VÉKONYFALÚ, FELFÜGGESZTETT GERENDÁK KIFORDULÁSA

KOLLÁR LAJOS
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA
BUDAPESTI VÁROSÉPÍTÉSI TERVEZŐ VÁLLALAT

és

GÁRDONYI ZOLTÁN
UVATERV ÚT- ÉS VASÚTTERVEZŐ VÁLLALAT

[Beérkezett 1966. április 18-án]

A dolgozat vékonyfalú, két végén felfüggesztett gerendák kifordulást okozó terhét határozza meg a rugalmasságtan energia-módszere alapján. Az eljárás tetszőleges keresztmetszetű és terhelésű gerendákra alkalmazható. Szerzők azonban csak egyenletesen terhelt olyan gerendákra mutatják be az eljárás alkalmazását, amelyek keresztmetszetének a nyomott felső oldalon szabad széle van. Szabad és diafragmás végű gerendák kifordító terhére képleteket vezetnek le, s megvizsgálják, hány tagú alakváltozás-föggvényt kell felvenni kellően pontos eredmény eléréséhez. A szimmetrikus alakváltozáson felül az antimetrikus alakváltozás lehetőségét is megvizsgálják. Végül összehasonlító számpéldát mutatnak be.

1. Bevezetés

1.1. A feladat leírása

Egyenestengelyű, vékonyfalú, egyszeresen szimmetrikus, nyitott keresztmetszetű gerendák (1. ábra) kifordulását fogjuk vizsgálni az energia-módszer segítségével. A bemutatandó módszer változó keresztmetszet és a gerenda tengelye mentén tetszőleges törvény szerint megoszló teher esetére is érvényes, de ebben a dolgozatban csak állandó keresztmetszetű és falvastagságú, egyenletesen megoszló teherrel terhelt gerendák esetét tárgyaljuk.

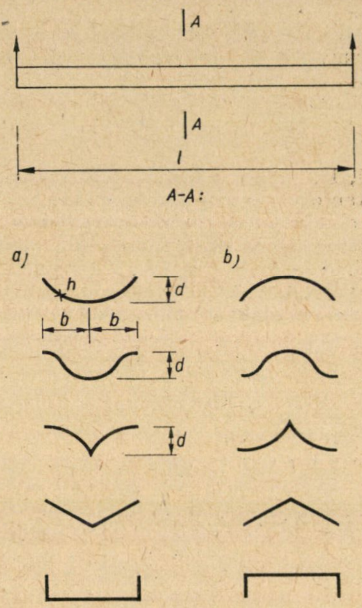
A gerenda a két végén fel van függesztve és a felfüggesztési pontok összekötő egyenese körül szabadon elfordulhat. Ez a támasztásmód megfelel az előregyártott gerendák beemelési állapotának.

1.2. Irodalmi áttekintés

Vékonyfalú, tetszőleges teherrel terhelt gerendák kifordulásának egyenleteit Chwalla [3] vezette le, de csak az ún. *„villás megtámasztás"* esetére. (Ez olyan kényszert jelent, mely megakadályozza a végkeresztmetszetek elcsavarodását, de mind függőleges, mind vízszintes síkban lehetővé teszi az elfordulást.) Chwalla alapján *Meissner* [9] több konkrét esetet oldott meg.

Felfüggesztett gerendák kifordulását először *Csonka* vizsgálta [4, 2], de csak *derékszögű négy*szög keresztmetszet esetére. Ismeretes azonban, hogy a *vékonyfalú* gerendák viselkedése nagymértékben eltér a derékszögű négyszögkeresztmetszetűekétől, egyrészt, mivel nyírásközéppontjuk kiesik a súlypontból, másrészt, mivel a keresztmetszet vékonyfalú volta is megváltoztatja az erőjátékot.

Lebelle [7] megoldotta a felfüggesztett aszimmetrikus I-tartók kifordulásának problémáját, de levezetése az I-tartó különleges tulajdonságaira épül, így nem általánosítható az 1. ábrán vázolt keresztmetszetű gerendákra.



1. ábra

1.3. *Új eredmények*

Dolgozatunk a következőkben ad újat az eddigi eredményekhez képest:

a) a két végén *felfüggesztett* gerenda kritikus hajlítónyomatékát *általános vékonyfalú keresztmetszet* esetére is meghatározza,

b) megoldja a feladatot a két végén *diafragmával* merevített gerenda esetére is,

c) kimutatja, hogy a számítás során *nem elég csak egy tagot* figyelembe venni az alakváltozásfüggvény Fourier-sorából.

1.4. *Feltevések*

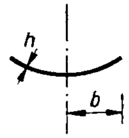
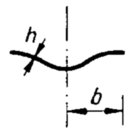
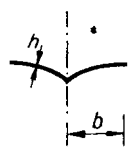
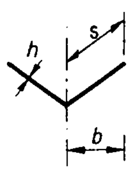
a) A gerenda *anyaga* tökéletesen rugalmas;

b) a gerenda *keresztmetszete* vékonyfalú, nyitott, szimmetrikus, alakja kifordulás közben is változatlan marad;

c) a gerenda *hajlítási merevsége* a *függőleges* síkban olyan nagy, hogy a gerendatengelynek a kifordító teher-okozta meggörbülése elhanyagolható;

d) a *teher* függőleges, s a gerenda szimmetriasíkjában, tetszőleges magasságban hat. Keresztirányú eloszlását nem kötjük meg, de feltételezzük, hogy a

I. táblázat

A keresztmetszet alakja:		Keresztirányú hajlítónyomaték a szimmetriasíkban:	Maximális nyírófeszültség a súlyponti tengelyben:
Lapos körív (parabola):		$d\,I \quad -0{,}1875pb^2$	$0{,}722pl\frac{b}{dh}$
Lapos hullám:		$d\,I \quad -0{,}405pb^2$	$0{,}638pl\frac{b}{dh}$
Lapos szárny:		$d\,I \quad -0{,}750pb^2$	$0{,}722pl\frac{b}{dh}$
Meredek \/ :		$d\,I \quad -0{,}50pbs$	$0{,}75pl\frac{s}{dh}$

belőle származó keresztirányú hajlítás nem deformálja számottevően a keresztmetszet alakját, s így az eredeti keresztmetszet-alakkal számolhatunk.

e) A teher kifordulás közben is megtartja eredeti irányát.

Minthogy a teher a valóságban többnyire a gerenda saját súlya, mely keresztirányban az ívhossz mentén egyenletesen oszlik meg, a gyakorlati számítás megkönnyítésére az *I. táblázatban* megadjuk néhány keresztmetszet esetére a középen ébredő *keresztirányú hajlítónyomatékot* az önsúly hatására.

A felületegységre jutó terhet p-vel jelöltük (kp/m²). A körív-, hullám- és a szárny-keresztmetszet hajlítónyomatékát annak feltételezésével számítottuk ki, hogy a keresztmetszet *lapos*, azaz ívhossza a vízszintes vetületével helyettesíthető. A keresztirányú hajlítónyomatékot akkor tekintjük pozitívnak, ha az alsó szálban okoz húzást. Az 1. ábra legalsó (U-) keresztmetszetét nem tüntettük fel, mivel az ismert, szilárdságtani módon egyszerűen számíthatjuk ki benne az igénybevételeket.

Ha az 1b. ábrának megfelelően *megfordítjuk* az I. táblázat gerenda-keresztmetszeteit, a keresztirányú nyomaték megtartja negatív előjelét, azaz ismét az alsó szálban okoz nyomást.

Nem foglalkozunk a gerendában ébredő membrán-nyírófeszültségek és keresztirányú hajlítónyomaték számításmódjával, mivel ezt a dongahéjakról szóló művek, pl. [8], részletesen tárgyalják.

