és f_2 kifejezéseket akként csoportosítottuk, hogy külön szerepelnek azok a részlegek, amelyek állandónak tekinthetők és ezeket a különböző h kifejezések fejezik ki. Az eredményeket aláhúzással emeltük ki és mint látható, a h kifejezéseken kívül szerepelnek az $u_{11}, u_{12}, u_{22}, u_{23}, u_{66}, u_{67}$ értékek, amelyek a független tömegek jellemzői. Tehát a három független tömeg közül bármelyik, vagy mindkettő, esetleg a 3 együtt is változhatik. Azzal, hogy az állandó jellegű h kifejezések szerepelnek, a számítás lényegesen meggyorsul.

Az átalakítás számítási munkája rendkívül egyszerű és bármely esetben gyorsan elvégezhető. Ily módon azonnal megkapjuk azokat a kifejezéseket, amelyekbe csak a változó független tömegeknek megfelelő értékeket kell behelyettesíteni, miáltal a számítás gyorsan elvégezhető. Igen egyszerűen érvényesül ez a módszer akkor, ha különböző független tömeggel próbaszámításokat kell végezni.

$$f_1(w^2) = w^{12} - (u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + 6u) w^{10} + \left[u_{11}(u_{22} + u_{23} + 6u) + \right.$$
$$+ u_{12}(u_{23} + 6u) + (6u_{22} + 5u_{23} + 10u) u\left.\right] w^8 - \left[u_{11}(6u_{22} + 5u_{23} + 10u) u + \right.$$
$$+ u_{12}(5u_{23} + 10u) u + (10u_{22} - 6u_{23} + 4u) u^2 \left.\right] w^6 +$$
$$+ \left[u_{11}(10u_{22} + 6u_{23} + 4u) u^2 + \right.$$
$$+ u_{12}(6u_{23} + 4u) u^2 + (4u_{22} + u_{23}) u^3 \left.\right] w^4 -$$
$$- \left[u_{11}(4u_{22} + u_{23}) u^3 + u_{12} u_{23} u^3\right] w^2 =$$
$$= w^2 h_1 [(w^4 - w^2(u_{11} + u_{12} + u_{22}) + u_{11} u_{22}] + h^8(- w^2 + u_{11} +$$
$$+ u_{12}) u_{23}$$

$$f_2(w^2) = w^{10} - (u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + 5u) w^8 + \left[u_{11}(u_{22} + u_{23} + 5u) + \right.$$
$$+ u_{12}(u_{23} + 5u) + (5u_{22} + 4u_{23} + 6u) u \left.\right] w^6 -$$
$$- \left[u_{11}(5u_{22} + 4u_{23} + 6u) u + u_{12}(4u_{23} + 6u) u + \right.$$
$$+ (6u_{22} + 3u_{23} + u) u^2 \left.\right] w^4 + \left[u_{11}(6u_{22} + 3u_{23} + u) u^2 + \right.$$
$$+ u_{12}(3u_{23} + u) u^2 + u_{22} u^?\left.\right] w^2 - u_{12} u_{23} u^3 =$$
$$= [w^4 - w^2(u_{11} + u_{12} + u_{22}) + u_{11} u_{23}) h_2 - (w^2 + u_{11} + u_{12}] w^2 u_{23} h_3$$

és a végeredmény:

$$[h_1(w^2 - u_{67}) - u_{66} h_2] [w^4 - w^2(u_{11} + u_{12} + u_{22}) + u_{12} u_{22}] +$$
$$+ (- w^2 + u_{11} + u_{12}) u_{23} w^2 [h_2 - (1 - u_{67}) - u_{66} h_3] = 0 .$$

4. példa

4 hengeres motor üzemi fordulatszáma 800 percenként és a független tömegek száma, amelyet az egyenlőtlenségi fok szempontjából állapítanak meg, 1. Az $I_1 = 1000$ kgcmsec². A motor hengereire nézve

$$I_2 = I_3 = I_4 = I_5 = 100 \text{ kg cm sec.}^2$$

Jelöléseink szerint ez megfelel az

$$1/5 \ m/0$$

esetnek. Az ennek megfelelő algebrai egyenlet a következő:

$$w^8 - (u_{11} + u_{12} + 6u) w^6 + (6u_{11} + 5u_{12} + 10u) uw^4 -$$
$$- (10u_{11} + 6u_{12} + 4u) u^2 w^2 + (4u_{11} + u_{12}) u^3 = 0 ,$$

amely megtalálható az idézett dolgozatban is (297. oldal).

