AZ INTERPOLÁCIÓRÓL.

Bevezetés.

Legyen C a komplex x változó síkjában megadott egyszerű zárt görbe (JORDAN-féle görbe). Válasszunk a C görbén előbb egy $x_1^{(1)}$ helyet, majd két egymástól különböző $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$ helyet, azután három, egymástól különböző $x_1^{(3)}$, $x_2^{(3)}$, $x_3^{(3)}$ helyet, s. í. t.; általában k, egymástól különböző $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ helyet ($k=1, 2, 3, \ldots$). Az x-nek minden, a C görbén értelmezett $f(x)$ függvényéhez megalkothatjuk az

$$L_1(x),\ L_2(x),\ L_3(x), \ldots,\ L_k(x), \ldots \tag{1}$$

polinomsorozatot, ahol általánosan $L_k(x)$ az a k-nál alacsonyabb fokszámú racionális egész függvény, amely az $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ helyeken rendre ugyanazokat az értékeket veszi fel, mint $f(x)$: szóval $L_k(x)$ *az* $f(x)$ *függvényt az* $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ *helyeken interpoláló* LAGRANGE-*féle polinom.*

Kérdés, vajjon választható-e az

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)}, \\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)}, \\ x_1^{(3)},\ x_2^{(3)},\ x_3^{(3)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^{(k)},\ x_2^{(k)}, \ldots,\ x_k^{(k)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \tag{2}$$

helyek sorozata egyszersmindenkorra úgy, hogy valahányszor $f(x)$ a C görbe *zárt belsejében* (vagyis belső és kerületi pontjainak összességén) reguláris függvény, az (1) sorozat a C görbe zárt belsejében egyenletesen $f(x)$-hez konvergáljon?

Ezt a kérdést abban a speciális esetben, amikor a C görbe kör, RUNGE [1] vetette fel és oldotta meg, bebizonyítván, hogy $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ gyanánt a körbe írt szabályos k-szög szögpontjait választva, a (2) alatti kettős pontsorozatnak megvan a kívánt tulajdonsága.

Később FEJÉR [2] fogalmazta meg e kérdést a fenti határozott formában, s meg is oldotta, amennyiben bármely JORDAN-féle C görbéhez szerkesztett ily tulajdonságú (2) interpolálóhelysorozatot. Vizsgálataiban lényeges szerepe van a C görbe külsejének kör külsejére való kölcsönösen egyértelmű s a végtelen távoli helyet megtartó konformis leképezésének.[3]

A konformis leképezés elméletének alaptétele szerint adott JORDAN-féle C görbéhez mindig tartozik oly pozitív r sugár és oly, a C görbe külsején reguláris $z = \varphi(x)$ függvény, mely az $x = \infty$ helyen a

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 1 \tag{3}$$

feltételnek megfelelően viselkedik s amely a C görbe külsejét a $|z| > r$ körkülsőre kölcsönösen egyértelműen leképezi; e feltételek r-et és a $\varphi(x)$ függvényt egyértelműen meghatározzák. CARATHÉODORY vizsgálataiból [4] tudjuk, hogy $\varphi(x)$ értelmezhető a C görbén úgy, hogy folytonos maradjon akkor is, ha a C görbe külsejéhez kerületét is hozzászámítjuk és a C görbe így kapott

---

[1] C. RUNGE: *Theorie und Praxis der Reihen*, Sammlung SCHUBERT XXXII. (1904); 136. oldal.

[2] FEJÉR L.: *Interpolation und konforme Abbildung*, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1918; 319—331. oldal.

[3] Ki fog tűnni, hogy a konformis leképezés a dolog természetéhez szabott segédeszköz. — Legújabban FEKETE enélkül a segédeszköz nélkül, teljesen elemi úton szerkesztett bármely JORDAN-féle C görbéhez a kívánt tulajdonsággal bíró (2) interpolálóhelysorozatot: FEKETE M.: *Über Interpolation*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 6. (1926); 410—413. oldal.

[4] C. CARATHÉODORY: *Über die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Inneren einer* JORDAN*sche Kurve auf einen Kreis*, Mathematische Annalen, 73. (1913); 305—320. oldal.

zárt külsejét a $|z| \geqq r$ zárt körkülsőre képezi le kölcsönösen egyértelműen.