2. Általános összefüggések

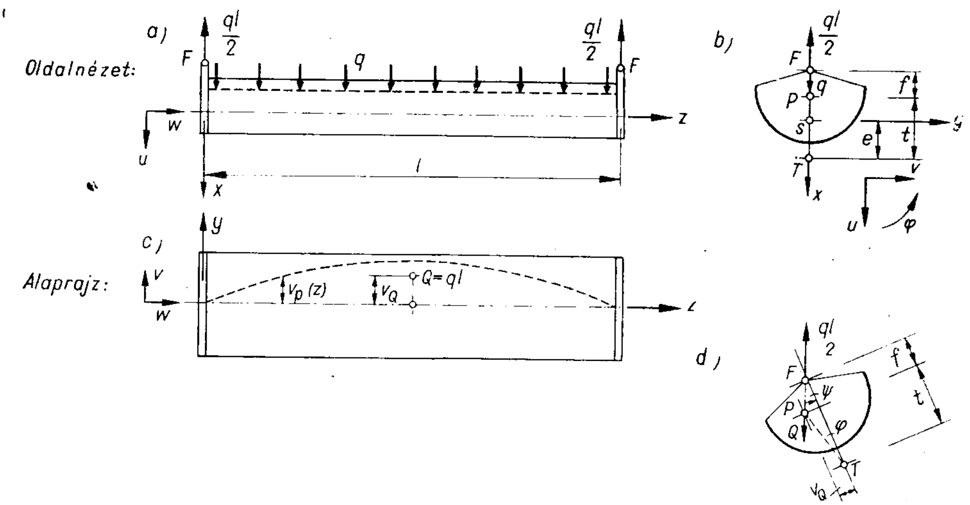
A levezetéshez szükséges jelöléseket a 2. ábrán tüntettük fel.

Az energia-módszerhez először is a kifordult tartó *belső és külső munkáját* kell felírnunk. Ezeket a céljainknak legmegfelelőbb alakban úgy kaphatjuk meg, hogy a [6]-ban görbetengelyű ívekre felírt kifejezésekben az $1/R = 0$ helyettesítést végezzük.

2.1. A belső munka kifejezése

A belső munka képlete a következő lesz:

$$L_b = \frac{C}{2}\int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 dz + \frac{C_1}{2}\int_0^l \left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)^2 dz + \frac{B_x}{2}\int_0^l \left(\frac{d^2 v_T}{dz^2}\right)^2 dz\,. \qquad (1)$$



2. ábra

$C \;\; = GI_t$ a tartó csavarási merevsége,
$C_1 = E\,I_\omega$ a tartó gátolt csavarási merevsége
a T nyírásközéppontra vonatkozóan,
$B_x = E\,I_x$ a tartó vízszintes haljítási merevsége,
az S súlyponton átmenő x tengelyre vonatkozóan.

E három mennyiség értékét néhány keresztmetszetre a 3. ábrán adtuk meg.

φ a keresztmetszetek elfordulása a T nyírásközéppontjuk körül,
v_T a T nyírásközéppontok vízszintes eltolódása. (Vö. a 2. ábrával.)

2.2. *A külső munka kifejezése*

A *külső munka* kifejezését [6]-ban az ívtengely mentén *állandó* M_0 *hajlítónyomatékra írtuk fel.* Ez $1/R = 0$ helyettesítéssel így alakul:

$$L_k' = \frac{M_0}{2}\int_0^l \left[\left(2e - d\cdot j_x^0 - \frac{b^2 j_y^0}{d}\right)\cdot\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 - \frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{dv_T}{dz}\right]dz\,. \tag{2}$$

(Pozitív hajlítónyomatéknak ebben a dolgozatban azt tekintjük, amelyik az *alsó* szálban okoz *húzást.)*

j_x^0 és j_y^0 a keresztmetszet geometriai adataitól függő állandók, a következő definíciók szerint:

$$dj_x^0 = \frac{\int x^3\,dF}{I_y}\,, \tag{3a}$$

$$\frac{b^2}{d} j_y^0 = \frac{\int xy^2\,dF}{I_y}\,. \tag{3b}$$

Számértéküket a 3. ábrán adtuk meg. A (2) kifejezés jobb oldalán az integráljel alatt álló kifejezés a fajlagos hosszváltozásnak megfelelő $\partial w/\partial z$ mennyiséget jelenti (pontosabban: e mennyiségeknek a hajlítási feszültségeknek megfelelő integrált alakját a keresztmetszeten). Ha tehát változik az M hajlítónyomaték, akkor be kell vinni az integráljel alá, hogy így a z tengely mentén változó hajlítási feszültségeket mindig csak a neki megfelelő $\partial w/\partial z$-vel szorozzuk meg. Minthogy csak egyenletesen megoszló teherrel foglalkozunk, a hajlítónyomaték a következő:

$$M = \frac{q}{2}\,(lz - z^2). \tag{4}$$

Ezt (2)-be helyettesítve, és a rövidség kedvéért bevezetve a

$$K_0 = 2e - dj_x^0 - \frac{b^2 j_y^0}{d} \tag{5}$$

jelölést, a következőt kapjuk:

$$L_k' = \frac{q}{4}\int_0^l (lz - z^2)\left[K_0\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 - \frac{d\varphi}{dz}\,\frac{dv_T}{dz}\right]dz\,. \tag{6}$$

További külső munka származhatik abból, hogy a teher P támadáspontja (2. ábra) nem esik a nyírásközéppontba. Ilyenkor a keresztmetszet elfordulása közben a P pont is megváltoztatja a magasságát, mégpedig

$$t(1 - \cos\varphi) \approx \frac{t\varphi^2}{2}$$

mértékkel. Így a megoszló teher

$$L_k'' = \frac{qt}{2}\int_0^l \varphi^2\,dz \tag{7}$$

nagyságú külső munkát végez.

Végül még figyelembe kell vennünk azt a munkát is, amit a teher a tartónak az F felfüggesztési pont körüli elfordulása következtében végez.

A teher P támadáspontjainak összekötő egyenese a kifordulási φ és v_T alakváltozások következtében vízszintes síkban meggörbül. A P pontok vízszintes eltolódása tehát:

$$v_P = v_T - t\cdot\varphi\,, \tag{8}$$

esz. A külső teher $ql = Q$ eredője így e meggörbült vonal súlypontjában fog hatni, azaz

$$\frac{\int_0^l v_P\,dz}{l} = \frac{\int_0^l v_T\,dz - t\int_0^l \varphi\,dz}{l} = v_Q \tag{9}$$

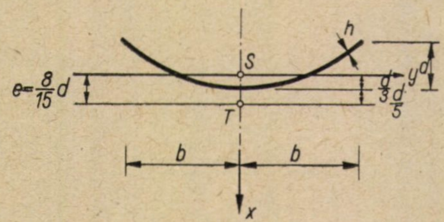
mértékkel tolódik el vízszintesen az eredeti helyéről. Minthogy a tartó a végkeresztmetszetek F pontjában van felfüggesztve, e pontok körül szabadon elfordulhat. Akkora ψ szöggel fog elfordulni, hogy a Q tehereredő éppen a felfüggesztési pontok függőlegesébe kerül vissza. Így a 2d. ábra alapján felírhatjuk, hogy

$$\psi = \frac{v_Q}{f}\,. \tag{10}$$

A külső teher munkája pedig e ψ elfordulás következtében

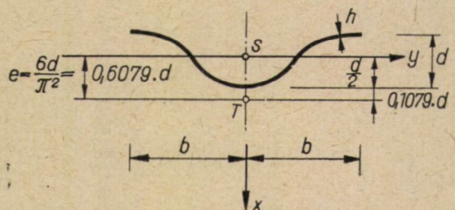
$$L_k''' = ql\cdot\left(\frac{f}{\cos\psi}\right)(1 - \cos\psi) \approx ql\cdot\frac{f\psi^2}{2} = ql\,\frac{v_Q^2}{2f}\,. \tag{11}$$

a) Lapos másodfokú parabola (körív):