Feladatunk az üzemi fordulatszám lengéstechnikai szempontból való vizsgálata. E célból az egyenletet u_{11} és u_{12} szerint rendezzük:

$$w^8 - 6uw^6 + 10u^2 w^4 - 4u^3 w^2 - u_{12}(w^6 - 5uw^2 + 6u^2 w^2 - u^3) -$$
$$- u_{11}(w^6 - 6u w^4 + 10u^2 w^2 - 4u^3) = 0 .$$

A motor adatai természetesen változatlanok. Az erre jellemző érték:

$$u = 4.10^6 .$$

A számítás egyszerűsítéséhez vezessük be a következő jelölést:

$$w^2 = a \cdot 10^6 .$$

Behelyettesítve

$$a.10^6(a^3 - 24a^2 + 160a - 256) - u_{11}(a^3 - 24a^2 + 160a - 256 -$$
$$- u_{12}(a^3 - 20a^2 + 96a - 64) = 0.$$

Ha

$$g_1(a^2) = a^3 - 24a^2 + 160a - 256$$

és

$$g_2(a) = a^3 - 20a + 96a - 64 ,$$

akkor az egyenlet alakja:

$$g_1(a)\left[a \cdot 10^6 - u_{11}\right] - u_{12} g_2(a) = 0 .$$

Különböző a értékekhez kiszámítjuk a g_1 és g_2 kifejezéseit és az eredményt a IV. táblázatba foglaljuk.

IV. táblázat

a	g_1	g_2
0	−256	− 64
0,1	−248	− 54,6
0,2	−225	− 46,8
0,317	−208,7	− 36
0,5	−176	− 21
0,707	−155	− 6,4
0,8	−143	+ 0,5
1	−119	+ 13
2	− 24	+ 56

További számításainkhoz válasszuk ki a IV. táblázatból a következő adatokat:

$$a = 1 , \quad g_1(a) = -119 \text{ és } g_2(a) = 13 .$$

Behelyettesítve ezen adatokat az egyenletbe:

$$- 119\,(10^6 - u_{11}) - u_{12}\,13 = 0\,.$$

Ebből

$$10^6 = u_{11} - 0{,}109\, u_{12} = c_1 \left(\frac{1}{1000} - \frac{0{,}109}{100}\right),$$

és rendezve:

$$10^6 = c_1 \frac{1}{10^2} (0{,}1 - 0{,}109)\,,$$

E szerint c_1 negatív szám, ami nyilánvalóan lehetetlen.
Válasszuk a IV. táblázatból a következő adatokat:

$$a = 0{,}707\,, \quad g_1(a) = -155 \text{ és } g_2(a) = -6{,}4\,.$$

Behelyettesítve az egyenletbe:

$$155\,(0{,}707.10^6 - u_{11}) + 6{,}4\, u_{22} = 0\,.$$

Innen

$$0{,}707\cdot 10^6 = \frac{c_1}{10^2} (0{,}1 + 0{,}041)$$

és rendezve:

$$\frac{0{,}707}{0{,}141} 10^8 = c_1 = 5\cdot 10^8\,.$$

Ezek szerint:

$$u_{11} = \frac{5\cdot 10^8}{1000} = 0{,}5\,.\,10^6\,,$$

$$u_{12} = \frac{12\cdot 10^8}{100} = 12\cdot 10^6\,.$$

$$u = 4.10^6\,,$$

Minthogy a karakterisztikus egyenlet 0, azért ezen adatokkal $a = 0{,}707$ a kritikus önlengésnek felel meg. Ebből kiszámítjuk a kritikus fordulatszámot, amely $w^2 = 707\,000$ és $w = 841$. Innen $n = 8100$/perc. Minthogy pedig az üzemi fordulatszám 800/perc, tehát az üzemi fordulatszám tizedrendű, ami már nem jelent veszélyt.

Az imént bemutatott példánál felvettük a körfrekvenciát és a független tömeg értékét számítottuk ki. E módszerrel még számos példát lehet megoldani, amelyeket azonban e helyen nem sorolunk fel. De felhívjuk a figyelmet arra, hogy a motorhoz tartozó tömegek tehetetlenségi nyomatékának változtatásával is el lehet kerülni a kritikus lengéseket. Tehát végeredményben e módszer felhasználásával változtathatjuk a független tömegeket, változtathatjuk a motor tömegeit vagy esetleg mind a kettőt aszerint, amint azt a kívánt eredmény elérése szükségessé teszi. Azáltal, hogy a számításokban minden tömeg és a hozzátartozó merevségi tényező mint önálló egyed szerepel, módunkban áll helyes felvételek útján azt az eredményt kihozni, amely kívánatos, fontos és szükséges.