Már most FEJÉR[2] bebizonyította, hogy ha a (2) helyeket úgy választjuk, hogy a $z = \varphi(x)$ leképezés létesitette képeik, a

$$\begin{array}{l} z_1^{(1)}, \\ z_1^{(2)},\ z_2^{(2)}, \\ z_1^{(3)},\ z_2^{(3)},\ z_3^{(3)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z_1^{(k)},\ z_2^{(k)}, \ldots, z_k^{(k)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \tag{4}$$

helyek (ahol $z_l^{(k)} = \varphi(x_l^{(k)})$, $k = 1, 2, 3, \ldots;\ l = 1, 2, 3, \ldots, k$) a $|z| = r$ körbe írt szabályos k-szög szögpontjai,[5] akkor megvan a kívánt tulajdonságuk: ha $f(x)$ a C görbe zárt belsejében reguláris függvény, akkor ott egyenletesen

$$\lim_{k=\infty} L_k(x) = f(x). \tag{5}$$

Dolgozata végén[6] FEJÉR oly megjegyzést tesz, amelyből látszik, hogy ehhez elegendő a (2) interpolálóhelyeket általánosabban úgy megválasztani, hogy a nekik megfelelő (4) alatti *képhelyek* a következő értelemben[7] *egyenletesen* oszoljanak el a $|z| = r$ körön: ha γ a $|z| = r$ kör valamely tetszésszerinti íve,[8] σ a γ

---

[5] Ilyen eloszlású (2) helyek, potenciálelméleti jellemzéssel, először HILBERT vizsgálataiban fordulnak elő: D. HILBERT: *Über die Entwickelung einer beliebigen analytischen Funktion einer Variabeln in eine unendliche nach ganzen rationalen Funktionen fortschreitende Reihe*, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1897; 63—70. oldal.

[6] Idézett hely, 331. oldal.

[7] Ez a fogalom abban a speciális esetben, amikor $z_l^{(k)} = z_l$ független k-tól ($k=1, 2, 3, \ldots;\ l = 1, 2, \ldots, k$), WEYLtől származik: H. WEYL: *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, Mathematische Annalen, 77. (1916); 313—352. oldal.

[8] A körívhez mindig hozzászámítom azt a végpontját, amelyik a körívnek az óramutató járásával ellenkező befutásánál előbb következik, a másikat ellenben nem.

ív hosszúsága és a $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \ldots, z_k^{(k)}$ helyek közül ν_k számú van a γ íven, akkor

$$\lim_{k=\infty} \frac{\nu_k}{k} = \frac{\sigma}{2\pi r}. \tag{6}$$

Dolgozatomban bebizonyitom, hogy ez a FEJÉR-féle *elegendő* feltétel egyúttal *szükséges*[9] is, úgy, hogy érvényes a következő tétel:

I. *Legyenek az* $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ *interpoláló helyek* ($k = 1, 2, 3, \ldots$) *a* JORDAN-*féle* C *görbén. Jelöljék* $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \ldots, z_k^{(k)}$ *rendre ezek képeit annál a* $z = \varphi(x)$ *kölcsönösen egyértelmű, konformis, a kerületen folytonos leképezésnél, amely a* C *görbe külsejét kör külsejébe viszi át úgy, hogy a két sík végtelen távoli ívelemei «nyujtás és forgatás nélkül», azaz a*

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 1$$

feltételnek megfelelően egymásba menjenek át; r *legyen a kör sugara. Ahhoz, hogy, valahányszor* $f(x)$ *a* C *görbe zárt belsejében reguláris függvény és* $L_k(x)$ *jelenti az* $f(x)$ *függvényt*

[9] Azt, hogy a (2) helyek milyen tulajdonsága *szükséges és elegendő* ahhoz, hogy (5) bármely, a C görbe zárt belsejében reguláris $f(x)$ függvényre nézve ott egyenletesen fennálljon, először FABER vizsgálta meg: G. FABER: *Über* TSCHEBYSCHEFF*sche Polynome,* Journal für die reine und angewandte Mathematik, 150. (1920); 79—106. oldal. FABER a (2) helyek kivánt tulajdonságát a C görbének az

$$|x - x_1^{(k)}| . |x - x_2^{(k)}| . \cdots . |x - x_k^{(k)}| = \text{konstans } (= r^k) \tag{$\star$}$$

lemniszkátákkal való megközelithetőségével jellemzi. Vizsgálatait FEKETE egészitette ki: FEKETE M.: *Approximation von Kurven durch Lemniscaten und Approximation von analytischen Funktionen durch Polynome* (legközelebb meg fog jelenni a Mathematische Zeitschriftben). FABER — bebizonyitás nélkül — utal arra is, hogy a C görbének a ($\star$) lemniszkátákkal való megközelithetősége egyrészt (8) teljesülésével, másrészt a (2) helyeknek a C görbén való határozott asszimptotikus eloszlásával kapcsolatos. Ez a (potenciálelméletileg jellemzett) eloszlás abban a — mindenesetre legfontosabb — speciális esetben, amikor a C görbe egyetlen analitikai ivből áll (s FABER csak ezt az esetet tárgyalja), végelemzésben ugyanaz, mint a dolgozatom I. tételében jellemzett eloszlás.