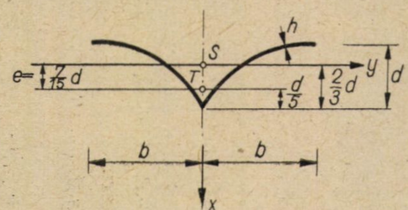
$J_x = 0{,}6667.\,h\,b^3$
$J_y = 0{,}1778.\,hd^2\,b$
$J_\omega = 0{,}00508.\,hd^2 b^3$
$J_t = 0{,}6667.\,bh^3$
$j_x^o = -0{,}1905$
$j_y^o = -1$

b) Lapos hullámvonal (cosinus):



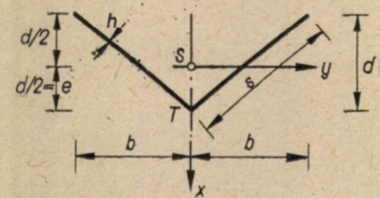
$J_x = 0{,}6667.\,h.b^3$
$J_y = 0{,}250.\,hd^2\,b$
$J_\omega = 0{,}001596.\,hd^2 b^3$
$J_t = 0{,}6667.\,bh^3$
$j_x^o = 0$
$j_y^o = -0{,}812$

c) Lapos szárny (2 db. 2f. parabolából összetéve):



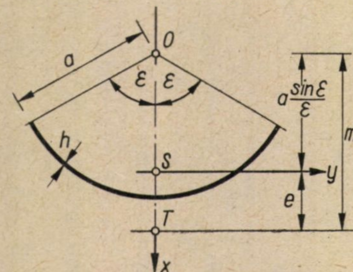
$J_x = 0{,}6667.h.b^3$
$J_y = 0{,}1778.\,hd^2\,b$
$J_\omega = 0{,}00508.\,hd^2 b^3$
$J_t = 0{,}6667.\,bh^3$
$j_x^o = +0{,}1905$
$j_y^o = -0{,}876$

d) Meredek v:



$J_x = \frac{2}{3}hb^2 s$
$J_y = \frac{1}{6}hd^2 s$
$J_\omega = \frac{h^3 s^3}{18}$
$J_t = \frac{2}{3}sh^3$
$j_x^o = 0$
$j_y^o = -1$

e) Meredek körív:



$m = 2a\frac{\sin\varepsilon - \varepsilon.\cos\varepsilon}{\varepsilon - \sin\varepsilon.\cos\varepsilon}$
$J_x = ha^3(\varepsilon - \sin\varepsilon.\cos\varepsilon)$
$J_y = ha^3\left(\varepsilon + \sin\varepsilon.\cos\varepsilon - 2\frac{\sin^2\varepsilon}{\varepsilon}\right)$
$J_\omega = \frac{2}{3}ha^5\left[\varepsilon^3 - \frac{6(\sin\varepsilon - \varepsilon.\cos\varepsilon)^2}{\varepsilon - \sin\varepsilon.\cos\varepsilon}\right]$
$J_t = \frac{2}{3}h^3 a\varepsilon$
$j_x^o.d = -\frac{ha^4}{J_y}\left[\sin\varepsilon + 3\frac{\sin^2\varepsilon\cdot\cos\varepsilon}{\varepsilon} + \sin^3\varepsilon\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{\varepsilon^2}\right)\right]$
$j_y^o\frac{b^2}{d} = -\frac{ha^4}{J_y}\left[\sin\varepsilon - \frac{\sin^2\varepsilon\cos\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{2}{3}\sin^3\varepsilon\right]$

f) Félkörív:

$e = 0{,}637.\,a$
$j_x^o d = -0{,}153.\,a$
$j_y^o\frac{b^2}{d} = -1{,}118.\,a$

$J_x = 1{,}571.\,ha^3$
$J_y = 0{,}298.\,ha^3$
$J_\omega = 0{,}0374.\,ha^5$
$J_t = 1{,}047.\,h^3 a$

3. ábra

(Ha a felfüggesztési pont végtelenül magasan van ($f = \infty$), a gerenda vége egyáltalán nem tud elcsavarodni ($L_k = 0$), vagyis megkapjuk a „villás" megtámasztást.)

A *teljes külső munka* kifejezése tehát a következő lesz:

$$L_k = \frac{q}{4} \int_0^l (lz - z^2) \left[K_0 \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 - \frac{d\varphi}{dz} \frac{dv_T}{dz} \right] dz + \\ + \frac{qt}{2} \int_0^l \varphi^2 \, dz + \frac{ql}{2f} v_Q^2 , \tag{12}$$

ahol v_Q értékét a (9) képlet adja meg.

A belső és a külső munka (1) és (12) kifejezését egyenlővé téve, a kifordító terhet úgy határozhatjuk meg, hogy felveszünk mind φ-re, mind v_T-re egy-egy, a peremfeltételeknek megfelelő függvénysort (Fourier-sort), s az egyes függvénytagok együtthatói szerint minimalizáljuk a kifordító teher kifejezését. Az így kapott homogén lineáris egyenletrendszer determinánsát zérussal egyenlővé téve, annyiadfokú egyenlet adódik a kifordító teherre, amennyi e függvénysorokból figyelembe vett tagok száma [10].

3. Közelítések

3. 1. Az oldalirányú meggörbülés elhanyagolása

Vizsgálataink szerint nem elegendő a két sornak csak egy-egy tagjára szorítkozni, ezért a számítás ily módon meglehetősen bonyolult lenne. Nagymértékben egyszerűsíthetjük azonban a feladatot a következő megfontolás alapján.

Előző vizsgálataink szerint [5], [6] állandó hajlítónyomaték és villásan megtámasztott gerenda ($f = \infty$) esetében igen jó eredményt kapunk az 1. ábrának megfelelő keresztmetszetekre azzal a közelítéssel is, hogy a gerenda vízszintes hajlítási merevségét, B_x-et (a C csavarási merevséghez képest) végtelen nagynak vesszük, azaz elhanyagoljuk a nyírásközépponti tengely vízszintes síkú meggörbülését ($v_T = 0$), s csak az elcsavarodási alakváltozást vesszük figyelembe. Ennek azonban előfeltétele az, hogy a keresztmetszet *szabad széle* a hajlításból *nyomást* kapjon. Esetünkben a nyomófeszültség a keresztmetszet felső szálában keletkezik, tehát a $v_T = 0$ ($B_x/C = \infty$) közelítés *csak az 1a. ábrának megfelelő keresztmetszetekre* ad jó eredményt.

Ezenkívül még azt is figyelembe kell vennünk, hogy az [5]-ben tárgyalt állandó nyomatékhoz és villás megtámasztáshoz az általunk most vizsgált esetben az áll a legközelebb, ha a megoszló teher a nyírásközéppontban hat

($t = 0$), s a felfüggesztési pont végtelenül magasan van ($f = \infty$). Így ugyanis mind L_k'', mind L_k''' zérus (lásd a (7) és a (11) képleteket), s csak a hajlítónyomatékból származó L_k' marad meg (6). Már most — egyelőre $f = \infty$-t véve — a helyzet a következő. *Ha t negatív,* akkor az ennek megfelelő, vagyis a nyírásközéppont *alatt* ható teher (7) szerint *negatív munkát* végez, tehát gátolja az elcsavarodást, sőt, kellően nagy negatív t esetén teljesen meg is akadályozza; ha $L_k'' = -L_k'$, akkor a tiszta elcsavarodásból nem jöhet létre külső munka. Így végtelen nagyra adódnék a kifordító teher. Nyilvánvaló tehát, hogy negatív t esetében a valóságban mind nagyobb szerephez jut az elhanyagolt v_T alakváltozás, s ezzel együtt nő a v_T elhanyagolásából származó hiba is. Ha viszont *t pozitív,* akkor — ugyanezen gondolatmenet alapján — kisebb lesz v_T szerepe, mint a nyírásközéppontban ható teher esetén. Ezek alapján tehát tárgyalásunkban ismét csak az 1*a* ábra keresztmetszeteire szorítkozunk, ami önsúlyteher esetén *pozitív t*-nek, vagyis a *nyírásközéppont felett ható teher* esetének felel meg. Az 1*b* ábra keresztmetszeteit tehát kizárjuk a további tárgyalásból.

