

# Gerjesztett polarizációs mérések kiértékelése spektrális inverziós módszerrel

FANCSIK T.<sup>1,2</sup>, TURAI E.<sup>1</sup>, SZABÓ N. P.<sup>1,3</sup>, DOBRÓKA M.<sup>1,3,@</sup>

<sup>1</sup>Geofizikai Tanszék, Miskolci Egyetem, 3515 Miskolc, Egyetemváros

<sup>2</sup>Magyar Bányászati és Földtani Szolgálat, 1145 Budapest, Columbus u. 17–23.

<sup>3</sup>MTA-ME, MTA-ME Műszaki Földtudományi Kutatócsoport, 3515, Miskolc-Egyetemváros

@E-mail: dobroka@uni-miskolc.hu

Jelen dolgozatban laboratóriumban végzett gerjesztett polarizációs (GP) mérések eredményeit dolgozzuk fel egy új – integrális célfüggvényre alapozott – inverziós eljárás keretében. Bevezetésként rövid áttekintést adunk a gerjesztett polarizációs mérésekről és az egyes polarizációk kialakulásáról, majd részletesen ismertetjük az új adatfeldolgozási algoritmust. Ennek lényege, hogy az érc tartalmú kőzetmintákon mért látszólagos polarizálhatósági adatokat olyan inverziós eljárás keretében dolgozzuk fel, ahol a polarizációs hatásokat tartalmazó időállandó-spektrumot sorfejtéses közelítéssel állítjuk elő. A sorfejtési együtthatók mint ismeretlenek jelentik az inverzió modellparamétereit. Jelen tanulmányban egy recski mintán kapott eredményeinket mutatjuk be. Az előállított időállandó-spektrumon meghatározott időállandóknál jelentkező polarizációs hatásokat különítettünk el.

## Fancsik, T., Turai, E., Szabó, N. P., Dobróka, M.: Evaluation of induced polarization measurements by spectral inversion method

In this study, we process induced polarization (IP) data measured in a laboratory in the framework of a new inversion procedure. As an introduction, we give a brief overview of the IP measurements and the formation of each polarization effect, and then describe the new data processing algorithm in detail. The essence of this is that the apparent polarizability data measured on the ore-containing rock samples are processed in an inversion procedure, where the time-constant spectrum containing the polarization effects is obtained by a series expansion approximation. The expansion coefficients as unknowns represent the model parameters of the inversion procedure. We present our results obtained from a Recsk sample. The polarization effects at certain time constants on the estimated time constant spectrum were isolated.

*Beérkezett:* 2020. november 16.; *elfogadva:* 2020. december 7.

## Bevezetés

Az ásványi nyersanyagok iránti igény, a világ népességének és ezzel összefüggésben a lakosság és az ipar szükségleteinek bővülése miatt, egyfolytában növekszik. Az ásványkincsek (energiahordozók, ércek, építőanyagok), az ivóvíz utánpótlása, a földtani veszélyforrások jelentette kockázat csökkentése a felszín alatti tér egyre pontosabb és részletesebb megismerését és leképezését igényli a földtudományi szakemberek részéről. Ennek egyik legalkalmasabb eszközt a geofizikai mérések, ezen belül is a geoelektromos módszerek jelentik. Az egyenáramú vizsgálati metodológiához kapcsolódva, igen hatékony eljárás a gerjesztett po-

larizáció (GP) mérése. Korábban – elsősorban érc kutatáshoz kapcsolódóan – került sor az alkalmazására (Seigel 1959, Wait 1959, Keller, Frischknecht 1966, Tavakoli és szerzőtársai 2016) a fémásványok hatására fellépő fémes polarizáció számottevő hatása miatt. Emellett a környezet-szennyezések vizsgálatánál és jellemzésénél (Viezzoli és szerzőtársai 2006, Turai 1985, 2011), földtani szerkezetek, szén- és grafitkutatásnál, homokos-agyagos kőzetek szétválasztásánál és a régészeti geofizikában (Abu Zeid 2016) kap szerepet.

A GP jelenség a felszín alatti polarizálható kőzetalkotókban vagy humán eredetű hatókban (eltetett hulladékok) keletkező polarizációs áramok, időben exponenciálisan

lecsengő effektusaként jelenik meg. E matematikai összefüggések alakja a geofizika és a fizika területén sok további jelenség matematikai leírásához is hasonlóak, ezért a GP kiértékelésének inverziós módszerei általánosabb, más területeken történő alkalmazhatóságot is magukban foglalnak.

A gyakorlatban még ki nem használt lehetőséget jelent a GP módszer direkt szénhidrogén-kutatási alkalmazása (Turai, Dobróka 2002). Ennek a lehetőségnek az alapja, hogy az olajfaló baktériumok kénhidrogént szabadítanak fel földtani csapdában található kőolajból vagy földgázból. A szénhidrogéncsapda széléin a kénhidrogén kiszabadul a csapdából, és a tároló mélységétől a felszínig piritesíti a fedőkőzetek vasoxidtartalmát, s így a szénhidrogén-tároló szerkezetek szegélyzónájában ún. piritképzések jönnek létre. Mivel a pirit igen jól polarizálható ércásvány, ezért a produktív (kőolajat és/vagy földgázt tartalmazó) tárolók felett felszíni méréssel gyűrűszerű GP anomáliák mérhetők. Amennyiben egy tároló szerkezet széléin nem mérhető GP anomália, úgy az a szerkezet nem tartalmaz szénhidrogént, csak termálvizet. A direkt szénhidrogén-kutatásnak az előzőekben leírt olcsó módja nagy jelentőségű lehet a jövő új szénhidrogén-tároló szerkezeteinek felkutatásában, s ezzel az egyre növekvő energiaigény kielégítésében.

Ebben a tanulmányban a GP mérések inverziós feldolgozásának egy új, spektrális megközelítését mutatjuk be. Ennek lényege, hogy a jelenséget leíró direkt feladat és a mérési eredmények eltérését mérő metrikát a négyzetesen integrálható függvények terében érvényes távolságfüggvényként definiáljuk. Mivel az inverzió során a modellfüggvény zárt alakban integrálható lesz, ezzel a választással az inverzió numerikus bizonytalanságai csökkenthetők.