az $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ *helyeken interpoláló* LAGRANGE-*féle polinomot, azaz azt a legfeljebb* $k-1$-*edfokú racionális egész függvényt, amely e helyeken rendre az* $f(x_1^{(k)}), f(x_2^{(k)}), \ldots, f(x_k^{(k)})$ *értékeket veszi fel, a* C *görbe zárt belsejében egyenletesen*

$$\lim_{k=\infty} L_k(x) = f(x)$$

legyen, szükséges és elegendő, hogy a $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \ldots, z_k^{(k)}$ *helyek* ($k=1, 2, 3, \ldots$) *egyenletesen oszoljanak el a* $|z| = r$ *körön, azaz, ha* γ *e kör bármely íve,* ν_k *a* $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \ldots, z_k^{(k)}$ *képhelyek közül a* γ *íven levők száma,*

$$\lim_{k=\infty} \frac{\nu_k}{k} = \frac{\sigma}{2\pi r}$$

legyen, ahol σ *a* γ *ív hosszúsága.*

Eszerint ahhoz, hogy (5) bármely, a C görbe zárt belsejében reguláris $f(x)$ függvényre nézve ott egyenletesen teljesüljön, mindenesetre szükséges a (2) helyeknek a következő értelemben vett «*mindenütt sűrű*» eloszlása: ha Γ a C görbe bármely íve, elég nagy k esetén az $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ helyek közül legalább egy a Γ íven van. De hogy ez a feltétel magában véve nem elegendő, az következik már abból, hogy, mint FEJÉR megjegyzi,[10] példa adható a (2) helyek oly választására, amelynél ez a «mindenütt sűrű» eloszlás megvan s mégis C belsejének minden zárt G részéhez található oly, a C görbe zárt belsejében reguláris $f(z)$ függvény, hogy a hozzátartozó (1) sorozat G minden helyén széttartó.

Bebizonyitásom közben részleteredményként a következő, magában véve is érdekes tételhez jutok:

II. *Legyenek az* $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ *interpolálóhelyek* ($k=1, 2, 3, \ldots$) *a* JORDAN-*féle* C *görbe zárt belsejében* (tehát nem szükségképpen magán a C görbén). *Jelölje* $\psi_k(x)$ *a* C *görbe külsején egyértékű, reguláris ágakra széteső*

$$\{(x - x_1^{(k)}) \cdot (x - x_2^{(k)}) \cdot \ldots \cdot (x - x_k^{(k)})\}^{\frac{1}{k}}$$

[10] Idézett hely, 320. oldal.

függvénynek azt az ágát, amelyik a

$$\lim_{x=\infty} \frac{\psi_k(x)}{x} = 1 \tag{7}$$

feltételnek megfelel. Ahhoz, hogy, valahányszor $f(x)$ *a* C *görbe zárt belsejében reguláris függvény és* $L_k(x)$ *jelenti az* $f(x)$ *függvényt az* $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ *helyeken interpoláló* LAGRANGE-*féle polinomot, a* C *görbe zárt belsejében egyenletesen*

$$\lim_{k=\infty} L_k(x) = f(x)$$

legyen, szükséges és elegendő, hogy C *külsején mindenütt*

$$\lim_{k=\infty} \psi_k(x) = \varphi(x) \tag{8}$$

legyen, ahol $z = \varphi(x)$ *az a* C *görbe külsején reguláris,* C *zárt külsején folytonos függvény, mely* C *külsejét kölcsönösen egyértelműen leképezi valamely körkülsőre úgy, hogy a két sík végtelen távoli ívelemei nyujtás és forgatás nélkül egymásba menjenek át.*

