

KÖRHENGERFELÜLETEK ESZTERGÁLYOZÁSÁNÁL FELLÉPŐ KÖRALAK-HIBÁRÓL

LIPKA ISTVÁN

SZERSZÁMGÉPIPARI MŰVEK FEJLESZTŐ INTÉZETE, HALÁSZTELEK

Dr. H. BERTHOLD professzor a Budapesten tartott, 1964. évi *V. Szerszámgép Kongresszuson* elmondott előadásában megemlítette azt a kísérleti eredményt, amely szerint egy vagy több hordfelületű siklócsapágycsoportok esetében az esztergált körhengerfelület köralak-hibája általában csökken, ha az eszterga főorsó siklócsapágycsoportjának Sommerfeld-féle száma csökken. A tanulmányban a szerző megmutatja, hogy ez a kísérleti eredmény arra az esetre, amikor a főorsócsapágycsoport közönséges siklócsapágycsoport, tisztán elméleti úton: analitikusan is levezethető. A levezetés a siklócsapágycsoport forgó csap közép pontjának pályagörbéjét meghatározó differenciálegyenletekből indul ki és összefüggést állapít meg a pályagörbeváltozás és a csapágycsoport jellemző Sommerfeld-féle szám változása között.

Az esztergán megmunkált körhenger-alakú munkadarab keresztmetszete a pontos kör alaktól bizonyos mértékben eltér, azaz a keresztmetszetben ún. körhiba jelentkezik. A pontos kör alaktól való eltérésnek egyik okozója a főorsó tengelyvonalának a főorsó forgásakor fellépő térbeli helyzet ingadozása, amely a munkadarab sugárméretében változást okoz. Az orsó keresztmetszetének középpontja, a tengelyközéppont az orsó forgásakor görbét ír le, amelyet a tengelyközéppont pályagörbéjének neveznek. A pályagörbe egyes pontjainak távolsága a szerszám csúcsától szolgáltatja a munkadarab keresztmetszetének r_1, r_2, r_3, \dots sugárméreteit (1. ábra).

A legnagyobb és a legkisebb sugárméret különbsége:

$$r_{\max} - r_{\min}$$

a körhibával egyenlő (1. részletesebben [1, 2]). Abban az esetben, amikor a tengelycsap közép pontjának a mozgását (helyzet ingadozását) meghatározó feltételek úgy változnak meg, hogy a középpont által leírt új pályagörbe az eredeti pályagörbének a belsejébe esik, akkor az új helyzetben fellépő körhiba kisebb lesz, mint az eredeti helyzetben (2. ábra). Az eredeti helyzetben a körhiba: $r_{\max} - r_{\min}$, az új helyzetben pedig: $\varrho_{\max} - \varrho_{\min}$. Mivel a 2. ábra szerint

$$r_{\max} > \varrho_{\max}$$

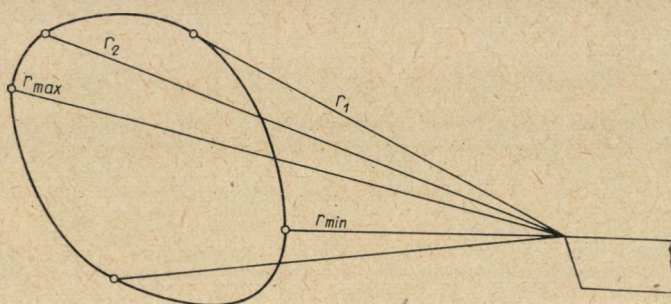
és

$$r_{\min} < \varrho_{\min}$$

azért az első egyenlőtlenségből a másodikat levonva

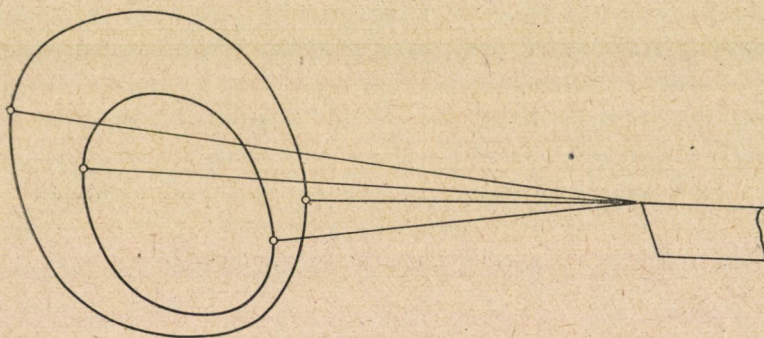
$$r_{\max} - r_{\min} > \varrho_{\max} - \varrho_{\min},$$

vagyis az új helyzetben a körhiba kisebb, mint az eredetiben.