Ha a *felfüggesztési pont f* magasságát csökkentjük, akkor ez (11) szerint szintén *növeli* a külső munkát, tehát a fenti gondolatmenet szerint várhatóan csökkenti, vagy legalábbis nem növeli a v_T elhanyagolásából származó hibát a villás megtámasztás ($f = \infty$) esetéhez képest [6].

Összefoglalva a mondottakat, a következőkben csak az *1a ábrának* megfelelő keresztmetszetű gerendákkal, s csak a nyírásközéppont *felett* ható teher esetével foglalkozunk, viszont elhanyagoljuk a nyírásközépponti tengely meggörbülését a vízszintes síkban ($v_T = 0$), és a keresztmetszeteknek csak a nyírásközéppont körüli φ *elfordulását* vesszük figyelembe.

3.2. A peremfeltételek és a $\varphi(z)$ elcsavarodásfüggvény

Amint már a 2.2. pontbeli levezetésből is kitűnt, a felfüggesztés folytán a gerenda az F felfüggesztési pont körül merevtest-szerűen fordul el, s ezt a ψ elfordulást különválasztva kezelhetjük a keresztmetszetek $\varphi(z)$ elcsavarodásától. Így a $\varphi(z)$ függvényt úgy vehetjük fel, mintha a gerendavégek „villásan" volnának megtámasztva, azaz a $z = 0$ és $z = l$ helyeken a $\varphi = 0$ feltétel kielégítésével.

A továbbiakban kétféle tartóvég-kialakítással foglalkozunk. Az első esetben a gerenda végkeresztmetszetei *szabadok,* azaz nem gátoljuk meg tengelyirányú alakváltozásukat (4*a* ábra); (itt az „összekötő rúd" csupán a felfüggesztésből származó keresztirányú nyomaték felvételére szolgál). Ebből az következik, hogy a végkeresztmetszetben nem ébred gátolt csavarási σ_z-feszültség, ami [10] szerint a

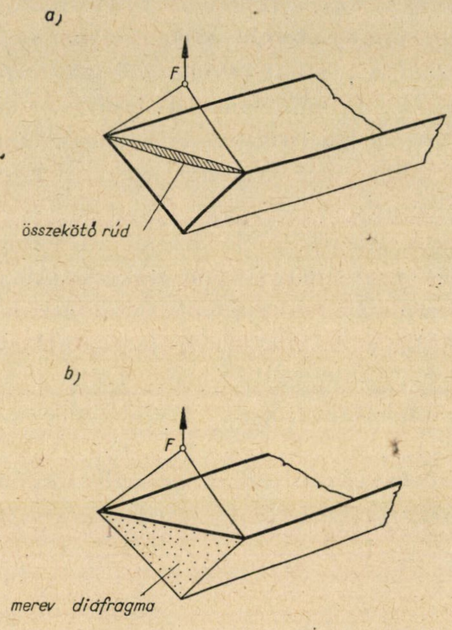
$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0 \tag{13}$$

feltétellel egyenértékű.

Ha viszont a gerenda két végét hajlításra is végtelenül *merev diafragmával* látjuk el (4*b* ábra), akkor ez [6] szerint megakadályozza a végkeresztmetszetek tengelyirányú alakváltozását (az „öblösödést"), ez pedig [10] szerint a

$$\frac{d\varphi}{dz} = 0 \tag{14}$$

feltétellel fejezhető ki.



4. *ábra*

Ennek megfelelően a φ elcsavarodásfüggvényt *szabad* tartóvég esetén *szinusz*-sor, diafragmás tartóvég esetén pedig *koszinusz*-sor formájában vehetjük fel.

4. Megoldás szimmetrikus alakváltozás esetére

4.1. *A kifordító teher meghatározása szabad tartóvégek esetében*

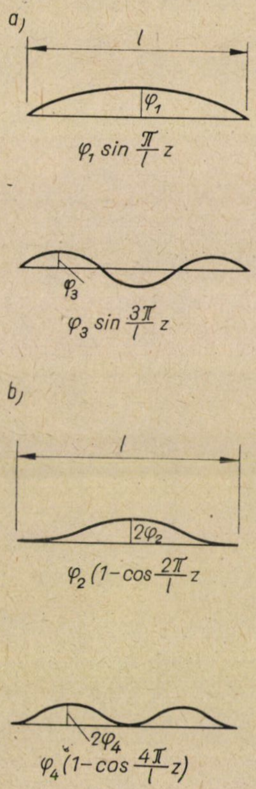
Az elcsavarodásfüggvényt a (13) peremfeltételnek megfelelően a

$$\varphi = \sum_n \varphi_n \cdot \sin \frac{n\pi}{l} z; \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{15}$$

sor alakjában vesszük fel (5*a* ábra). (Az antimetrikus alakváltozást képviselő páros sorszámú tagokat kihagytuk, mivel a levezetés során különválnak a szimmetrikus tagoktól és nagyobb kritikus terhet szolgáltatnak, lásd az 5. pontot.)

A *belső munka* (1) kifejezése az

$$L_b = \frac{C\pi^2}{4l} \sum_n n^2 \varphi_n^2 + \frac{C_1 \pi^4}{4l^3} \sum_n n^4 \varphi_n^2 \, ; \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{16}$$



5. ábra

eredményt szolgáltatja. A *külső* munkához szükséges v_Q eltolódás (9) szerint a következő lesz:

$$v_Q = -\frac{2t}{\pi} \sum_n \frac{\varphi_n}{n} \, ; \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{17}$$

Ezzel a *külső munka* (12) szerint így alakul (Vö. [10] 109. oldalával):

$$L_k = \frac{qK_0 l}{4} \left[\sum_n \varphi_n^2 \left(\frac{n^2 \pi^2}{12} - \frac{1}{4} \right) - 4 \sum_m \sum_n \varphi_m \varphi_n \frac{mn(m^2 + n^2)}{(m^2 - n^2)^2} \right] +$$

$$+ \frac{qtl}{4} \sum_n \varphi_n^2 + ql \frac{2t^2}{\pi^2 f} \left(\sum_n \frac{\varphi_n}{n} \right)^2 . \tag{18}$$

Az összegezésekben $n = 1, 3, 5, \ldots$ és $m = 1, 3, 5, \ldots$, de az m szerinti összegezésekből ki kell hagyni az $m = n$ tagokat és a kettős összegben minden (m, n) kombinációt csak egyszer kell venni. Az energia-módszer szabályai szerint [10] most képeznünk kell a

$$\frac{\partial L_b}{\partial \varphi_n} - \frac{\partial L_k}{\partial \varphi_n} = 0$$

kifejezéseket. Ezek a következő lineáris egyenleteket szolgáltatják minden n-re $(n = 1, 3, 5, \ldots)$:

$$\varphi_n \left\{ n^2\pi^2 \left(C + C_1 \frac{n^2\pi^2}{l^2} \right) - 2M \left[K_0 \left(\frac{n^2\pi^2}{3} - 1 \right) + 4t + \frac{32}{\pi^2 \cdot n^2} \frac{t^2}{f} \right] \right\} +$$
$$+ 16\, M \cdot K_0 \sum_m \frac{mn(m^2 + n^2)}{(m^2 - n^2)^2} \varphi_m - \frac{64}{\pi^2 \cdot n} M \frac{t^2}{f} \sum_m \frac{\varphi_m}{m} = 0 \,. \tag{19}$$

Itt a rövidség kedvéért bevezettük a

$$\frac{ql^2}{8} = M \tag{20}$$

jelölést. Az összegezésekben $m = 1, 3, 5, \ldots$, de ki kell hagyni az $m = n$ tagot.