E tételnek bebizonyításánál döntő szerepe van MONTEL kiválasztási tételének.[11] Hogy e tétel alkalmazása jelölési kényelmetlenséget ne okozzon, a (2) helyek helyett valamivel általánosabban először n_1 számú $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}$ helyet, majd n_2 számú $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_{n_2}^{(2)}$ helyet, azután n_3 számú $x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, \ldots, x_{n_3}^{(3)}$ helyet, s. í. t.; általában n_k számú $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}$ helyet választok a C görbén, illetőleg C zárt belsejében ($k = 1, 2, 3 \ldots$), ahol $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k, \ldots$ tetszésszerinti, csak a

$$\lim_{k=\infty} n_k = \infty \tag{9}$$

feltételnek alávetett természetes számok. A bebizonyitásnál nem használom ki, s ezért fel sem kell tennem, hogy az $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}$ helyek egymástól különbözők; $L_k(x)$-en *az* $f(x)$ *függvényt az* $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}$ *helyeken interpoláló* LAGRANGE-HERMITE-*féle*

---

[11] P. MONTEL: *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe,* Collection BOREL, (1910); 22. oldal.

polinomot, azaz azt az n_k-nál alacsonyabb fokszámú racionális egész függvényt értem, amely oly tulajdonságú, hogy e helyek az $f(x) - L_k(x)$ függvénynek rendre legalább annyiszoros zérushelyei, mint az

$$\omega_k(x) = (x - x_1^{(k)}).(x - x_2^{(k)}).\cdots.(x - x_{n_k}^{(k)}) \tag{10}$$

polinomnak ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Ha bármely, a C görbe zárt belsejében (amelyet $\bar{B}$-sal jelölök, míg C nyilt, azaz kerületi pontjai kizárásával képezett belsejét egyszerűen B-vel) reguláris $f(x)$ függvényre nézve (5) $\bar{B}$-ban egyenletesen áll, akkor az

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}, \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_{n_2}^{(2)}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array} \tag{11}$$

helyeket dolgozatomban *jól interpoláló* helyeknek mondom.

A (6) feltétel helyébe a

$$\lim_{k=\infty} \frac{\nu_k}{n_k} = \frac{\sigma}{2\pi r} \tag{12}$$

feltétel jő, ahol most ν_k a $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \ldots, z_{n_k}^{(k)}$ helyek közül, ahol $z_l^{(k)} = \varphi(x_l^{(k)})$ ($l = 1, 2, \ldots, k$), a γ íven levők számát jelenti ($k = 1, 2, 3, \ldots$). A (8) feltételben pedig $\psi_k(x)$ az $\{\omega_k(x)\}^{\frac{1}{n_k}}$ függvénynek a C görbe nyilt (azaz kerületi pontjainak kizárásával képezett) külsején (amelyet K-val fogok jelölni, míg C zárt külsejét $\bar{K}$-sal) reguláris és egyértékű ágai közül a (7) feltétellel meghatározottat jelenti. Igy az I., illetőleg II. tétel a valamivel általánosabb V., illetőleg III. tétel speciális eseteként jelentkezik.

Dolgozatom I. fejezetében a III. tétel részletes bebizonyításával foglalkozom; e fejezetben a (11) interpolálóhelyek akár a C görbén, akár ennek belsejében lehetnek. A III. tétel bebizonyításának módja egyuttal abban az általánosabb esetben is, amikor a (8) határérték C nyilt külsejének minden egyes helyén létezik ugyan, de nem szükségképpen $\varphi(x)$, a *legszűkebb* oly T tartomány meghatározására vezet, hogy $f(x)$-nek a T tartományban reguláris viselkedése elegendő ahhoz, hogy (5) a $\overline{B}$ tartományban egyenletesen teljesüljön (IV. tétel). Dolgozatom II. fejezetében pedig bebizonyítom az V. tételt; e fejezetben már feltételezem, hogy a (11) interpolálóhelyek a C görbe kerületén vannak.

I. A jól interpoláló helyek és a konformis leképezés.

1. E fejezetnek célja annak bebizonyítása, hogy ahhoz, hogy a Jordan-féle C görbe $\overline{B}$ zárt belsejének (11) helyei jól interpoláló helyek legyenek, szükséges és elegendő, hogy a K tartomány minden x helyén

$$\lim_{k=\infty} \psi_k(x) = \varphi(x) \tag{8}$$

legyen. Mindenekelőtt a feltétel szükségességének bebizonyításával foglalkozom.

A

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x), \ldots,\ \psi_k(x), \ldots \tag{13}$$

függvénysorozat tagjai a következő tulajdonságokkal bírnak:

α) A $\psi_k(x)$ függvény ($k=1, 2, 3, \ldots$) a K tartományban reguláris, egyértékű függvény; az $x=\infty$ helyen a (7) feltételnek megfelelően viselkedik.