## Gerjesztett polarizációs mérések

Az egyenáramú mérések során megfigyelt gerjesztett polarizáció jelenségét először Schlumberger (1930), majd ezt követően Dakhnov (1941) és Bleil (1953) írták le, az első matematikai modellt Seigel (1959) adta meg. A GP időtartománybeli mérésének lényege, hogy a gerjesztő áram bekapcsolásakor a polarizálható hatók először elektromosan telítődnek. A gerjesztés alatti feszültség stabilizálódása után a gerjesztő áramot kikapcsolják, és adott mintavételezési időközönként regisztrálják a mérőelektrodák között fellépő, monoton csökkenő feszültséget. A másodlagos (lecsengés alatt mért  $-U(t)$ ) és primer gerjesztés alatti maximális  $-U_0$  feszültség hányadosa adja a látszólagos polarizálhatóság ( $\eta_a$ ) értékét:

$$\eta_a(t) = [U(t)/U_0] \cdot 100\%. \quad (1)$$

Gyakran alkalmazott mennyiség a látszólagos tölthetőség ( $m_a$ ) is, mely a lecsengési görbe alatti területtel arányos. Értéke a  $t_2 - t_1$  intervallumban megadható, mint

$$m_a = \int_{t_1}^{t_2} U(t) dt / U_0. \quad (2)$$

A kőzetek polarizálhatóságának hátterében a következő hatások azonosíthatók. A membránpolarizáció ionos vezetőképeségű porózus kőzetekben alakul ki, az agyagszemcsék negatív felületi töltése következtében. Az elektródapolarizáció során elektrokémiai kölcsönhatás jön létre a kőzetben található elektronos vezetőképeségű szemcsék és a pórustérben található ionos oldat között. Filtrációs polarizáció jelentkezik üledékes összetételekben a pórusokat kitöltő vezető fluidumokhoz kötődően, a negatív és pozitív ionok eltérő mozgékonyasága miatt fellépő ionkoncentráció-különbség miatt. Redoxpolarizáció lép fel oxidatív vagy redukzív kémiai komponenseket tartalmazó talajok és kőzetek esetén, például vegyi szennyeződés hatására.

A kőzetekben tehát a gerjesztés hatására többféle polarizációs mechanizmus játszódhat le akár egyidejűleg is, amelyeket különböző karakterisztikus idővel jellemezhetünk. Ezek együttes hatása jelenik meg a mérési adatokban, és amelyek, ha elkülöníthetők, alapvető információval szolgálhatnak a vizsgált térrész felépítéséről, litológiájáról, inhomogenitásairól. Egy reális fizikai környezetben az egymástól elkülönülő polarizációs folyamatok megszámlálható számosságúak lehetnek, azonban a jelenséget végtelen sok időállanóval jellemezhető polarizációs rendszerként is felfoghatjuk (Turai 1981). Látni fogjuk, hogy a GP inverziós kiértékelés során a sorfejtéses inverziót fogjuk alkalmazni, az előbbiekből következően azonban ez a közelítés a GP probléma megfelelő leírásának is tekinthető.

Jelen tanulmányban, az időtartományban regisztrált GP lecsengési görbéket egy új, G\_LSQ algoritmusnak nevezett, spektrális inverziós módszerrel fogjuk kiértékelni és összevetni a korábban használt tradicionális eljárással (T\_LSQ módszer). Célunk egy olyan inverziós metodika bemutatása, amely a sorfejtéses inverziós megoldások pontosságát és megbízhatóságát növeli, amikor a bázisfüggvények zárt alakban integrálhatók.

## Adatok kiértékelése sorfejtéses inverziós eljárással

A Miskolci Egyetem Geofizikai Tanszéke több évtizede eredményesen foglalkozik geofizikai inverziós módszerek fejlesztésével, amelynek során egyre nagyobb szerepet kapott egy új kutatási irány, a sorfejtéses inverzió. Ennek lényege, hogy bonyolult (laterálisan és vertikálisan inhomogén) földtani szerkezeteken mért adatok feldolgozását, értelmezését sorfejtéses diszkretizációval, a sorfejtési együtthatókra megfogalmazott inverziós eljárásban végezzük el. Az eljárás legnagyobb előnye, hogy viszonylag kevés (néhányszor tíz) sorfejtési együttható bevezetése mellett is megfelelő felbontás érhető el úgy, hogy a megoldandó probléma túlhatározott inverz feladatra vezet. A módszer számos területen nyert alkalmazást: gravitációs (Dobróka, Völgyesi 2008, Dobróka, Völgyesi 2010), DC geoelektro-

mos (Gyulai et al, 2010, Gyulai et al, 2017), magnetotellurikus (Dobróka et al, 2013), mélyfúrású geofizika (Dobróka, Szabó 2010, Dobróka et al, 2016), adatfeldolgozás (Vass, Dobróka 2010, Dobróka et al, 2015), indukált polarizáció (Turai és társai 2010, Turai, Dobróka 2011). Jelen tanulmányban a sorfejtéses inverzió módszerét laboratóriumban, ércartalmú kőzetmagokon végzett gerjesztett polarizációs mérések kiértékelésére, az időállandó-spektrum meghatározására és az egyes polarizációs hatások elkülönítésére alkalmazzuk.

A probléma direkt feladatát Turai (1981) az alábbi integrálegyenlettel fogalmazta meg:

$$\eta_a(t) = \int_0^{\infty} w(\tau) \exp(-t/\tau) d\tau, \quad (3)$$

ahol  $t$  a gerjesztő áram kikapcsolása óta eltelt idő,  $\tau$  az időállandó,  $w(\tau)$  az időállandó-spektrum. Célunk az időállandó-spektrum meghatározása, melyre Turai (1981) a TAU-transzformáció műveletét vezette be:

$$w(\tau) = \text{TAU}\{\eta_a(t)\}, \quad (4)$$

mely több módszerrel is elvégezhető, közelítő megoldására Turai (1985) polinomos interpolációs és Fourier-soros megoldásokat dolgozott ki. A következőkben a TAU-transzformációt mint inverz feladatot oldjuk meg.

Mivel a  $w(\tau)$  időállandó-spektrum ismeretlen függvény, ezért első lépésben diszkrétizációra van szükség, azaz véges számú paraméterrel jellemezve kell meghatározni a spektrumot. A diszkrétizációt sorfejtés formájában, megfelelően választott  $\Phi_q$  bázisfüggvényrendszer szerint végezhetjük el:

$$w(\tau) = \sum_{q=1}^Q B_q \Phi_q(\tau), \quad (5)$$

ahol a  $B_q$  sorfejtési együtthatók jelentik a feladat meghatározni kívánt ismeretlenjeit,  $\Phi_q(\tau)$  pedig az ismert bázisfüggvényeket jelöli,  $Q$  a sorfejtési tagok száma. Az időállandó-spektrum (5) egyenletben megfogalmazott sorfejtéses felírását behelyettesítve a direkt feladatot jelentő (3) válasz egyenletbe, az alábbi összefüggésre jutunk:

$$\begin{aligned} \eta_a(t_k) &= \int_0^{\infty} \sum_{q=1}^Q B_q \Phi_q(\tau) \exp(-t_k/\tau) d\tau \\ &= \sum_{q=1}^Q B_q \int_0^{\infty} \Phi_q(\tau) \exp(-t_k/\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (6)$$