1. ábra

Prof. Dr. H. BERTHOLD az *V. Szerszámgép Kongresszuson* tartott előadásában [1, 2] megemlítette azt a kísérleti eredményt, amely szerint egy-vagy több hordfelületű siklócsapágyak esetében az esztergált felület köralak-



2. ábra

hibája általában csökken, ha az eszterga főorsó csapágyának Sommerfeld-féle száma csökken.

A Sommerfeld-féle szám definíciója a következő:

$$S_0 = \left(\frac{c}{r} \right)^2 \frac{P}{\mu N},$$

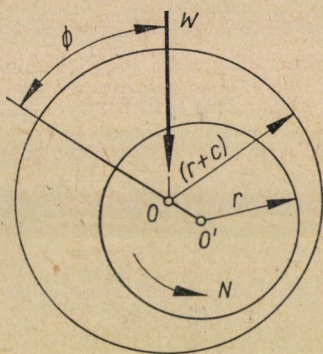
ahol c a radiális irányú csapágyhézag, r a csapágyban futó tengelycsap sugara; μ az abszolút viszkozitás; N a tengelycsap fordulatszáma másodpercenként és

P a csapágyfelület vetületének (a diametrális sík) egységnyi területére eső terhelés.

Ebben a tanulmányban megmutatjuk, hogy az a kísérleti eredmény, amely szerint az esztergályozásnál fellépő körhiba csökken, ha a főorsó csapágyhoz tartozó Sommerfeld-féle szám csökken, a forgó csap középpontjának pályagörbét meghatározó differenciálegyenletek alapján, tisztán analitikus úton levezethető.

Tekintsünk egy W terhelésű siklócsapágyat, ahol O a csapágy középpontja és O' a változó helyzetű tengelycsap középpontja (3. ábra). Az ábrán r a csapágyban futó csap sugara; c a radiális csapágyhézag; $2(r + c)$ a csapágy-átmérő. A csap O' középpontjának a helyét az

$$OO' = e$$



3. ábra

excentricitás és a Φ helyzetszög határozza meg. Tehát a csapközéppont által leírt pályagörbe pontjainak a (Φ, e) értékpárok felelnek meg. A pályagörbe analitikus vizsgálatánál célszerű az ún. relatív pályagörbét tekinteni, amelynek pontjait a Φ helyzetszög és az

$$n = \frac{e}{c}$$

rádiuszvektor, az ún. relatív excentricitás határozza meg. A relatív pályagörbe pontjainak n rádiuszvektoraira nyilván fennáll, hogy:

$$n < 1.$$

A Φ és n között fennálló függvénykapcsolat a csapközéppont által leírt relatív pályagörbe egyenletét szolgáltatja.

Tegyük fel, hogy egy egyszerű hengeres siklócsapágyban a csap állandó szögsebességgel forog (N fordulatszám állandó), továbbá, hogy a csapágy állandó

nagyságú és irányú terhelésnek van alávetve. Az ilyen csapágyra a zárt pályagörbét leíró csapközéppontnak a mindenkori helyét a siklócsapágyak elmélete szerint a következő differenciálegyenlet-pár határozza meg:

$$P \cos \Phi = 6\pi\mu \left(\frac{r}{c}\right)^2 \frac{1}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dn}{dt} \quad (1)$$

és

$$P \sin \Phi = 6\pi\mu \left(\frac{r}{c}\right)^2 \frac{n}{(2+n^2)(1-n^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\omega_1 - 2 \frac{d\Phi}{dt}\right) \quad (2)$$

([3], 226. old.), ahol ω_1 a forgó csap szögsebessége, a többi betű jelentése pedig ugyanaz, mint az előzőekben. Az (1) és (2) egyenlet segítségével meghatározható a csapközéppont Φ és n koordinátái közötti összefüggés, vagyis a csapközéppont relatív pályagörbéjének az egyenlete. Vezessük be a következő rövidítő jelölést:

$$\kappa = 6\pi\mu \left(\frac{r}{c}\right)^2.$$

Ekkor az (1) egyenletből

$$\frac{dn}{dt} = \frac{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}{\kappa} P \cos \Phi, \quad (1')$$

a (2) egyenletből pedig

$$2 \frac{d\Phi}{dt} = \omega_1 - \frac{(2+n^2)(1-n^2)^{\frac{1}{2}} P \sin \Phi}{\kappa n}. \quad (2')$$

Mivel

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{d\Phi}{dt} : \frac{dn}{dt}, \quad \left(\frac{dn}{dt} \neq 0\right);$$

azért az (1') és (2')-ből:

$$2 \frac{d\Phi}{dn} = \left(\omega_1 - \frac{(2+n^2)(1-n^2)^{\frac{1}{2}} P \sin \Phi}{\kappa n} \right) \frac{\kappa}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}} P \cos \Phi}.$$