β) A $\psi_k(x)$ függvény ($k=1, 2, 3, \ldots$) a $\overline{K}$ tartomány minden helyén folytonos.

γ) A (13) függvénysorozat tagjai a $\overline{K}$ tartomány minden korlátos részében egyenletesen korlátosak.

Ugyanis, ha K' a $\overline{K}$ tartomány valamely korlátos résztartománya és D jelöli K' pontjainak a $\overline{B}$ tartomány pontjaitól való távolsága felső határát, akkor

$$|\psi_k(x)| = \left\{ |x - x_1^{(k)}| . |x - x_2^{(k)}| . \cdots . |x - x_{n_k}^{(k)}| \right\}^{\frac{1}{nk}} \leqq D.$$

Ha a (11) helyek jól interpoláló helyek, akkor ezekhez járul még a következő tulajdonság:

δ) Ha a a K tartomány valamely helye, akkor, hacsak k elég nagy $(k \geqq k_0 = k_0(a))$, a C görbe minden x helyén

$$|\psi_k(x)| \leqq |\psi_k(a)|. \tag{14}$$

Ugyanis, mint ismeretes és könnyen verifikálható is, az

$$f(x) = \frac{1}{a-x}$$

függvényre nézve — amely a $\overline{B}$ tartományban reguláris —

$$L_k(x) = \frac{1}{a-x}\left\{1 - \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(a)}\right\};$$

ezért, ha d jelöli az a helynek a $\overline{B}$ tartomány pontjaitól való legnagyobb távolságát, a $\overline{B}$ tartományban

$$|f(x) - L_k(x)| = \left|\frac{1}{a-x}\,\frac{\omega_k(x)}{\omega_k(a)}\right| \geqq \frac{1}{d}\left|\frac{\omega_k(x)}{\omega_k(a)}\right|;$$

de, ha a (11) helyek jól interpoláló helyek, akkor bizonyos k-tól kezdve $\overline{B}$ minden helyén

$$|f(x) - L_k(x)| \leqq \frac{1}{d},$$

tehát $\overline{B}$ minden helyén, s így a C görbén is

$$|\omega_k(x)| \leqq |\omega_k(a)|,$$

amiből (14) következik.

A bebizonyításnál nem használom ki a $\psi_k(x)$ függvények speciális jelentését, csak az *a)—δ)* tulajdonságokat, úgy, hogy tulajdonképpen azt bizonyítom be, hogy minden oly függvénysorozat, amelynek megvan e négy tulajdonsága, a K tartomány minden x helyén a $\varphi(x)$ leképezőfüggvényhez közeledik.

2. MONTEL kiválasztási tételéből[11] egyszerűen adódik a következő segédtétel:

I. segédtétel. Legyenek

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x), \ldots,\ \psi_k(x), \ldots \tag{13}$$

a komplex x változónak valamely[12] *nyilt K tartományban reguláris és K minden korlátos zárt részében egyenletesen korlá-*

[12] Ez a kitétel azt jelenti, hogy itt a K tartomány nem szükségképpen az eddig szóbanforgott K tartományt jelenti; hasonló megjegyzés érvényes a $\psi_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, $\varphi(x)$ függvényekre is.

tos függvényei. Ha a (13) *sorozat bármely részsorozata, amely K minden helyén összetartó, ugyanahhoz a* $\varphi(x)$ *függvényhez közeledik, akkor K minden x helyén*

$$\lim_{k=\infty} \psi_k(x) = \varphi(x). \tag{8}$$

Bebizonyítás: Ha (8) nem állana K minden egyes helyén, akkor volna K-nak oly x_0 helye, továbbá oly pozitív ε és k-nak végtelen sok természetes egész $k^{(1)}, k^{(2)}, k^{(3)},\ldots$ értéke, hogy $\nu = 1, 2, 3,\ldots$ esetén

$$|\psi_{k^{(\nu)}}(x_0) - \varphi(x_0)| > \varepsilon; \tag{15}$$

Montel kiválasztási tétele szerint a

$$\psi_{k^{(1)}}(x),\ \psi_{k^{(2)}}(x),\ \psi_{k^{(3)}}(x),\ldots$$

sorozatból ki lehetne egy, K minden helyén összetartó (még hozzá K minden korlátos, zárt részében egyenletesen összetartó) részsorozatot választani; e sorozat határértéke az x_0 helyen a feltevés szerint $\varphi(x_0)$ volna, (15) ellenére.