mely megadja a látszólagos polarizálhatóság (elméleti) értékét a gerjesztő áram kikapcsolása utáni  $t_k$  időpillanatban. Vezessük be a  $G_{kq}$  jelölést a (6) egyenletben definiált integrálra (Jacobi-mátrix), azaz

$$G_{kq} = \int_0^{\infty} \Phi_q(\tau) \exp(-t_k/\tau) d\tau. \quad (7)$$

Látható, hogy a (7) összefüggés bevezetésével a (3) válasz egyenlet nagyon egyszerű alakot ölt, a látszólagos pola-

rizálhatóság számított értékeit a sorfejtési együtthatók lineáris kifejezésekként kapjuk:

$$\eta_k = \sum_{q=1}^Q B_q G_{kq}.$$

A bázisfüggvények alkalmas megválasztása a feladattól függ, figyelembe véve esetleges előzetes ismereteket (feltevételeket) is. A GP módszer korábbi gyakorlatához illeszkedik a Dirac-féle delta-függvények szerinti sorfejtés, amely az ún. „vonalas” időállandó-spektrum leírására alkalmas. Az (5) egyenlet ekkor így írható:

$$w(\tau) = \sum_{q=1}^Q B_q \delta(\tau - \tau_q),$$

ahol  $\tau_q$  a  $q$ -adik diszkrét polarizációs mechanizmushoz tartozó időállandó. A direkt feladatot megfogalmazó (6) egyenlet

$$\eta(t_k) = \eta_k = \sum_{q=1}^Q B_q \int_0^{\infty} \delta(\tau - \tau_q) \exp(-t_k/\tau) d\tau,$$

amely a Dirac-delta integrációs tulajdonsága miatt így is írható:

$$\eta_k^{\text{számított}} = \sum_{q=1}^Q B_q \exp(-t_k/\tau_q), \quad (8)$$

ahonnan láthatjuk, hogy a sorfejtési együtthatók jelentése az adott  $\tau_q$  időállandóhoz tartozó spektrális amplitúdó. A Jacobi-mátrix elemeit ekkor a

$$G_{kq} = \left( \frac{\partial \eta^{\text{számított}}}{\partial B_q} \right)_{t=t_k} = \exp(-\lambda_q t_k) \quad (9)$$

alakban állíthatjuk elő, ahol  $\lambda_q = \tau_q^{-1}$ .

A mért és számított adatok eltérését tartalmazó vektor felírható az

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\eta}^{\text{mért}} - \boldsymbol{\eta}^{\text{számított}}$$

alakban, melynek alkalmasan választott normájaként megfogalmazható az inverz feladat célfüggvénye.

### Tradicionális $T_{LSQ}$ algoritmus

Diszkrét adatok inverziójában gyakori a célfüggvény alábbi választása (legkisebb négyzetek módszere):

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{k=1}^N e_k^2 = \sum_{k=1}^N \left( \eta_k^{\text{mért}} - \eta_k^{\text{számított}} \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^N \left( \eta_k^{\text{mért}} - \sum_{q=1}^Q B_q G_{kq} \right)^2 = \min., \end{aligned} \quad (10)$$

ahol  $N$  a mérési adatok száma. A megoldás az ismert normál egyenletrendszerre vezet:

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{B} = \mathbf{G}^T \boldsymbol{\eta}^{\text{mért}}, \quad (11)$$

amelynek megoldása a sorfejtési együtthatókra

$$\mathbf{B} = (\mathbb{G}^T \mathbb{G})^{-1} \mathbb{G}^T \boldsymbol{\eta}^{\text{mért.}}$$

Megoldásként az utolsó iterációs lépésben becült modellparaméter vektorelemeit fogadjuk el, melyekkel számított elméleti értékek a mért adatokhoz (a Gauss-féle legkisebb négyzetek elve értelmében) legközelebb állnak.

Koordinátás írásmódban az egyenletrendszer mátrixa és a transzformált adatvektor:

$$A_{lq} = \sum_{k=1}^N G_{kl} G_{kq}, \quad r_l = \sum_{k=1}^N G_{kl} \eta_k^{\text{mért}}, \quad (12)$$

melyekkel a normálegyenlet így írható:

$$\sum_{q=1}^Q B_q A_{ql} = r_l. \quad (13)$$

A modellparaméterek vektorának meghatározása után, a sorfejtési együtthatókat az (5) egyenletbe helyettesítve kiszámítható az időállandó-spektrum, melyet az időállandók függvényében ábrázolva elkülöníthetővé válnak az egyes polarizációs hatások.

### Általánosított G\_LSQ algoritmus

A (8) modellegyenlet egyszerűsége lehetővé teszi általánosabb célfüggvény bevezetését:

$$E_2 = \int_0^{t_{\max}} (\eta^{\text{mért}} - \eta^{\text{számított}})^2 dt = \int_0^{t_{\max}} \left( \eta^{\text{mért}} - \sum_{q=1}^Q B_q \exp(-\lambda_q t) \right)^2 dt = \min., \quad (14)$$

ahol  $t_{\max}$  a maximális mérési idő és  $\lambda_q = \tau_q^{-1}$ . A minimumfeltétel ( $\partial E_2 / \partial B_l = 0$ ) a

$$2 \int_0^{t_{\max}} \left( \eta_k^{\text{mért}} - \sum_{q=1}^Q B_q \exp(-\lambda_q t) \right) \exp(-\lambda_l t) dt = 0$$

egyenletre vezet, ahonnan (a „mért” jelzést elhagyva)

$$\int_0^{t_{\max}} \eta \exp(-\lambda_l t) dt = \sum_{q=1}^Q B_q \int_0^{t_{\max}} \exp[-(\lambda_q + \lambda_l)t] dt. \quad (15)$$