Az utóbbi egyenlet a következő alakban is felírható:

$$\frac{d\Phi}{dn} \cos \Phi = \frac{\omega_1 \kappa}{2(1-n^2)^{\frac{3}{2}} P} - \frac{(2+n^2) \sin \Phi}{2n(1-n^2)}.$$

Mivel ennek az egyenletnek bal oldalára fennáll, hogy:

$$\frac{d\Phi}{dn} \cos \Phi = \frac{d \sin \Phi}{dn},$$

azért

$$\frac{d \sin \Phi}{dn} = \frac{\omega_1 \kappa}{2(1-n^2)^{\frac{3}{2}} P} - \frac{(2+n^2) \sin \Phi}{2n(1-n^2)}$$

Ha ide bevezetjük az:

$$y = \sin \Phi$$

jelölést, ahol y az n függvénye, akkor az

$$\frac{dy}{dn} + \frac{(2+n^2)y}{2n(1-n^2)} = \frac{\kappa \omega_1}{2(1-n^2)^{\frac{3}{2}} P}$$

lineáris elsőrendű differenciálegyenletet nyerjük, amelynek megoldása:

$$y = e^{-\int \frac{2+n^2}{2n(1-n^2)} dn} \left\{ \int \frac{\kappa \omega_1}{2(1-n^2)^{\frac{3}{2}} P} e^{\int \frac{2+n^2}{2n(1-n^2)} dn} dn + C \right\}.$$

Mint hogy a kitevőben fellépő integrál

$$\int \frac{2+n^2}{2n(1-n^2)} dn = \ln \frac{n}{(1-n^2)^{\frac{1}{4}}},$$

azért

$$\begin{aligned} \int \frac{\kappa \omega_1}{2(1-n^2)^{\frac{3}{2}} P} \cdot e^{\int \frac{2+n^2}{2n(1-n^2)} dn} dn &= \frac{\kappa \omega_1}{2P} \int \frac{n}{(1-n^2)^{\frac{5}{4}}} dn = \\ &= \frac{\kappa \omega_1}{2P} \frac{2}{5} \frac{1}{(1-n^2)^{\frac{5}{4}}} = \frac{\kappa \omega_1}{5P} \frac{1}{(1-n^2)^{\frac{5}{4}}}. \end{aligned}$$

Ezek szerint az előbbi differenciálegyenlet megoldása:

$$y = \frac{(1-n^2)^{\frac{1}{4}}}{n} \left\{ \frac{\kappa \omega_1}{5P} \frac{1}{(1-n^2)^{\frac{5}{4}}} + C \right\},$$

ahová beírva $\kappa = 6\pi\mu \left(\frac{r}{c}\right)^2$ és $y = \sin \varphi$ jelentését:

$$\sin \varphi = 6\pi\mu \left(\frac{r}{c}\right)^2 \frac{\omega_1}{5Pn(1-n^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{C(1-n^2)^{\frac{3}{4}}}{n}.$$

Az így nyert egyenlet fejezi ki a csapközpont Φ és n koordinátái közötti összefüggést, ahol a C integrálási állandó értéke a csap kiinduló helyzetétől

függ. A forgócsap szögsebességének

$$\omega_1 = 2\pi N$$

kifejezését, továbbá a Sommerfeld-szám

$$S_0 = \left(\frac{c}{r}\right)^2 \frac{P}{\mu N}$$

képletéből adódó

$$\mu \left(\frac{r}{c}\right)^2 = \frac{P}{S_0 N}$$

értéket a nyert egyenletbe írva, az végül a következő alakú lesz:

$$\sin \Phi = \frac{12\pi^2}{5S_0 n(1-n^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{C(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}{n}. \quad (3)$$

Ez a csapközéppont által leírt zárt görbék kétparaméteres seregének az egyenlete, ahol S_0 és C a két paraméter.

S_0 a Sommerfeld-féle szám, a C integrálási állandó pedig a csapközéppont kiinduló helyzetét határozza meg. Ha S_0 és C értéke adott, akkor a (3) alatti egy meghatározott zárt görbének (relatív pályagörbének) a polárkoordinátás egyenlete, mivel (3)-ból az egyes Φ helyzetszög értékekhez tartozó n rádiuszvektorok meghatározhatók. A Φ és n közötti összefüggésnek a vizsgálata céljából, tekintsük először a $C = 0$ -nak megfelelő pályagörbéket. Ezeknek a pályagörbének az egyenlete (3) szerint a következő alakú:

$$\sin \Phi = \frac{12\pi^2}{5S_0 n(1-n^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4)$$