Eszerint az 1. szakasz elején kimondott feltétel szükségességének bebizonyítására elegendő kimutatnom, hogy az *a)* – *δ)* feltételekből következik, hogy a (13) sorozat bármely, az egész K tartományban összetartó részsorozatának határfüggvénye $\varphi(x)$. A részsorozat k-adik tagját ismét $\psi_k(x)$-szel jelölhetem ($k = 1, 2, 3,\ldots$);[13] úgy, hogy elegendő arra az esetre szorítkoznom, amikor a (13) függvénysorozatnak az *a)*—*δ)* tulajdonságokon kívül még a következő tulajdonsága van:

ε) A

$$\lim_{k=\infty} \psi_k(x) = \psi(x) \tag{16}$$

határérték a K tartomány minden egyes helyén létezik.

[13] Az ilymódon $\psi_1(x), \psi_2(x),\ldots, \psi_k(x),\ldots$-szel jelölt függvények sorozata ugyanúgy keletkezik egy, a (11) alattihoz hasonló szerkezetű kettős pontsorozatból, — amelyet ismét úgy jelölhetek, mint a (11) kettős pontsorozatot, — mint az eredeti (13) függvénysorozat az eredeti (11) kettős pontsorozatból. Ennek a megjegyzésnek, illetőleg jelölésnek később lesz jelentősége, amikor majd ismét felhasználom a $\psi_k(x)$ függvények speciális jelentését.

Más szóval: elegendő azt bebizonyítanom, hogy a (13) sorozat *a)—ε)* tulajdonságaiból következik, hogy $\psi(x) = \varphi(x)$.

3. Vitali nevezetes konvergenciatétele[14] szerint (vagy akár Stieltjes egy régebbi tétele szerint is) az *α), γ), ε)* tulajdonságokból következik, hogy a (13) függvénysorozat K minden korlátos, zárt részében *egyenletesen* összetartó. Ebből pedig könnyen adódik a $\psi(x)$ határfüggvény következő két tulajdonsága:

α') A $\psi(x)$ függvény a K tartományban reguláris, egyértékű függvény; az $x = \infty$ helyen a

$$\lim_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1 \tag{17}$$

feltétellel leírt módon viselkedik.

γ') A $\psi(x)$ függvény a K tartomány minden korlátos részében korlátos.

A *β)* és *δ)* tulajdonság hozzávételével még $\psi(x)$ következő tulajdonsága adódik:

δ') Ha $\lambda > 1$, akkor van oly C' Jordan-féle görbe, hogy C a C' görbének nyilt belsejében van és valahányszor a a K tartomány valamely helye, a C és C' görbék határolta nyilt gyűrűtartomány minden x helyén

$$|\psi(x)| \leqq \lambda |\psi(a)|. \tag{18}$$

Ugyanis (14) szerint, hacsak k elég nagy, a C görbén, minthogy ott $|\varphi(x)| = r$,

$$\left| \frac{\psi_k(x)}{\varphi(x)} \right| \leqq \frac{|\psi_k(a)|}{r}. \tag{19}$$

A $\dfrac{\psi_k(x)}{\varphi(x)}$ függvény a K tartományban mindenütt reguláris, (3) és (7) miatt még az $x = \infty$ helyen is; a $\bar{K}$ tartományban pedig folytonos. Ezért (19) a K tartományban is érvényes, úgy, hogy ha $\lambda > 1$, akkor, C'-vel a

$$|\varphi(x)| = \lambda r$$

[14] G. Vitali: *Sopra le serie di funzioni analitiche,* Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, II. 36. (1903); 772—774. oldal.

görbét jelölve (amely oly JORDAN-féle, sőt, analitikai görbe, melyen C belül van), a C és C' görbék határolta

$$r < |\varphi(x)| < \lambda r$$

nyilt gyűrűtartományban

$$|\psi_k(x)| \leqq \frac{|\psi_k(a)|}{r} |\varphi(x)| < \lambda |\psi_k(a)|.$$

Innét határátmenettel (18) adódik.

Be fogom bizonyítani, hogy a $\psi(x)$ függvény *a'), γ')* és *δ')* tulajdonságaiból következik, hogy $\psi(x)$ azonos $\varphi(x)$-szel. E célból elegendő lesz kimutatnom e tulajdonságok alapján, hogy az a $\mathfrak{K}$ kép, amelyet a $z = \psi(x)$ függvény a K tartományról a z síkon létesít, valamely egyrétű $|z| > r$ körkülső.