A jobb oldal közvetlenül integrálható:

$$\sum_{q=1}^Q B_q \int_0^{t_{\max}} \exp[-(\lambda_q + \lambda_l)t] dt = \sum_{q=1}^Q B_q \frac{\exp[-(\lambda_q + \lambda_l)t_{\max}] - 1}{-(\lambda_q + \lambda_l)}, \quad (16)$$

a bal oldalt pedig írjuk fel az egyszerű integrálközelítő összeggel

$$\int_0^{t_{\max}} \eta(t) \exp(-\lambda_l t) dt = \sum_{k=0}^{N-1} \eta_k \exp(-\lambda_l t_k) \Delta t, \quad (17)$$

ahol  $\Delta t$  két egymást követő mérés között eltelt idő (egyenközű mintavételt feltételezünk)! Vezessük be az

$$r_l = \sum_{k=0}^{N-1} \eta_k \exp(-\lambda_l t_k) \Delta t \quad (18)$$

és az

$$A_{ql} = \frac{\exp[-(\lambda_q + \lambda_l)t_{\max}] - 1}{-(\lambda_q + \lambda_l)} \quad (19)$$

jelölést! Ekkor a (15) egyenlet (16) és (17) felhasználásával a következő eredményre vezet:

$$\sum_{q=1}^Q B_q A_{ql} = r_l, \quad (20)$$

vagy mátrix alakban:

$$\mathbb{A} \mathbf{B} = \mathbf{r}. \quad (21)$$

Ez az inhomogén lineáris egyenletrendszer a sorfejtési együtthatókra megoldható:

$$\mathbf{B} = \mathbb{A}^{-1} \mathbf{r}$$

és ezzel a spektrális együtthatók meghatározhatók. A TAU-transzformációt mint inverz feladatot a G\_LSQ eljárás segítségével általános alakban is megadhatjuk. Vezessük be az

$$u_l = \exp(-\lambda_l t)$$

elemekkel definiált oszlopvektort, ahonnan (19), (20), (21) jelöléseinek felhasználásával a  $w(\tau)$  közelítését jelentő sorfejtési együtthatókat – a TAU-transzformáció egy approximációjaként értelmezhető – összefüggés alapján kapjuk:

$$\mathbf{B} = \int_0^{t_{\max}} \eta(t) \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) \mathbf{u}(\boldsymbol{\lambda}, t) dt.$$

Mint látható, a G\_LSQ módszer az egyenletrendszer mátrixát analitikusan állítja elő, ezért a T\_LSQ módszerhez képest várhatóan pontosabb inverziós eredményt hoz. A két eljárás kapcsolatának vizsgálata céljából írjuk fel a (12) mátrixot (9) felhasználásával

$$A_{lq} = \sum_{k=1}^N G_{kl} G_{kq} = \exp[-(\lambda_q + \lambda_l)t],$$

ahol egyenközű mintavételt feltételezve  $t_k = k \Delta t$ . Vezessük be a  $q = \exp[-(\lambda_q + \lambda_l)\Delta t]$  jelölést, ekkor a mátrix mint mértani sor összege állítható elő:

$$A_{lq} = \sum_{k=0}^N q^k = \frac{q^N - 1}{q - 1}. \quad (22)$$

Ha a  $(\lambda_q + \lambda_l)\Delta t$  mennyiség kicsi, a nevezőt Taylor-sora első tagjával helyettesítve az

$$A_{lq} = \frac{q^N - 1}{q - 1} \approx \frac{\exp[-(\lambda_q + \lambda_l)N\Delta t] - 1}{-(\lambda_q + \lambda_l)\Delta t} = \frac{\exp[-(\lambda_q + \lambda_l)t_{\max}] - 1}{-(\lambda_q + \lambda_l)\Delta t}$$

eredményre jutunk, amely az időt  $\Delta t$  egységekben mérve ( $\Delta t = 1$ ) megegyezik a  $G\_LSQ$  (19) egyenletben adott mátrixával. Egyenközü mintavétel és a Taylor-sorral közelítés feltételének teljesülése esetén a két módszer azonos eredményt ad.

A  $G\_LSQ$  eljárás azonban tovább javítható (17) pontosságával, ha az adatokat – két mintavétel között – lineárisan közelítjük:

$$r_l = \int_0^{t_{max}} \eta \exp(-\lambda_l t) dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\eta_k + m_k(t - t_k)] \exp(-\lambda_l t) dt, \tag{23}$$

ahol  $m_k = (\eta_{k+1} - \eta_k) / (t_{k+1} - t_k)$ . Parciális integrálással a (23) egyenlet a következő alakot ölti

$$r_l = \frac{1}{\lambda_l} \sum_{k=0}^{N-1} \{ [\eta_k - m_k(t_k - 1/\lambda_l)] \times [\exp(-\lambda_l t_k) - \exp(-\lambda_l t_{k+1})] + m_k [t_k \exp(-\lambda_l t_k) - t_{k+1} \exp(-\lambda_l t_{k+1})] \}. \tag{24}$$

A javított egyenletrendszer ekkor

$$\sum_{q=1}^Q B_q A_{ql} = r_l.$$

alakú, ahol  $A_{ql}$  a (19),  $r_l$  pedig a (24) egyenlettel adott, a megoldás mátrix alakban:

$$\mathbf{B} = \mathbb{A}^{-1} \mathbf{r}. \tag{25}$$

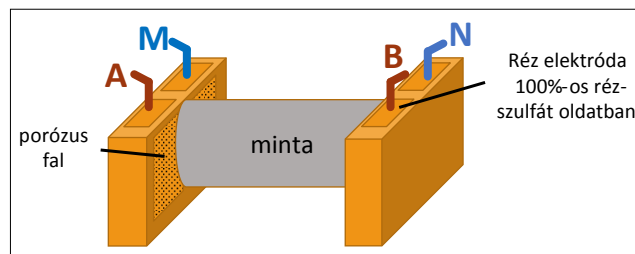
Az így előállított sorfejtési együtthatókkal vonalas  $\tau = \lambda^{-1}$  időálló-spektrum megadható.

### Gyakorlati alkalmazás

Az 1970-es évek végén, a 80-as évek elején intenzív módszer- és műszerfejlesztés zajlott a Geofizikai Tanszéken a gerjesztett polarizációs laboratóriumi mérések tekintetében dr. Takács Ernő professzor vezetésével. Ennek eredményeképpen egy nagy pontosságú mérőrendszer és a polarizálhatósági görbét részletesen mintavételező adatrendszerek születtek. Ekkor a mért adatokat a logaritmikus derivált látszólagos polarizálhatósági görbe számításának és exponenciális komponensekre bontásának módszerével, illetve spektrálanalízissel dolgozták fel. Jelen tanulmányban ezeket az adatrendszereket felhasználva bemutatjuk, hogy a javasolt sorfejtéses inverziós  $G\_LSQ$  módszerrel a laboratóriumi mérési adatok feldolgozhatók és értelmezhetők, az előállított időálló-spektrumokon több GP-hatás is elkülöníthetővé válik.