Ha ebbe az egyenletbe rövidség kedvéért bevezetjük az

$$a = \frac{12\pi^2}{5S_0} \quad (5)$$

jelölést, akkor n -re a következő negyedfokú egyenletet nyerjük:

$$\sin^2 \Phi n^4 - \sin^2 \Phi n^2 + a^2 = 0, \quad (6)$$

ahonnan az n rádiuszvektorra (relatív excentricitásra) a következő két érték adódik:

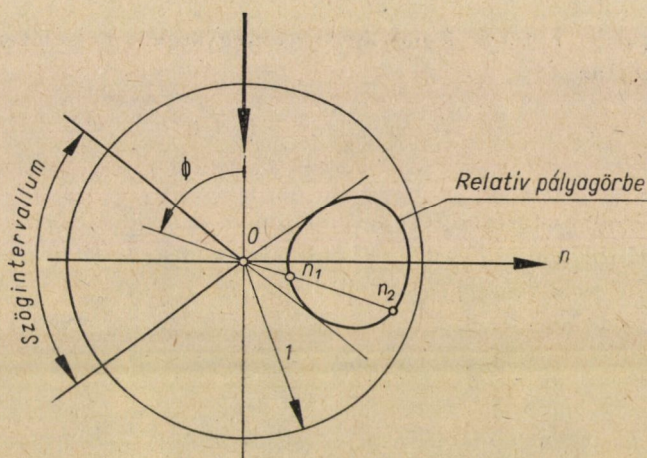
$$n = \sqrt{\frac{\sin \Phi \pm \sqrt{\sin^2 \Phi - 4a^2}}{2\sin \Phi}}. \quad (6')$$

A Φ helyzetszög-értékhez tartozó, a (6')-ből kiszámított két rádiuszvektor, n_1 és n_2 értéke akkor pozitív, ha:

$$\sin^2 \Phi - 4a^2 > 0,$$

vagyis, ha a (6) alatti egyenlet diszkriminánsa pozitív. Ebben az esetben:

$$\sin \Phi > 2a,$$



4. ábra

ami azonban csak akkor áll fenn, ha a Φ szög a következő szögintervallumba esik:

$$\pi - \arcsin 2a > \Phi > \arcsin 2a \quad (7)$$

(4. ábra).

Mivel azonban $\sin \Phi \leq 1$, azért a $\sin \Phi > 2a$ egyenlőtlenség csak abban az esetben teljesülhet, ha

$$2a < 1,$$

vagy a -nak (5) alatti jelentését figyelembe véve, ha az S_0 Sommerfeld-számra fennáll, hogy:

$$S_0 > \frac{24 \pi^2}{5} \approx 47,374.$$

Ezek szerint tehát arra az eredményre jutottunk, hogy az

$$S_0 > \frac{24\pi^2}{5}; \quad C = 0$$

paraméter-párokhoz tartozó, (4)-nek megfelelő relatív pályagörbék olyanok, hogy minden a (7) alatti intervallumba eső Φ helyzetszöghöz két: n_1 és n_2 pozitív rádiuszvektor tartozik, és így a relatív pályagörbe az egységkör belsejében úgy helyezkedik el, hogy az O kezdőpont a görbe külsejébe esik (4. ábra). Ugyanis a (6') egyenlethől következik, hogy

$$n = \sqrt{\frac{\sin \Phi \pm \sqrt{\sin^2 \Phi - 4a^2}}{2\sin \Phi}} < \sqrt{\frac{\sin \Phi + \sin \Phi}{2\sin \Phi}} = 1,$$

azaz $n_1 < 1$; $n_2 < 1$, tehát a pályagörbe az egységkör belsejében fekszik. Tekintsük ezeket az

$$S_0 > \frac{24\pi^2}{5}; \quad C = 0$$

paraméter-párokhoz tartozó, (4)-nek megfelelő pályagörbék, amikor is a (6) egyenlet diszkriminánsa pozitív. Ebben az esetben, ha a (6) alatti egyenlet baloldalán álló polinomot $f(n)$ -nel jelöljük, azaz

$$f(n) = \sin^2 \Phi n^4 - \sin^2 \Phi n^2 + a^2,$$

akkor az $f(n)$ függvény menetét az 5a. ábra mutatja, ahonnan látható, hogy $f(n)$ a $(0, n_1)$ intervallumban pozitív, az (n_1, n_2) intervallumban negatív és az $(n_2, 1)$ intervallumban megint pozitív értékeket vesz fel. A tekintetbe vett pályagörbéknek az összességéből vegyünk két pályagörbét, amelyek olyan