4. A z sík valamely z_0 pontját a $\mathfrak{K}$ kép ν-szörös pontjának lehet nevezni, ha a

$$\psi(x) = z_0 \tag{20}$$

egyenletnek a K tartományban, többszörösség szerint számlálva, ν számú gyöke van; itt ν jelenthet zérust, pozitív egész számot, vagy végtelent. Nem tekintem kivételnek a $z_0 = \infty$ pontot sem, amely, mint az $x = \infty$ pont képe, $\mathfrak{K}$ egyszeres pontjának számít, mert az *a')* tulajdonság szerint az $x = \infty$ hely a $\psi(x)$ függvénynek elsőrendű pólusa (egyszeres végtelenhelye), míg a K tartományban más pólusa nincs.

Ha z_0 a $\mathfrak{K}$ képnek ν-szörös pontja, akkor a függvénytan egy tétele szerint z_0 egy bizonyos környezetének minden egyes pontja $\mathfrak{K}$-nak legalább ν-szörös pontja. Élesebben: megadható z_0-nak oly $\varkappa(z_0)$ s a (20) egyenlet minden egyes K-beli x_0 gyökének oly $\varkappa'(x_0)$ környezete, hogy valahányszor z_0' a z_0 hely $\varkappa(z_0)$ környezetének helye, a

$$\psi(x) = z_0' \tag{21}$$

egyenletnek az x_0 hely $\varkappa'(x_0)$ környezetében, többszörösség szerint számlálva, pontosan annyi gyöke van, ahányszoros gyöke x_0 a (20) egyenletnek.

Ha ν véges és z_0 a $\mathfrak{K}$ képnek oly ν-szörös pontja, amelynek bármely környezetében vannak $\mathfrak{R}$-nak legalább $\nu+1$-szeres pontjai is, akkor z_0-t a $\mathfrak{R}$ kép határpontjának lehet nevezni. Világos, hogy $\mathfrak{R}$ határpontjai zárt halmazt alkotnak; továbbá az is, hogy ha valamely Γ JORDAN-féle görbeív végpontjai $\mathfrak{R}$-nak különböző többszörösségű pontjai (egyik végpontja akár a $z=\infty$ hely is lehet), akkor a Γ íven, végpontjait is beleszámítva, $\mathfrak{R}$-nak legalább egy határpontja van.

A határpontok lényeges tulajdonságát fejezi ki a következő segédtétel:

II. segédtétel. Vegyük körül a C görbét egy C' JORDAN-*féle görbével úgy, hogy C a C' nyilt belsejében legyen. Ha z_0 a $\mathfrak{R}$ képnek határponja, akkor z_0 bármely környezetében van oly z_0' hely, hogy a* (21) *egyenletnek legalább egy gyöke a C és C' görbék határolta nyilt gyűrűtartományban van.*

Bebizonyítás: A határpont értelmezése szerint a z_0 hely $\varkappa(z_0)$ környezetéből kiragadható oly, z_0-hoz közeledő

$$z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$$

sorozat, hogy a

$$\psi(x) = z_k \tag{22}$$

egyenletnek a K tartományban, többszörösség szerint számlálva, legalább $\nu+1$ számú gyöke legyen ($k=1, 2, 3, \ldots$). Ezért a (22) egyenletnek a K tartományban legalább egy oly x_k gyöke van, amely a (20) egyenlet bármely K-beli x_0 gyökének $\varkappa'(x_0)$ környezetén kívül esik. Az

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$$

sorozatnak emiatt egy ily x_0 hely sem sűrűsödési helye, ami az *a')* tulajdonsággal csak úgy fér meg, ha minden sűrűsödési helyük a C görbén van; ezért, ha k elég nagy, x_k a C és C' görbék határolta nyilt gyűrűtartomány helye.

A tétel természetesen a $z_0=\infty$ helyre nézve is igaz s belőle, a *γ')* tulajdonság alapján, következik, hogy ez a hely $\mathfrak{R}$-nak nem határpontja. Ezért, ha R elég nagy, a $|z| \geqq R$ zárt körkülső minden helye $\mathfrak{R}$-nak egyszeres pontja.