A laboratóriumi körülmények között történő gerjesztett polarizációs mérésekhez alkalmas műszer kialakítása kitartható kísérletezést és gondos előkészítést igényelt. Elsőként fontos a minták párhuzamos síklapok mentén történő

vágása a jó elektromos csatolás érdekében. Mérés előtt a kőzetmintákat 24 órára desztillált vízbe helyezték. Emellett kiemelt szerepe van a közetnek kapcsolódó fém elektrodáknál fellépő elektrodapolarizációs jelenség csökkentésének, amely a méréseket zajjal terhelné. Ennek érdekében nem polarizálódó elektrodákat használtak. Azaz, a réz elektrodák saját sójuk telített oldatába (100%-os réz-szulfátoldat, melyet agar-aggarral tettek megfelelően kocsonyássá) merültek, és az oldat porózus lapokon keresztül disszociált ioncserével biztosította az elektromos csatolást a minta felé. Az így felépített mintabefogót az 1. ábra mutatja, melyet egy Faraday-kalitkaként működő fémdobozba helyeztek, hogy a mérés környezetében előforduló elektromos hatásoktól elszigeteljék. Az 1. ábrán jelölt A és B tápelektrodákat egy bipoláris áramgenerátorra kötötték, ezzel három gerjesztettségi állapotot ( $I_g = 0$ ,  $I_g < 0$ ,  $I_g > 0$ ) hozhattak létre (Kutatási jelentés 1979).



1. ábra Laboratóriumi GP mérésekhez használt minta befogó rendszer sematikus ábrája

Figure 1 Schematic picture of the instrument used for laboratory IP measurements

Előzetesen végzett vizsgálatok azt mutatták, hogy a GP mérések elvégzéséhez a  $10 \mu A$  erősségű áram alkalmazása célravezető, ami jelen esetekben  $1,04 \mu A/cm^2$  áramsűrűségnek felelt meg. A mérés kezdetén meghatározták a természetes potenciál (PS) alapvonalat, azaz megvárták, amíg a mérőkörben stabilizálódott a gerjesztetlen állapotban mérhető feszültség. A látszólagos polarizálhatóság meghatározásához 15 percig tartó gerjesztési idő után az áramforrást kikapcsolták, majd közel 1000 másodpercen keresztül regisztrálták az M és N mérőelektrodák között fellépő potenciál különbséget. A mintavételezés kombinált lin-log idősor alapján történt a

$$t_{k,i} = t_{0,0} a^k (1 + \varepsilon i) \tag{26}$$

algorithmus szerint, ahol  $t_{0,0} = 0,125$  sec,  $a = 2$ ,  $\varepsilon = 0,1$ ,  $i = 0,1, \dots, 9$ ,  $k = 0,1, \dots, 12$ . A referenciaidőket az 1. táblázat tartalmazza.

Az 1984-ben készített kutatási jelentésben 21 kőzetmintán végzett GP mérés adatait foglalták össze. Jelen tanulmányban ezek közül az „1” jelű mintát választottunk ki bemutatásra. A minta Recsk mélyszintről származó szkarnos Fe érc. A polarizálhatósági görbeértékek grafikus ábrázolását a 2. ábra mutatja. Látható, hogy az „1” számú minta vastartalmának köszönhetően jól polarizálódott. Értéke 92,7%-ról 972,8 másodperc alatt 1,6%-ra csökkent.

**1. táblázat** GP mérésekhez tartozó referenciaidők másodpercben  
**Table 1** Reference times for the IP measurements in seconds

$k \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,125	0,138	0,150	0,163	0,175	0,188	0,200	0,213	0,225	0,238
1	0,250	0,275	0,300	0,325	0,350	0,375	0,400	0,425	0,450	0,475
2	0,500	0,550	0,600	0,650	0,700	0,750	0,800	0,850	0,900	0,950
3	1,000	1,100	1,200	1,300	1,400	1,500	1,600	1,700	1,800	1,900
4	2,000	2,200	2,400	2,600	2,800	3,000	3,200	3,400	3,600	3,800
5	4,000	4,400	4,800	5,200	5,600	6,000	6,400	6,800	7,200	7,600
6	8,000	8,800	9,600	10,400	11,200	12,000	12,800	13,600	14,400	15,200
7	16,000	17,600	19,200	20,800	22,400	24,000	25,600	27,200	28,800	30,400
8	32,000	35,200	38,400	41,600	44,800	48,000	51,200	54,400	57,600	60,800
9	64,000	70,400	76,800	83,200	89,600	96,000	102,400	108,800	115,200	121,600
10	128,000	140,800	153,600	166,400	179,200	192,000	204,800	217,600	230,400	243,200
11	256,000	281,600	307,200	332,800	358,400	384,000	409,600	435,200	460,800	486,400
12	512,000	563,200	614,400	665,600	716,800	768,000	819,200	870,400	921,600	972,800

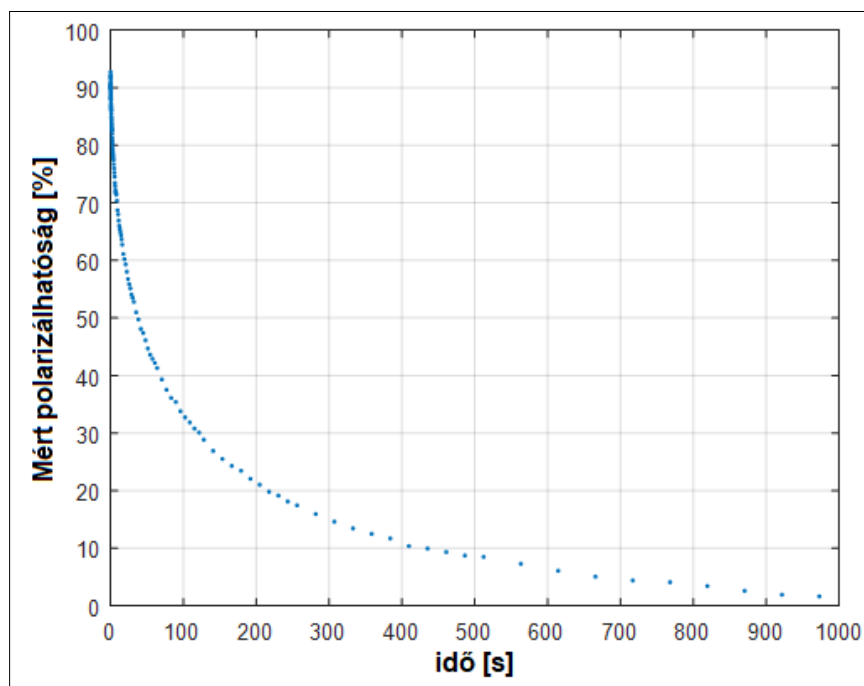
A kiértékelések során az időállandó-tartományt 100 egyenlő részre osztottuk, a  $B_q$  spektrális amplitúdót a  $q$ -edik intervallum közepével definiált időállandóhoz tartozónak tekintettük. A mérési adatok száma 130, azaz az inverz feladat túlhatározott. Annak érdekében, hogy biztosítsuk a spektrális amplitúdók pozitívítását, új inverziós változókként a  $b_q = \log(B_q)$  paramétereket vezettük be. Az így előálló nemlineáris inverzióban az iterációk számát minden esetben egységesen 40-nek választottuk, mivel a további ismétlések már nem hoztak lényeges változást a becsült modellparaméterek értékében. Az inverziós ered-

ményt relatív adattérbeli távolsággal, a paraméterbecslési hibával és a korrelációs normával jellemeztük. A relatív adattávolságot a

$$D = \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left( \frac{\eta_k^{\text{mért}} - \eta_k^{\text{számított}}(t_k)}{\eta_k^{\text{mért}}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (27)$$

formula adja meg. A paramétertérbeli kovariancia mátrix a  $b_q = \log(B_q)$  változókra a

$$\text{cov } \mathbf{b} = \mathbf{G}^{-g} \text{cov } \mathbf{d}^{\text{mért}} (\mathbf{G}^{-g})^T$$