$$S_0 > \frac{24\pi^2}{5}; \quad C = 0,$$

illetve

$$S'_0 > \frac{24\pi^2}{5}; \quad C = 0$$

paraméter-párokhoz tartoznak, amelyekre fennáll, hogy

$$S_0 > S'_0,$$

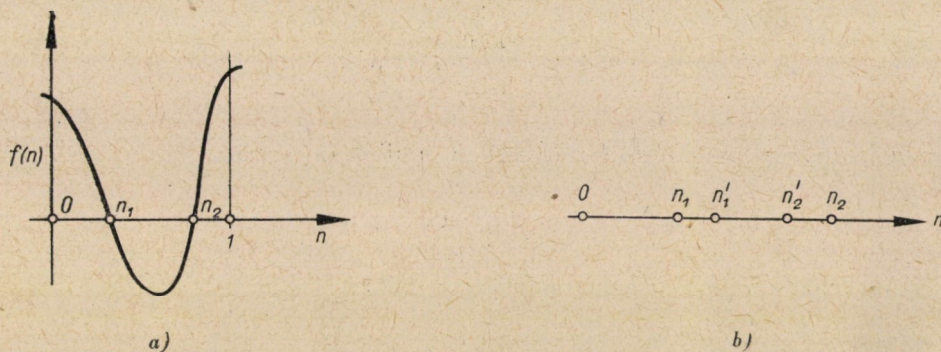
Ha most egy Φ helyzetszög-értéket tekintünk, amely a (7) intervallumba esik, akkor az $(S_0, C = 0)$ paraméterpárnak megfelelő görbének két rádiuszvektora: n_1 és n_2 tartozik Φ -hez a (6') szerint. Az $(S'_0, C = 0)$ paraméterpárnak megfelelő görbének pedig az n'_1 és n'_2 rádiuszvektorokkal meghatározott két pontja fog a Φ helyzetszöghöz tartozni, ahol n'_1 és n'_2 a (6')-ből adódik,

ha abban az a helyébe

$$a' = \frac{12\pi^2}{5S'_0}$$

értéket írunk. Megmutatjuk, hogy az előbbi négy rádiuszvektorra fennáll a következő elrendezés

$$n_1 < n'_1 < n'_2 < n_2$$



5. ábra

(5b. ábra). Írjunk be a (6) alatti bal oldalába, vagyis az $f(n)$ polinomba $n = n'_1$ értéket, akkor

$$f(n'_1) = \sin^2 \varphi n_1'^4 - \sin^2 \varphi n_1'^2 + a^2. \quad (6'')$$

Mivel n'_1 kielégíti a (6) alatti egyenletet, ha abban a helyett a' áll, azért (6)-ból

$$\sin^2 \varphi n_1'^4 - \sin^2 \varphi n_1'^2 = -a'^2.$$

Ezt az értéket a (6'') alatti kifejezésbe helyettesítve

$$f(n'_1) = -a'^2 + a^2;$$

de (5) alapján $a' > a$, mivel $S'_0 < S_0$ és így

$$f(n'_1) < 0.$$

Tehát az $f(n)$ függvény az $n = n'_1$ helyen negatív, ami az 5a. ábra szerint azt jelenti, hogy n'_1 az (n_1, n_2) intervallumba esik. Ugyanígy következik, hogy n'_2 is az (n_1, n_2) intervallumba esik (5b. ábra). Mivel az előbbi megfontolás a (7) szögintervallumba eső bármely Φ helyzetszögre érvényes, végül is azt nyerjük, hogy az S'_0 és $C = 0$ paraméterpárnak megfelelő pályagörbe az $(S_0, C = 0)$ paraméterpárnak megfelelő pályagörbe belsejében fekszik, amennyiben $S'_0 <$

$< S_0$. Ez a 2. ábrához tartozó meg gondolás értelmében éppen azt mondja, hogy ha a Sommerfeld-szám csökken, akkor a körhiba is csökken.

Ezzel a körhiba csökkenésére vonatkozó állításunkat olyan pályagörbékre bizonyítottuk be, amelyek az

$$S_0 > \frac{24\pi^2}{5}; C = 0$$

paraméterpároknak felelnek meg. Az

$$S_0 = \frac{24\pi^2}{5}; C = 0$$

paraméterpárnak megfelelő határesetben, amikor (5) szerint:

$$2a = 1,$$

a (7) intervallum ponttá zsugorodik össze, mivel

$$\arcsin 2a = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Ekkor a Φ helyzetszög értéke csakis

$$\Phi = \frac{\pi}{2}$$

lehet, amelyhez — mivel most $\sin^2 \Phi - 4a^2 = 0$ — a (6') szerint az

$$n = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707\dots$$

rádiuszvektor tartozik. Tehát az

$$S_0 = \frac{24\pi^2}{5}; C = 0$$

paraméterpárnak megfelelő pályagörbe az $n = 0,707$ koordinátájú ponttá zsugorodik össze, és ez a határeset megfelel az egyensúlyi helyzetnek.