Ha mindegyik φ_n-re felírjuk a (19) egyenletet, az így kapott egyenletrendszer determinánsát 0-val egyenlővé téve a kritikus

$$M_{kr} = \frac{q_{kr} \cdot l^2}{8}$$

hajlítónyomatékra a φ sorából figyelembe vett tagok számával egyező fokszámú egyenletet kapunk.

Ha csak *egy tagot* veszünk, akkor $n = 1$, az m-es összeg pedig teljes egészében elmarad, s így a következő egyszerű összefüggés adódik M_{kr}-ra:

$$M_{kr} = 2{,}155 \frac{C + C_1 \pi^2/l^2}{K_0 + 1{,}747t + 1{,}416\, t^2/f} \,. \tag{21}$$

Két tag esetén viszont a következő másodfokú egyenletet kapjuk M_{kr}-ra:

$$aM_{kr}^2 + bM_{kr} + c = 0 \,, \tag{22}$$

ahol az együtthatók a következők:

$$a = 5{,}145\, K_0^2 + 12{,}36 \cdot K_0 t + 10{,}17\, K_0 \frac{t^2}{f} + 1{,}6\, t^2 + 1{,}441 \frac{t^3}{f}, \qquad \text{(23a)}$$

$$b = -\left[24{,}29 \cdot K_0 C + 1042{,}7\, K_0 \frac{C_1}{l^2} + \right.$$

$$+ 19{,}74 \cdot tC + 1597{,}5\, t \frac{C_1}{l^2} +$$

$$\left. + 14{,}58 \frac{t^2}{f} C + 1280{,}8 \frac{t^2}{f} \frac{C_1}{l^2} \right], \qquad \text{(23b)}$$

$$c = 21{,}92\, C^2 + 2163\, C \frac{C_1}{l^2} + 19214 \frac{C_1^2}{l^4}. \qquad \text{(23c)}$$

Néhány esetre kiszámítottuk a kritikus hajlítónyomatékot a (21) és a (22) képlettel, hogy megállapíthassuk mennyire tér el a kéttagú φ-vel számított kifordító nyomaték az egytagú φ-adta eredménytől. Azt találtuk, hogy az eltérés abban az esetben a legnagyobb, ha

$a)$ $$C_1 = t = 0\,.$$

Ekkor f tetszőleges lehet, mivel csak a t^2/f kifejezésben szerepel, de természetesen $f > 0$. Erre az esetre több φ-tagra is kiszámítottuk a kritikus nyomatékot és a következő eredményeket kaptuk:

1 tag:	$M_{kr} = 2{,}155 \dfrac{C}{K_0}$	(100%),
2 tag:	1,215	(56,5%),
3 tag:	1,096	(50,9%),
4 tag:	1,055	(49%),
5 tag:	1,037	(48,1%).

A figyelembe vett tagszám növekedésével tehát a kritikus hajlítónyomaték értéke ($C_1 = t = 0$ esetben) egyre jobban megközelíti a két végén erőpárral terhelt gerenda

$$M_{kr} = 1{,}0 \frac{C}{K_0}$$

kritikus hajlítónyomatékát, de ennél kisebb értéket nem vesz fel.

b) Ha $C_1 = 0, t = K_0/2, f = \infty$:

$$1 \text{ tag:} \quad M_{kr} = 1{,}150 \frac{C}{K_0} \quad (100\%),$$

$$2 \text{ tag:} \quad 0{,}954 \quad (\ 83\%),$$

c) Ha $C_1/l^2 = C/100, t = 0, f =$ tetszőleges:

$$1 \text{ tag:} \quad M_{kr} = 2{,}368 \frac{C}{K_0} \quad (100\%),$$

$$2 \text{ tag:} \quad 1{,}779 \quad (\ 75\%),$$

d) Végül ha $C_1 = 0,\ t = K_0/2,\ f = K_0/2$:

$$1 \text{ tag:} \quad M_{kr} = 0{,}8348 \frac{C}{K_0} \quad (100\%),$$

$$2 \text{ tag:} \quad 0{,}7824 \quad (\ 93{,}8\%).$$

A fenti adatokból bármely esetben tájékoztatást kaphatunk a kéttagú φ-függvény alapján számított M_{kr} (22) hibájáról.

Amint látjuk, az egy- és kéttagú φ-függvénynek megfelelő eredmények a három utolsó esetben lényegesen közelebb állnak egymáshoz, mint a legkedvezőtlenebb $C_1 = t = 0$ esetben, így várható, hogy a több φ-taggal kapható pontosabb eredménytől való eltérésük is sokkal kisebb. Mivel minden gyakorlati esetben $C_1 > 0$ és $t > 0$, a (22) képletet mindig kielégítően pontosnak tekinthetjük, mert hibája lényegesen kisebb a $C_1 = t = 0$ esetben kimutatható

$$\frac{1{,}215 - 1{,}037}{1{,}037}\, 100\% = 17{,}2\%$$

eltérésnél. (Az eltérés elsősorban akkor csökken, ha $t > 0$.) Nincs akadálya természetesen annak sem, hogy több tagot vegyünk figyelembe, s ennek megfelelően magasabbfokú egyenletből határozzuk meg az M_{kr} értéket.

Az egytagú φ-vel kapott (21) képlet pontatlan ugyan, de megvan az az előnye, hogy igen szemléletesen mutatja a különböző tényezők ($C, C_1/l^2, K_0$, t, f) egymáshoz viszonyított szerepét és nagyságrendjét.

4. 2. A kifordító teher nagysága diafragmás tartóvégek esetében

Az elcsavarodásfüggvényt most a (14) peremfeltételnek megfelelő

$$\varphi = \sum_n \left(1 - \cos \frac{n\pi}{l} z\right), \qquad n = 2, 4, 6, \ldots \tag{24}$$

alakban vesszük fel (5b. ábra), mely ismét csak a szimmetrikus alakváltozásnak megfelelő tagokat tartalmazza. A *belső munka* (1) szerint így a következő alakban adódik:

$$L_b = \frac{C\pi^2}{4l} \sum_n n^2 \varphi_n^2 + \frac{C_1 \pi^4}{4l^3} \sum_n n^4 \varphi_n^2 , \qquad n = 2, 4, 6, \ldots . \tag{25}$$

A (9) összefüggés szerint:

$$v_Q = -t \cdot \sum_n \varphi_n , \qquad n = 2, 4, 6, \ldots , \tag{26}$$

és ezzel (12)-nek megfelelően a *külső munka*:

$$L_k = \frac{qK_0 l}{4} \left[\sum_n \varphi_n^2 \left(\frac{n^2 \pi^2}{12} + \frac{1}{4} \right) - 8 \sum_m \sum_n \varphi_m \varphi_n \frac{m^2 n^2}{(m^2 - n^2)^2} \right] +$$

$$+ \frac{qtl}{4} \left| 3 \sum_n \varphi_n{}^2 + 4 \sum_m \sum_n \varphi_m \varphi_n \right| + ql \frac{t^2}{2f} \left[\sum_n \varphi_n^2 + 2 \sum_m \sum_n \varphi_m \varphi_n \right] . \tag{27}$$