**2. ábra** Az „1” mintán mért látszólagos polarizálhatóság lecsengési görbéje  
**Figure 2** Decay curve of apparent polarizabilities measured on sample “1”

képlettel számítható (Menke 1984), ahol

$$\mathbf{G}^{-g} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T$$

az általánosított inverz,  $\text{cov} \mathbf{d}^{\text{mért}}$  az adattérbeli kovarianciamátrix. A logaritmikus változók kovarianciamátrixából a  $\text{cov} \mathbf{B}$  sorfejtési együtthatók hibaterjedési törvényével térünk át. A sorfejtési együtthatók korrelációs mátrixát a

$$(\text{corr} \mathbf{B})_{ij} = \frac{(\text{cov} \mathbf{B})_{ij}}{[(\text{cov} \mathbf{B})_{ii} (\text{cov} \mathbf{B})_{jj}]^{1/2}}$$

formula adja, amelyből a korrelációs norma (mean spread) az

$$S = \left[ \frac{1}{Q(Q-1)} \sum_{j=1}^Q \sum_{i=1}^Q ((\text{cov} \mathbf{B})_{ij} - \delta_{ij}) \right]^{1/2} \quad (28)$$

képlettel számítható, ahol  $\delta_{ij}$  a Kronecker-delta.

### Inverziós eredmények

A mért adatok inverzióját elsőként a tradicionális T\_LSQ algoritmussal végeztük el. Startmodellként az összes (logaritmikus) inverziós változónak 0,15 értéket adtunk, amivel a számított és mért adatok (27) szerinti távolsága  $D = 21,14$ , ami igen nagy érték. A 40 iteráció után az eredmény-moddellen számított és a mért adatok távolsága  $D = 0,0377$ . A jó illeszkedést a 3. ábra is demonstrálja.

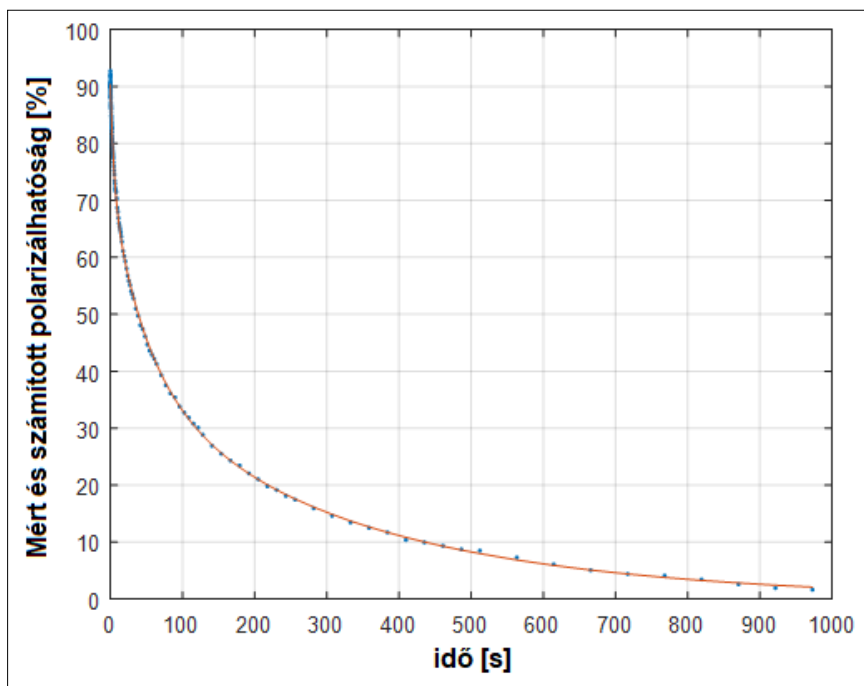
Az inverzió eredményeként kapott vonalas spektrumot a 4. ábra mutatja. Tapasztalatunk szerint az 500 sec feletti időállandó tartományban nincs gerjesztési mechanizmus. Mivel  $Q = 100$  ismeretlent választottunk, a lehetséges időállandó-intervallumokat egyenközűen 5 sec hosszúságú-

2. táblázat | Markáns ( $B > 0,001$ ) spektrumvonalak értékei a T\_LSQ inverzióban

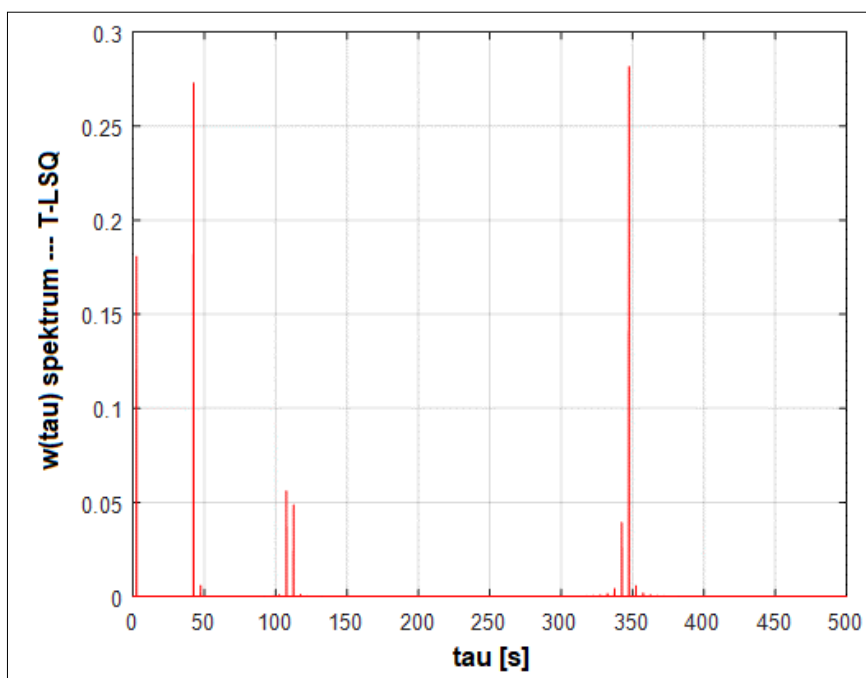
Table 2 | Numeric values of the dominant ( $B > 0,001$ ) spectral lines in T\_LSQ inversion