Ezek után vegyük szemügyre az olyan (S_0, C) paraméterpároknak megfelelő pályagörbét, amelyekre fennáll, hogy:

$$\frac{12\pi^2}{5S_0} + C > 0,$$

vagy ami az (5) alatti figyelembevételével ugyanaz, azokat a pályagörbét, amelyekre

$$a + C > 0. \quad (8)$$

Írjuk fel a pályagörbék (3) alatti egyenletét 0-ra redukált alakban:

$$\frac{a}{n(1-n^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{C(1-n^2)^{\frac{3}{4}}}{n} - \sin \Phi = 0, \quad (3')$$

ahol a bal oldalon álló függvényt jelölje

$$f(n) = \frac{a}{n(1-n^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{C(1-n^2)^{\frac{3}{4}}}{n} - \sin \Phi. \quad (3'')$$

Vizsgáljuk az $f(n)$ függvény menetét a (0,1) számközben és ebből a célból számítsuk ki az $f(n)$ deriváltját:

$$f'(n) = - \frac{a(1-2n^2) + C \left(1 + \frac{1}{2}n^2\right) (1-n^2)^{\frac{5}{4}}}{n^2 (1-n^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3''')$$

Az $f'(n)$ derivált függvényről kimutatjuk, hogy az a (0,1) számközben csak egyszer tűnik el. Nyilvánvaló, hogy $f'(n)$ ott tűnik el, ahol (3''') számlálója nulla, vagyis az

$$a(1-2n^2) + C \left(1 + \frac{1}{2}n^2\right) (1-n^2)^{\frac{5}{4}} = 0$$

egyenlet gyökhelyein. Ha ennek az egyenletnek bal oldala röviden

$$\varphi(n) = a(1-2n^2) + C \left(1 + \frac{1}{2}n^2\right) (1-n^2)^{\frac{5}{4}},$$

akkor — mivel a $\varphi(n)$ függvény deriváltja

$$\varphi'(n) = - \{4an + C(1,5 + 2,25n^2)n(1-n^2)^{\frac{5}{4}}\}$$

a (0,1) intervallumban mindenütt negatív — azért $\varphi(n)$ a 0-tól 1-ig monoton csökken. Ennélfogva, tekintettel arra, hogy feltétel szerint

$$\varphi(0) = a + C > 0;$$

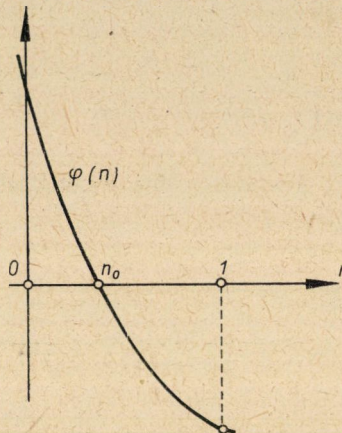
$$\varphi(1) = -a < 0,$$

a $\varphi(n)$ függvény menetét a $(0,1)$ intervallumban a 6. ábra mutatja. Eszerint a $\varphi(n)$ függvény, azaz $f'(n)$ számlálója a $(0,1)$ intervallumban pontosan egyszer tűnik el. Tehát maga az $f'(n)$ függvény is pontosan egyszer tűnik el a $(0,1)$ intervallumban, annak valamelyik n_0 -helyén. Jelentsen ε kis pozitív számot, akkor $f'(n)$ (3''') alatti kifejezéséből adódik, hogy

$$f'(\varepsilon) \approx -(a + C) < 0$$

és az $n = 1 - \varepsilon$ helyen

$$f'(1 - \varepsilon) \approx a > 0;$$



6. ábra

amelyekből következik, hogy $f'(n)$ a $(0, n_0)$ intervallumban negatív, az $(n_0, 1)$ intervallumban pozitív. Ebből meg az következik, hogy az $f(n)$ függvény 0-tól n_0 -ig csökken és n_0 -tól 1-ig növekszik. Mivel pedig (3'') alattiból

$$f(0) = f(1) = +\infty,$$

azért $f(n)$ függvény menete olyan, hogy legfeljebb kétszer szeli át az n -tengelyt. De az előzőekben tárgyalt abban az esetben, amikor a paraméterek megfeleltek az

$$S_0 > \frac{24\pi^2}{5} \quad \text{és} \quad C = 0$$

feltételeknek, vagy ami ugyanaz, az

$$a < \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad C = 0$$

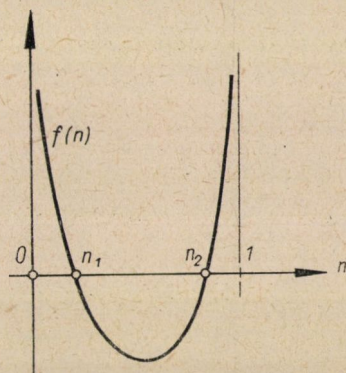
feltételnek, az $f(n)$ -nek a menete olyan volt, hogy valóban kétszer szelte át az n -tengelyt (5a. ábra), ezért megfelelő a és C -re, amikor még a (8) alatti $(a + C)$