A minimalizálás után pedig a következő egyenletek adódnak minden n-re ($n = 2, 4, 6, \ldots$):

$$\varphi_n \left\{ \frac{n^2 \pi^2}{2} \left(C + C_1 \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right) - M \left[K_0 \left(\frac{n^2 \pi^2}{3} + 1 \right) + 12t + 8 \frac{t^2}{f} \right] \right\} +$$

$$+ 16 MK_0 \sum_m \frac{m^2 n^2}{(m^2 - n^2)^2} \varphi_m - 8Mt \left(1 + \frac{t}{f} \right) \sum_m \varphi_m = 0 , \qquad \begin{matrix} m = 2, 4, 6, \ldots \\ m \neq n \end{matrix} \tag{28}$$

Ha csak egy tagra szorítkozunk, akkor az

$$M_{kr} = \frac{\pi^2}{8} \frac{C + C_1 \dfrac{4\pi^2}{l^2}}{K_0 \left(\dfrac{\pi^2}{12} + \dfrac{1}{16} \right) + \dfrac{3}{4} t + \dfrac{1}{2} \dfrac{t^2}{f}} =$$

$$= 1{,}234 \frac{C + C_1 \dfrac{4\pi^2}{l^2}}{0{,}884 K_0 + 0{,}75 t + 0{,}5 \dfrac{t^2}{f}} \tag{29}$$

kifejezést kapjuk. Két tag figyelembevétele esetén pedig a (22) másodfokú egyenlet adódik a következő együtthatókkal:

$$a = 1{,}772\, K_0^2 + 2{,}318\, K_0 t + 1{,}640\, K_0 \frac{t^2}{f} + 0{,}200\, t^2 + 0{,}160 \frac{t^3}{f}, \tag{30a}$$

$$b = -\left[5{,}442\, K_0 C + 545{,}9\, K_0 \frac{C_1}{l^2} + 2{,}961\, tC + 397{,}4 t \frac{C_1}{l^2} + \right.$$
$$\left. + 1{,}974 \frac{t^2}{f} C + 265{,}0 \frac{t^2}{f} \frac{C_1}{l^2}\right], \tag{30b}$$

$$c = 3{,}896\, C^2 + 769{,}1\, C \frac{C_1}{l^2} + 24291 \frac{C_1^2}{l^4}. \tag{30c}$$

A pontosság ellenőrzése céljából ismét kiszámítottuk $C_1 = t = 0$ (f tetszőleges) esetre, több tagszámra, M_{kr} értékét. Az eredmények a következők:

1. tag:	$M_{kr} = 1{,}394 \dfrac{C}{K_0}$	(100%),
2. tag:	1,137	(81,5%),
3. tag:	1,071	(77%),
4. tag:	1,044	(75%),
5. tag:	1,029	(73,8%).

A figyelembe vett tagok számának növelésével tehát most is egyre jobban közelítjük meg a két végén erőpárral terhelt gerenda

$$M_{kr} = 1{,}0 \frac{C}{K_0}$$

kritikus hajlítónyomatékát, ugyanúgy, mint a szabad végű gerenda esetében. A végdiafragmák a $C_1 = 0$ feltevés következtében ugyanis nem merevítik a gerendát. Az a tény, hogy a végdiafragmás gerenda ugyanolyan tagszám esetén kisebb kritikus nyomatékot ad a szabadvégűnél, csupán a jobb konvergenciát mutatja s nem következik belőle, hogy a diafragmás gerenda gyengébb a szabadvégűnél.

Ebből az összeállításból kitűnik, hogy a $C_1 = t = 0$ esetben a diafragmás végű gerenda kritikus hajlítónyomatékát — ugyanannyi figyelembe vett tagszám esetén — lényegesen pontosabban kapjuk meg, mint a szabadvégű gerendáét.

A végdiafragmák a $C_1 > 0$ és $t > 0$ esetben természetesen növelik a kritikus nyomatékot a szabadvégű gerendáéhoz képest, de — mint a számpéldából is láthatjuk — általában elég kismértékben.

A *valóságban* alkalmazott diafragmák *nem végtelen merevek* hajlításra, így merevítő hatásuk is valamivel kisebb, mint a számításba vett végtelen merev diafragmáké. Minthogy azonban a diafragmák merevítő hatása amúgyis kicsi, véleményünk szerint nem érdemes ezt a különbséget figyelembe venni.

4.3. *Megjegyzések*

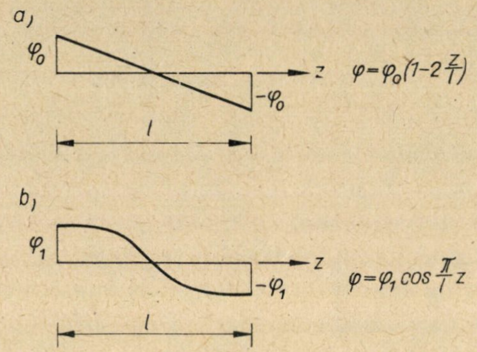
Változó hajlítónyomaték esetére úgy írtuk fel a *külső* munka (6) képletét, hogy az állandó nyomatékra levezetett (2) kifejezésben a nyomatékot bevittük az integráljel alá. Ezzel azonban csak a z-irányú σ_z-feszültségek munkáját vettük helyesen figyelembe, a változó nyomaték esetén mindig keletkező τ nyírófeszültségek, valamint a teher helyzetétől függő keresztirányú σ_y-feszültségek (pontosabban: a keresztmetszet érintője irányában működő keresztirányú σ-feszültségek) munkáját azonban még nem. Márpedig a felületszerkezetek stabilitásvizsgálatára szolgáló energia-kifejezésekben [10] a σ_z munkáján felül még a τ és σ_y munkáját is figyelembe kell vennünk a külső munka végzésekor. Mi ehelyett a tehersüllyedés L_k'' (7) munkáját írtuk fel. Ki kell tehát mutatnunk, hogy ez megegyezik τ és σ_y munkájával.

Ezt a vizsgálatot az egyenletes teherrel terhelt, villásan megtámasztott ($f = \infty$) diafragma nélküli V-keresztmetszetű gerendán végeztük el. Felírtuk a külső munkákat egyrészt az itt bemutatott (6) és (7) képletekkel, másrészt a lemezelmélet [10] egyenleteivel, a két félgerendát egy-egy síklemeznek számítva. Feltételeztük, hogy a nyírásközépponti tengely (a V-keresztmetszetek alsó csúcspontjait összekötő vonal) egyenes marad, azaz $B_x = \infty$, s az összehasonlítás egyszerűbbé tétele érdekében a (15) sorból csak az első tagot vettük figyelembe. Kétféle teherhelyzetet vizsgáltunk: először a nyírásközéppontban ható teher esetét ($t = 0$), majd az önsúly hatását, ami a lemezelmélet szerint a lemez felületén egyenletesen elosztott terhet jelent, s eredője a keresztmetszet magasságának felében hat ($t = d/2$).

A lemezelmélet szerinti számítást itt nem részletezzük; eredménye azonban mindkét esetben teljesen megegyezett az itt bemutatott számításmód eredményeivel. A nyírófeszültségek mindkét esetben ugyanakkora pozitív külső munkát szolgáltattak, de ez a nyírásközéppontban ható teher esetén éppen egyenlő a keresztirányú σ-feszültségek negatív munkájával, s így kiesik. Önsúlyteher esetében pedig az ennek megfelelően megváltozott keresztirányú σ-feszültségek még egy akkora pozitív többletmunkát szolgáltatnak, amely pontosan egyenlő a (7) kifejezéssel.

Ezzel kimutattuk, hogy a dolgozatunkban bemutatott módszer helyes és egyszerűbb úton ugyanazokat az eredményeket adja, mint a lemezelmélet munkaegyenletei.

Fenti eredményünkkel összhangban van az a tény is, hogy ha $f = \infty$, vagyis ha a megtámasztás „*villás*", akkor a külső és a belső munkára a 2. pontban levezetett kifejezéseink — némi átalakítás után — megegyeznek CHWALLA [3] eredményével.