tau (sec)	B sorfejtési együttható	Becslési hiba (B)	Relatív becslési hiba
5	0,1807	0,008359	0,0463
45	0,2729	0,026758	0,0980
50	0,0058	0,000549	0,0936
110	0,0560	0,021814	0,3892
115	0,0486	0,016289	0,3346
120	0,0010	0,000015	0,0150
335	0,0015	0,000036	0,0231
340	0,0041	0,000172	0,0412
345	0,0393	0,006696	0,1702
350	0,2816	0,015957	0,0566
355	0,0057	0,000183	0,0318
360	0,0018	0,000037	0,0200

nak definiáltuk. Az ábrán látható vonalak ezen intervallumok közepén jelentkeznek. Az egyes (0,001-nél nagyobb értékű) spektrumvonalak esetében az összetartozó (időállandó, spektrális sűrűség, a becslési hiba és a relatív hiba) értékeket a 2. táblázatban mutatjuk be. A minta markáns gerjesztést az 5, 45, 350 sec időállandóknál mutat, kisebb amplitúdó a 110, 115 sec-nál jelentkezik. Az inverziós változók átlagos korreláltságát a korrelációs norma  $S = 0,8716$  értéke mutatja, az átlagos relatív becslési hiba 0,1149.



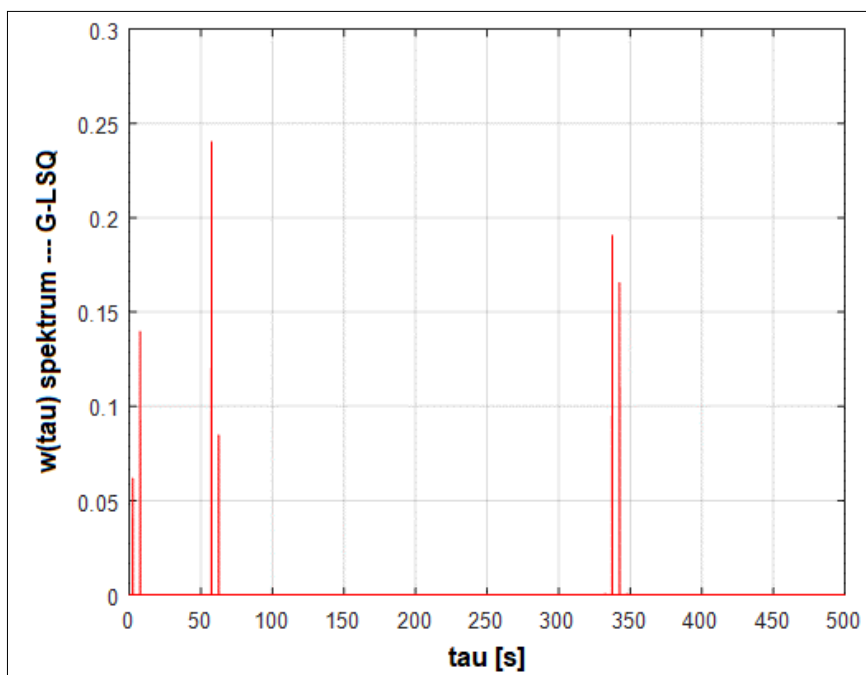
3. ábra | Mért és számított látszólagos polarizálhatóság lecsengési görbéje  
 Figure 3 | Decay curve of the measured and calculated apparent polarizabilities



4. ábra Sorfejtéses inverzió alapuló T\_LSQ algoritmussal előállított időállandó-spektrum az „1” minta esetén  
 Figure 4 Time-constant spectrum of sample “1” determined by series expansion based inversion using T\_LSQ algorithm

A mért adatok inverzióját a G\_LSQ algoritmussal is elvégeztük. Startmodellként ismét a logaritmusos inverziós változók 0,15 értékét adtuk. A 40 iteráció után az eredménymodellen számított és a mért adatok távolsága  $D = 0,000137$ , ami jelentős javulás a T\_LSQ eljáráshoz képest. Az inverzió eredményeként kapott vonalas spektrumot az

5. ábra mutatja, ahol az egyes tau-intervallumokat az előzőek szerint választottuk. Az egyes (0,001-nél nagyobb értékű) spektrumvonalak esetében az összetartozó (időállandó, spektrális sűrűség és becslési hiba) értékeket a 3. táblázatban mutatjuk be. A minta markáns gerjesztést az 5–10, 60–65, 340–345 sec időállandóknál mutat, az



5. ábra Sorfejtéses inverzió alapuló új G\_LSQ algoritmussal előállított időállandó-spektrum az „1” minta esetén  
 Figure 5 Time-constant spectrum of sample “1” determined by series expansion based inversion using the newly suggested G\_LSQ algorithm



**3. táblázat** | Markáns ( $B > 0,001$ ) spektrum vonalak értékei a G\_LSQ inverzióban  
**Table 3** | Numeric values of the dominant ( $B > 0.001$ ) spectral lines in G\_LSQ inversion

tau (sec)	$B$ sorfejtési együttható	Becslési hiba ( $B$ )	Relatív becslési hiba
5	0,0618	0,000184	0,0030
10	0,1397	0,000158	0,0011
60	0,2403	0,000357	0,0015
65	0,0847	0,000342	0,0040
340	0,1906	0,000465	0,0024
345	0,1655	0,000457	0,0028

T\_LSQ-nál kapott kisebb amplitúdó 110, 115 sec-nál nem jelentkezik. Az inverziós változók korreláltságát a korrelációs norma  $S = 0,7602$  értéke mutatja, az átlagos relatív becslési hiba 0,0122. Az eredmény lényegesen pontosabb inverziót mutat, kisebb korreláltsággal.

Az eredményekből látható, hogy a látszólagos polarizálhatósági adatok sorfejtéses inverziós eljárásban való feldolgozásával az időállandó-spektrum a gyakorlat számára megfelelő felbontással és pontossággal állítható mindkét módszerrel. Ezáltal a polarizációs hatások elkülönítésére a vizsgált eljárások egyaránt alkalmasak. A G\_LSQ eljárás lényegesen (az átlagos relatív becslési hiba vonatkozásában egy nagyságrenddel) pontosabb inverziós eredményeket mutat, kisebb korreláltsággal. A pontosabb és stabilabb inverziót a normálegyenlet-rendszer mátrixának analitikus integrálással történt számítása tette lehetővé, így megállapítható, hogy a (14) egyenletben definiált célfüggvény alkalmazása jelentős inverziós előnyökre vezet.