> 0 feltétel is teljesül, az $f(n)$ görbe kétszer fogja átszelni az n -tengelyt (7. ábra). Ebben az esetben a (3') egyenletnek (3'') szerint, két pozitív gyöke van: n_1 és n_2 . Ha most az S_0 Sommerfeld-szám értékét csökkentjük, vagyis S_0 helyett az

$$S'_0 < S_0$$

értéket vesszük, akkor az S'_0 -nek megfelelő a' -re (5) értelmében fennáll, hogy

$$a' > a.$$



7. ábra

Írjunk (3')-ben a helyett a' -t és jelöljük a (3') pozitív gyökeit n'_1 és n'_2 -vel, akkor (3')-ből $n = n'_1$ -re adódik a következő kifejezés:

$$\frac{C(1 - n_1'^2)^{\frac{3}{2}}}{n_1'} - \sin \Phi = - \frac{a'}{n_1'(1 - n_1'^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (9)$$

Ezután a (3'')-ben $n = n'_1$ értéket írva:

$$f(n'_1) = \frac{a}{n_1'(1 - n_1'^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{C(1 - n_1'^2)^{\frac{3}{2}}}{n_1'} - \sin \Phi,$$

ahová a jobb oldalon álló második és harmadik tag helyett a (9) alatti kifejezést bevezetve nyerjük, hogy

$$f(n'_1) = \frac{a}{n_1'(1 - n_1'^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a'}{n_1'(1 - n_1'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a - a'}{n_1'(1 - n_1'^2)^{\frac{1}{2}}} < 0.$$

Ez a 7. ábra alapján azt jelenti, hogy n'_1 az n_1 és n_2 között fekszik. Ugyanígy látható be az, hogy n'_2 is az (n_1, n_2) számközbe esik, vagyis, hogy fennállnak

a következő egyenlőtlenségek:

$$n_1 < n'_1 < n'_2 < n_2.$$

Az itt felírt egyenlőtlenségek azonban az összes Φ helyzetszögértékekhez tartozó (n_1, n_2) és (n'_1, n'_2) rádiuszvektor-párokra érvényesek, amiből következik, hogy a (8) feltétel fennállása esetében az (S_0, C) paraméterpárnak megfelelő pályagörbének a belsejében fekszik az (S'_0, C) -nek megfelelő pályagörbe, ha $S'_0 < S_0$. Ebből végül ugyanúgy, mint az előzőkben, az adódik, hogy a körhiba csökken, ha a Sommerfeld-szám csökken.

Eddig az olyan (S_0, C) paraméterpároknak megfelelő pályagörbét tekinttük, amelyek eleget tettek a (8) alatti

$$a + C > 0$$

feltételnek, vagy ami az (5) értelmében ugyanaz, az olyan (S_0, C) paraméterpárokhoz tartozó görbéket, amelyekre

$$C > -\frac{12\pi^2}{5S_0}.$$

Most vizsgáljuk azokat a pályagörbéket, amelyekre

$$a + C < 0.$$

Ekkor az előző megfontolásokban szereplő

$$\varphi(n) = a(1 - 2n^2) + C \left(1 + \frac{1}{2}n^2 \right) (1 - n^2)^{\frac{5}{4}}$$

függvény, mivel most $a + C < 0$ a 6. ábra szerint az egész $(0,1)$ intervallumban negatív, és így az

$$f'(n) = -\frac{\varphi(n)}{n^2(1 - n^2)^{\frac{3}{2}}}$$

összefüggés szerint $f'(n)$ az egész $(0,1)$ intervallumban pozitív, amiből az következik, hogy $f(n)$ függvény $n = 0$ -tól $n = 1$ -ig monoton nő. De (3'') szerint

$$f(n) = \frac{a + C(1 - n^2)^{\frac{5}{4}} - n(1 - n^2)^{\frac{1}{2}} \sin \Phi}{n(1 - n^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (10)$$