6. ábra

5. Megoldás antimetrikus alakváltozás esetében

Röviden megvizsgáljuk még mind szabad, mind diafragmás gerendavég esetében a szóbajöhető *antimetrikus alakváltozást*, s összehasonlítjuk az ennek megfelelő kritikus terhet a szimmetrikus alakváltozás alapján korábban levezetett kritikus teherrel. Az egyszerűség kedvéért csak *egytagú* elcsavarodásfüggvényt fogunk felvenni, s feltételezzük, hogy többtagú elcsavarodásfüggvények esetén ugyanilyen, vagy hasonló arányok állnak fenn az antimetrikus és a szimmetrikus alakváltozás kritikus terhei között.

5.1. Szabadvégű gerenda esete

A legegyszerűbb antimetrikus elcsavarodást a 6*a* ábra mutatja. Ebből a 4.1. pontban leírt módon a kritikus hajlítónyomatékra a következő kifejezést kapjuk:

$$M_{kr}^{\text{antimetr.}} = 3\,\frac{C}{K_0 + 2t - 6f}\,. \tag{31}$$

Az F felfüggesztési pont körüli elfordulásból származó L_k''' munkarész most negatív, mivel a két véglap, ellenkező elfordulása következtében,

$$f(1 - \cos \varphi_0) \approx f \frac{\varphi_0^2}{2}$$

mértékkel kénytelen emelkedni.

Az egytagú szimmetrikus elcsavarodásfüggvényből kapott (21) kifejezéssel való összehasonlítás azt adta, hogy az antimetrikus alakváltozás kritikus terhe csak *negatív* f-ek esetén lehet kisebb a (21) kifejezésnél, ez viszont a teher támadáspontja alatti felfüggesztést jelent, ami amúgy sem fordul elő. Így szabadvégű gerendák kritikus terhét mindig a szimmetrikus alakváltozás alapján levezetett képletekkel kell számítanunk.

5.2. *Diafragmás végű gerenda esete*

A gerenda alakváltozását a 6*b* ábra szerint véve fel, az

$$M_{kr}^{\text{antimetr.}} = \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{C + C_1 \dfrac{\pi^2}{l^2}}{K_0 \left(\dfrac{\pi^2}{12} + \dfrac{1}{4} \right) + t - 2f} \tag{32}$$

kritikus nyomaték adódik, az előző esethez hasonlóan most is negatív L_k'''-vel és $f \cdot \varphi_1^2/2$ teheremelkedéssel. A könnyebb összehasonlítás kedvéért (32)-t és a megfelelő egytagú szimmetrikus alakváltozáshoz tartozó (29)-et a következő alakba írjuk:

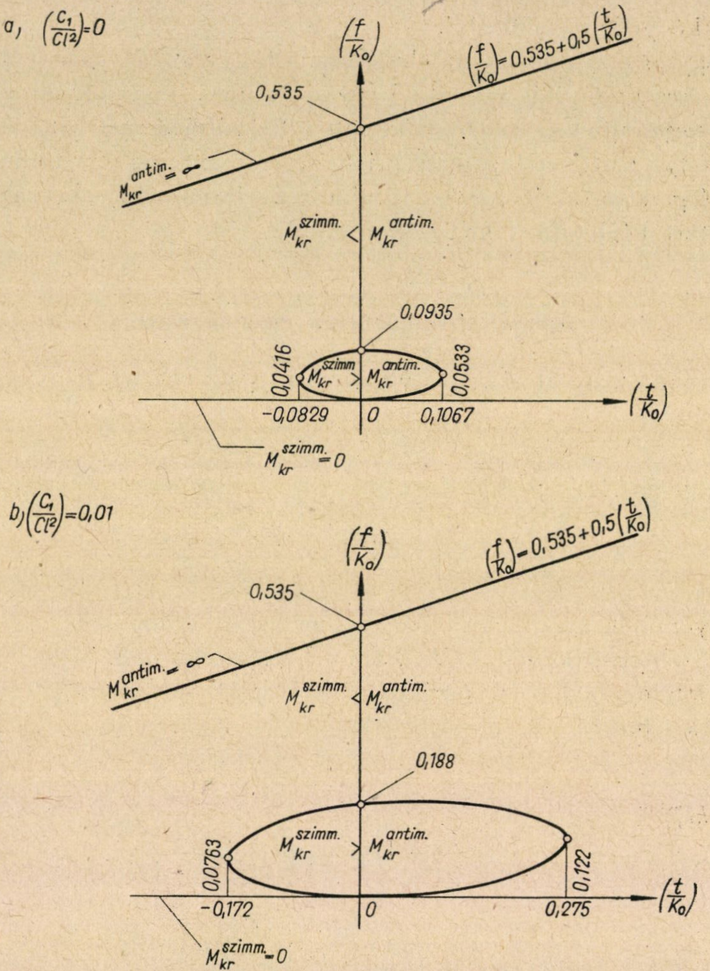
$$M_{kr}^{\text{szimmetr}} = 1{,}234 \frac{1 + 4\pi^2 \left(\dfrac{C_1}{Cl^2} \right)}{0{,}884 + 0{,}75 \left(\dfrac{t}{K_0} \right) + 0{,}5 \dfrac{(t/K_0)^2}{(f/K_0)}} \frac{C}{K_0}, \tag{33a}$$

$$M_{kr}^{\text{antimetr.}} = 1{,}234 \frac{1 + \pi^2 \left(\dfrac{C_1}{Cl^2} \right)}{1{,}071 + \left(\dfrac{t}{K_0} \right) - 2 \left(\dfrac{f}{K_0} \right)} \frac{C}{K_0}. \tag{33b}$$

Az összehasonlítást $C_1/(Cl^2)$-nek a gyakorlatban előforduló két szélső esetére, 0-ra és 0,01-re végeztük el. Az eredményt a 7*a*—*b* ábrán tüntettük fel.

Az f/K_0, t/K_0 koordinátarendszerben ábrázolt ellipszis mentén $M_{kr}^{\text{szimmetr}} = M_{kr}^{\text{antimetr}}$. Az ellipszis belsejében az antimetrikus kihajlási alak, kívüle pedig — a pozitív f-ek tartományára szorítkozva — a szimmetrikus kihajlási alak ad kisebb kritikus nyomatékot.

Az eredményt gyakorlatilag könnyen felhasználható alakban a 8. ábrán tüntettük fel: itt (C_1/Cl^2) függvényében ábrázoltuk (f/K_0)-nak azokat az érté-



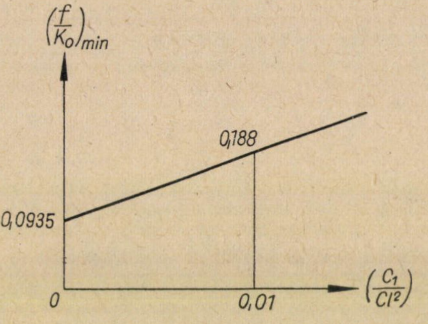
7. *ábra*

keit, amelyek felett mindig a szimmetrikus kihajlási alak a mértékadó. A $C_1/Cl^2 = 0$ és 0,01 esetekhez tartozó értékeket az egyszerűség kedvéért egyenessel kötöttük össze. Ha (f/K_0) egy adott esetben a vonal alá esnék (ami gyakorlatilag csak kivételes esetben fordulhat elő), akkor meg kell vizsgálni a 7. ábra ellipsziseit, ill. az antimetrikus alakváltozáshoz tartozó kritikus nyomatékot.