## Összefoglalás

Az időtartománybeli gerjesztett polarizációs méréseket gyakran használják érckutatási feladatok megoldására. Számos publikáció született a módszer terepi felhasználására. Jelen tanulmányban laboratóriumi GP látszólagos polarizálhatósági adatokat dolgoztunk fel a korábbi exponenciális komponensekre bontás helyett, a sorfejtéses inverziós eljárás alkalmazásával. A sorfejtési együtthatók inverziós becslése után kiszámítottuk az időállandó-spektrumot, melyet grafikusán ábrázolva több polarizációs hatást különítettünk el. Javaslatot tettünk az inverziós célfüggvény általánosítására, és annak minimalizálásával definiáltuk a G\_LSQ algoritmust. A tradicionális T\_LSQ és az új G\_LSQ algoritmust laboratóriumi mérési adatokon teszteltük. Kimutattuk, hogy az új G\_LSQ eljárás lényegesen (az átlagos relatív becslési hiba vonatkozásában egy nagyságrenddel) pontosabb inverziót eredményez, kisebb korreláltsággal.

## Köszönetnyilvánítás

A cikkben bemutatott eredményekhez kapcsolódó kutatást az Országos Tudományos Kutatási Alap támogatta az OTKA-NKFIH 135323 számú projektek keretében, amit ezúton is megköszönnek a szerzők.

## A tanulmány szerzői

Fancsik Tamás, Turai Endre, Szabó Norbert Péter, Dobróka Mihály

## Hivatkozások

- Abu Zeid N., Corradini E., Bignardi S., Morandi N., Nizzo V., Santarato G. (2016): Unusual geophysical techniques in archaeology – HVSR and induced polarization. A case history. Near Surface Geoscience 2016 Conference, Barcelona, Paper We 22 A13
- Bleil D. F. (1953): Induced Polarization, a method of geophysical prospecting. Geophysics, 18, 636–661.
- Dakhnov V. N. (1941): Electrical well logging, interpretation of electric logs. Moszkva
- Dobróka M., Szabó N. P. (2010): Sorfejtéses inverzió II. Mélyfúrású geofizikai adatok feldolgozása intervallum inverziós eljárással. Magyar Geofizika, 51/1, 25–42.
- Dobróka M., Völgyesi L. (2010): Sorfejtéses inverzió IV. A nehézségi erőter potenciálfüggvényének inverziós előállítás. Magyar Geofizika, 51/3, 143–149.
- Dobróka M., Prácer E., Kavanda R., Turai E. (2013): Quick imaging of mt data using an approximate inversion algorithm. Acta Geodaetica et Geophysica, 48 /1, 17–25.
- Dobróka M., Szabó N. P., Tóth J., Vass P. (2016): Interval inversion approach for an improved interpretation of well logs. Geophysics, 81/2, D155–D167. <https://doi.org/10.1190/geo2015-0422.1>
- Dobróka M., Szegedi H., Molnár J. S., Szűcs P. (2015): On the reduced noise sensitivity of a new Fourier transformation algorithm. Mathematical Geosciences, 47/6, 679–697. <https://doi.org/10.1007/s11004-014-9570-x>
- Dobróka M., Völgyesi L. (2008): Inversion reconstruction of gravity potential based on gravity gradients. Mathematical Geosciences, 40/3, 299–311.
- Gyulai Á., Ormos T., Dobróka M. (2010): Sorfejtéses inverzió V. Gyors 2D geoelektromos inverziós módszer. Magyar Geofizika, 51/4, 185–195.
- Gyulai Á., Szűcs P., Turai E., Baracza M. K., Fejes J. (2017): Geoelectric characterization of thermal water aquifers using 2,5D inversion of VES measurements. Surveys in Geophysics, 38/2, 503–526.
- Keller G. W., Frischknecht C. (1966): Electrical Methods in Geophysical Prospecting. Pergamon Press, Oxford
- Kutatási jelentés (1979): A gerjesztett polarizáció (GP) dinamikus kőzetfizikai paraméterének meghatározására szolgáló műszer-módszer továbbfejlesztése. Nehézipari Műszaki Egyetem, Geofizikai Tanszék
- Kutatási jelentés (1984): Jelentés a kőzetek és ásványok gerjesztett potenciál kőzetfizikai paraméterének méréséről. Nehézipari Műszaki Egyetem, Geofizikai Tanszék
- Menke W. (1984): Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory. Academic Press

- Schlumberger C. (1930): Etude sur la prospection électrique du sous-sol (rev. ed.). Párizs, Gauthier Villars
- Seigel H. O. (1959): Mathematical formulation of type curves for induced polarization. *Geophysics*, 24/3, 546–565.
- Tavakoli S., Bauer T. E., Rasmussen T. M., Weihed P., Elming S.-A. (2016): Deep massive sulphide exploration using 2D and 3D geoelectrical and induced polarization data in Skellefte mining district, northern Sweden. *Geophysical Prospecting*, 64, 1602–1619.
- Turai E. (1981): GP time-domain görbék Tau-transzformációja. *Magyar Geofizika*, 22/1, 29–36.
- Turai E. (1985): TAU-transformation of time-domain IP curves. *Annales Univ. Sci. Budap. De R. Eötvös Nominatae. Sectio Geophysica et Meteorologica*, Tomus I–II.
- Turai E. (2011): Data processing method developments using TAU-transformation of time-domain IP data: II. interpretation results of field measured data. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 46/4, 391–400.
- Turai E., Dobróka M. (2002): A new tool for surveying waste site, oil reservoir and oil contaminated soil: The generalized TAU transform method. In: Besenyei L., Shammazov A. M. (szerk.), *Intellectual Service for Oil & Gas Industry: Analysis, Solutions, Perspectives*. University of Miskolc, Ufa State Petroleum Technological University, pp. 156–161.
- Turai E., Dobróka M., Herczeg Á. (2010): Sorfejtéses inverzió III. Gerjesztett polarizációs adatok inverziós feldolgozása. *Magyar Geofizika*, 51/2, 88–98.
- Turai E., Dobróka M. (2011): Data processing method developments using TAU-transformation of time-domain IP data: I. theoretical basis. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 46/3, 283–290.
- Vass P., Dobróka M. (2010): Sorfejtéses inverzió I. Fourier-transzformáció mint inverz feladat, *Magyar Geofizika*, 50/4, 141–152.
- Viezzoli A., Cull J. P., Massie D. (2006): Mapping fly-ash water pond leakage with TEM and IP data at Loy Yang coal-mine (Australia). *Near Surface Geophysics*, 4/5, 305–311.
- Wait J. R. (1959): *Overvoltage Research and Geophysical Applications*. Pergamon Press, London