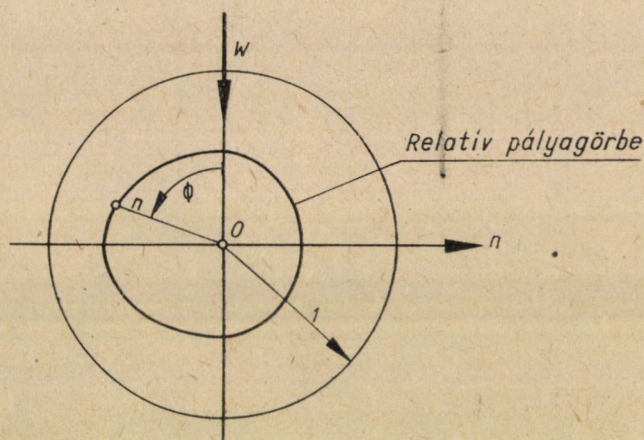
ahonnan egy igen kis ε -ra ($\varepsilon > 0$)

$$f(\varepsilon) \approx \frac{a + C}{\varepsilon} < 0; \quad f(1 - \varepsilon) \approx \frac{a}{(1 - \varepsilon)(2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} > 0, \quad (11)$$

amiből közvetlenül belátható, hogy $f(n)$ függvény menete olyan, hogy a $(0,1)$ intervallumban pontosan egyszer szeli át az n -tengelyt, vagyis $(3')$ alatti egyenletnek pontosan egy gyöke van 0 és 1 között. Tehát, ha $(a + C) < 0$, akkor minden Φ helyzetszöghöz $(0 \leq \Phi < 2\pi)$ egy n rádiuszvektor-érték tartozik, és ez azt jelenti, hogy a $0 > (a + C)$ -nek megfelelő relatív pályagörbének a helsejében fekszik az O kezdőpont (8. ábra).

Jelölje jelen esetben a $(3')$ alatti egyenlet egyetlen pozitív gyökét: $n_0 \cdot n = n_0$ -ra a (10) alatti számlálója

$$a + C(1 - n_0^2)^{\frac{5}{4}} - n_0(1 - n_0^2)^{\frac{1}{2}} \sin \Phi = 0.$$



8. ábra

Ha a (10) alatti számlálójában álló függvényt

$$g(n) = a + C(1 - n^2)^{\frac{5}{4}} - n(1 - n^2)^{\frac{1}{2}} \sin \Phi$$

jelöli, akkor (11) értelmében

$$g(n) < 0, \text{ ha } n < n_0 \quad (12)$$

és

$$g(n) > 0, \text{ ha } n > n_0.$$

Most Φ helyzetszög értékét változatlanul hagyva, csökkentsük az S_0 Sommerfeld-számot S'_0 -re:

$$S'_0 < S_0.$$

Az S'_0 -höz tartozzék az (5) alatti

$$a' > a$$

számérték. Ha erre az a' -re a (3') alatti egyenlet egyetlen pozitív gyöke n'_0 , akkor

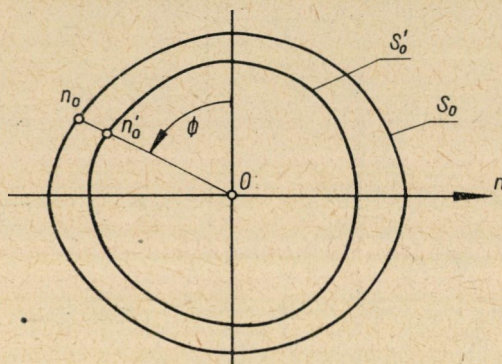
$$0 = a' + C(1 - n_0'^2)^{\frac{5}{4}} - n'_0(1 - n_0'^2)^{\frac{1}{2}} \sin \Phi,$$

amit a

$$g(n'_0) = a + C(1 - n_0'^2)^{\frac{5}{4}} - n'_0(1 - n_0'^2)^{\frac{1}{2}} \sin \Phi$$

kifejezésből kivonva:

$$g(n'_0) = a - a' < 0.$$



9. ábra

Eszerint a (12) alatti értelmében minden Φ helyzetszögre

$$n'_0 < n_0,$$

vagyis az S'_0 -re csökkentett Sommerfeld-számnak megfelelő pályagörbe most is az S_0 -nak megfelelő görbe belsejében fekszik (9. ábra). Tehát az előzőekben végzett megfontolások értelmében a $0 > (a + C)$ -hez tartozó pályagörbékre is igaz, hogy a Sommerfeld-szám csökkenésével a körhiba is csökken.

Végül az

$$a + C = 0.$$

feltételnek megfelelő pályagörbét tekintve, könnyen belátható, hogy azok az O kezdőponton mennek át és, hogy az ilyen pályagörbékre is pontosan az előbbieken végzett megfontolásokkal kimutatható, hogy a Sommerfeld-szám csökkenésével a körhiba is csökken.

IRODALOM

1. Dr. BERTHOLD, H.: Precíziós szerszámgépek szerkezetének fejlődése. V. Szerszámgép Kongresszus előadásai, Budapest 1964.
2. Dr. BERTHOLD, H.: Haladó módszerek a precíziós szerszámgépek tervezésében. *Gép* 17 (1965), 6.
3. SHAW, M. C.—MACKS, F.: Analysis and Lubrication of Bearings, 1949.