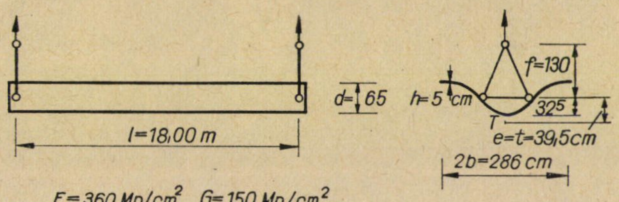
6. Számpélda

Ellenőrizzük a 9. ábrán vázolt vékonyfalú gerenda oldalirányú stabilitását beemelés közben és elhelyezés után, mégpedig először szabadvéget, utána diafragmás véget feltételezve. A keresztmetszet jellemző adatait a 2. és 3b ábrák szerint számítjuk.

$$
\begin{aligned}
e &= t = +\,39{,}5 \text{ cm},\\
j_x &= 0,\\
j_y &= -0{,}812,\\
f &= 130 \text{ cm},\\
K_0 &= 2e - j_x^0\, d - j_y^0 \frac{b^2}{d} = 79 + 0 + 0{,}812.\ 143^2/65 = 335 \text{ cm},\\
C &= GI_t = 150 \cdot 5^3 \cdot 286/3 = 1{,}79 \cdot 10^6 \text{ Mp cm}^2,\\
C_1 &= EI_\omega = 360 \cdot 0{,}001596 \cdot 5 \cdot 65^2 \cdot 143^3 = 3{,}54 \cdot 10^{10} \text{ Mp cm}^4,\\
C_1/l^2 &= 3{,}54 \cdot 10^{10}/1800^2 = 1{,}09 \cdot 10^4 \text{ Mp cm}^2.
\end{aligned}
$$



8. ábra



9. ábra

6.1. Szabadvégű gerenda

6.11. Ellenőrzés felfüggesztett tartóvégek esetében

A másodfokú egyenlet együtthatói:

$$
\begin{aligned}
(23a)&: \; a = 785{,}5 \cdot 10^4 \text{ cm}^2\\
(23b)&: \; b = -2094 \cdot 10^8 \text{ Mp cm}^3,\\
(23c)&: \; c = 1145{,}9 \cdot 10^{12} \text{ Mp}^2 \text{ cm}^4,\\
(22)&: \; M_{kr}^{\text{kéttagú}} = 77{,}0 \text{ Mpm},
\end{aligned}
$$

az egytagú (21) képlettel pedig

$$M_{kr}^{\text{egytagú}} = 97,0 \text{ Mpm}$$

adódik.

Kiszámítottuk még háromtagú φ felvételével is a kritikus nyomatékot:

$$M_{kr}^{\text{háromtagú}} = 76,1 \text{ Mpm}.$$

Ha az egytagú eredményt 100%-nak tekintjük, akkor a két- és háromtagú 79,5% ill. 78,5%. Ezt a 4.1. pontban közölt %-értékekkel összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy a konvergencia ebben az esetben lényegesen jobb a $C_1 = t = 0$ esetre kimutatott konvergenciánál, amit a két és három tag eredményének összehasonlítása is bizonyít. A kéttagú eredmény hibája a háromtagúéhoz képest esetünkben csak 1,26%.

Összehasonlításul kiszámítjuk még a *két végén erőpárral terhelt* rúd kritikus nyomatékát, valamint a *derékszögű négyszögkeresztmetszetű felfüggesztett* gerendára érvényes képletszolgáltatta kritikus hajlítónyomatékot is, hogy lássuk, mekkora hibát követnénk el, ha ezeket a képleteket használnánk.

A *végein erőpárral terhelt* gerenda esetében [10], [5]:

$$M_{kr}^{\text{konst}} = \frac{C + C_1 \dfrac{\pi^2}{l^2}}{K_0} = \frac{(1,79 + 0,0109.9,87)\ 10^6}{335} = 56,6 \text{ Mpm}.$$

(Ez a képlet természetesen nem veszi figyelembe sem a felfüggesztés tényét, sem azt, hogy a teher a nyírásközéppont felett hat.)

A *derékszögű négyszögkeresztmetszetre* érvényes harmadfokú egyenlettel [4]:

$$M_{kr}^{\text{négyszög}} = 1420,0 \text{ Mpm}.$$

(Ez a képlet viszont a keresztmetszet vékonyfalú voltát hagyja figyelmen kívül, valamint azt, hogy a nyírásközéppont kiesik a súlypontból.)

6.12. Összehasonlításképpen kiszámítjuk a kifordító nyomatékot a gerenda elhelyezése után is, *oldalirányban csuklós* megtámasztást feltételezve. A képletekben így $f = \infty$-t kell helyettesítenünk:

$$(23a):\ a' = 743,9 \cdot 10^4 \text{ cm}^2,$$

$$(23b):\ b' = -2046,3 \cdot 10^8 \text{ Mp cm}^3,$$

$$(23c):\ c' = 1145,9 \cdot 10^{12} \text{ Mp}^2 \text{ cm}^4,$$

$$(22):\ M_{kr} = 78,0 \text{ Mpm},$$

azaz csak 1,3%-kal több, mint felfüggesztett állapotban.

6.2. *Diafragmás végű felfüggesztett gerenda*

A másodfokú egyenlet együtthatói:

$$(30a):\ a = 94,5 \cdot 10^6 \text{ cm}^2,$$

$$(30b):\ b = -2285 \cdot 10^9 \text{ Mpcm}^3,$$

$$(30c):\ c = 12145 \cdot 10^{12} \text{Mp}^2 \text{ cm}^4,$$

$$(22):\ M_{kr}^{\text{diafr.}} = 79,1 \text{ Mpm},$$

ami alig nagyobb a szabadvégű gerenda kritikus nyomatékánál. Amint látjuk tehát, a végdiafragma csak igen kismértékben növeli a gerenda stabilitását. Ha pedig figyelembevesszük, hogy a végdiafragma nem végtelen merev, akkor a szabad- és a diafragmás vég eredményének számtani közepét véve

$$M_{kr}^{\text{átl}} = \frac{77 + 79,1}{2} = 78,55 \text{ Mpm}$$

adódik, ami csak 2%-kal több a szabadvégű gerendáénál.

IRODALOM

1. Bleich, F.: Buckling Strength of Metal Structures. McGraw-Hill, New York 1952.
2. Bürgermeister, G.—Steup, H.: Stabilitätstheorie. Akademie-Verlag, Berlin 1957.
3. Chwalla, E.: Kippung von Trägern mit einfachsymmetrischen, dünnwandigen und offenen Querschnitten. *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien.* Abt. II. a. **153** (1944), 1—10.
4. Csonka, P.: Die Stabilität der an ihren Enden aufgehängten prismatischen Stäbe von rechteckigem Querschnitt. *Acta Techn. Hung.* **8** (1954), 79—90.
   Magyarul: A végein felfüggesztett négyszögkeresztmetszetű rúd stabilitása. *VI. Oszt. Közl.* **9** (1953), 437—447.
5. Kollár, L.: Lateral Buckling of Thin-walled Curved Bars (Shell-Arches). *Acta Techn. Hung.* **5** (1964), 297—314.
   Magyarul: Hajlított, vékonyfalú görbe rudak (héj-ívek) kifordulása. *Építés- és Közl. Tud. Közl.* (1963), 143—157.
6. Kollár, L.—Iványi, Gy.: Kippen und Biegedrillknicken von Schalenbogen mit Hilfe der Energiemethode. *Bautechnik-Archiv.* (Megjelenés alatt.)
7. Lebelle, P.: Stabilité élastique des poutres en béton précontraint à l'égard du déversement latéral. *Annales de l'Inst. T. B. T. P.* **12** (1959); No. 141, (780—831.) Série: Béton précontraint (32).
8. Lundgren, H.: Cylindrical Shells, Vol. I. The Danish Technical Press, Copenhagen 1951.
9. Meissner, F.: Einige Auswertungsergebnisse der Kipptheorie einfach-symmetrisches Balkenträger. *Der Stahlbau,* **24** (1955), 110—113.
10. Timoshenko, S.—Gere, J.: Theory of Elastic Stability: 2nd Ed. McGraw-Hill, New York 1961.