$\mathfrak{R}$-nak van határpontja, mert ha nem volna, akkor, — minthogy a sik bármely pontja összeköthető valamely JORDAN-féle görbeiv, vagy akár egyenesdarab segitségével a $|z| = R$ kör valamely pontjával, — adódnék, hogy a z sik minden helye $\mathfrak{K}$-nak egyszeres pontja, vagyis, hogy a $z = \psi(x)$ függvény a K tartományt kölcsönösen egyértelműen és konformisan leképezi a teljes sikra, ami lehetetlen. Az sem lehetséges, hogy $\mathfrak{K}$-nak csak egy határpontja legyen, mert különben hasonlóan adódnék, hogy a K tartománynak a $z = \psi(x)$ függvény létesitette egyértelmű konformis képe egyrétű pontozott sík volna, ami szintén lehetetlen.

Jelentse z_0 ezentúl a $\mathfrak{K}$ kép egyik oly határpontját, amelyre nézve $|z_0| = r_0$ a legnagyobb; ilyen van, mert $\mathfrak{K}$ határpontjainak halmaza korlátos és zárt halmaz. A legutóbb tett megjegyzés szerint $r_0 > 0$. A $|z| > r_0$ körkülső minden egyes helye $\mathfrak{K}$-nak egyszeres pontja, mert ellenkező esetben e körkülsőn volna $\mathfrak{K}$-nak határpontja.

5. A megelőző szakaszban nem használtam ki a $\psi(x)$ függvény $\delta')$ tulajdonságát. Most e tulajdonság alapján kimutatom, hogy $\mathfrak{K}$-nak a $|z| \leqq r_0$ körlapon egy pontja sincs.

Ha $\mathfrak{K}$-nak a $|z| = r_0$ körön volna pontja, akkor e pont valamely környezetének minden egyes helye $\mathfrak{K}$-nak (legalább egyszeres) pontja volna s így a $\mathfrak{K}$ képnek a nyilt $|z| < r_0$ körlapon is volna pontja. Ezért elegendő bebizonyitanom, hogy az a feltevés, hogy a K tartomány valamely a helyén

$$|\psi(a)| < r_0,$$

ellentmondást rejt magában.

Valóban, ebből s a $\delta')$ tulajdonságból következnék, hogy a C görbe körülvehető egy C' JORDAN-féle görbével (oly értelemben, hogy C a C' nyilt belsejében van) úgy, hogy a C és C' görbék határolta nyilt gyűrűtartomány minden egyes x helyén

$$|\psi(x)| \leqq r_0 - \eta$$

legyen, ahol $\eta > 0$: elég ehhez η-t oly kicsire s λ-t az egységhez oly közel választanom, hogy

$$\lambda |\psi(a)| + \eta \leqq r_0$$

legyen. E szerint a z_0 határpont

$$|z - z_0| < \eta$$

környezetének nem volna oly z_0' helye, hogy a (21) egyenletnek a C és C' görbék határolta nyilt gyűrűtartományban legyen gyöke; ez pedig ellentmond a II. segédtételnek.

Már most a megelőző szakasz eredményét is figyelembe véve, adódik, hogy $\mathfrak{K}$ (a $|z| > r_0$) egyrétű nyilt körkülső s ebből, hogy $\psi(x) = \varphi(x)$ (és $r_0 = r$); így az 1. szakasz elején kimondott feltétel valóban szükséges ahhoz, hogy a (11) helyek jól interpoláló helyek legyenek.

6. Fordítva, ha ez a feltétel teljesül, akkor, VITALI idézett tétele[14] szerint (8) a K tartomány minden korlátos zárt részében egyenletesen érvényes. Legyen $f(x)$ valamely, a $\overline{B}$ tartományban reguláris függvény. Válasszuk ehhez az r' és r'' számokat úgy, hogy

$$r < r' < r''$$

álljon és $f(x)$ a

$$|\varphi(x)| = r''$$

körképnek, C''-nek, zárt belsejében reguláris legyen. Akkor az ismeretes CAUCHY—HERMITE-féle interpoláló képlet szerint a

$$|\varphi(x)| = r'$$

körképnek, C'-nek minden egyes x helyén

$$\begin{aligned} f(x) - L_k(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C''} \frac{f(\xi)}{\xi - x} \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(\xi)} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C''} \frac{f(\xi)}{\xi - x} \left\{ \frac{\psi_k(x)}{\psi_k(\xi)} \right\}^{n_k} d\xi. \end{aligned} \tag{23}$$

A szakasz elején tett megjegyzés szerint x-ben a C' görbén és ξ-ben a C'' görbén egyenletesen

$$\lim_{k=\infty} \frac{\psi_k(x)}{\psi_k(\xi)} = \frac{\varphi(x)}{\varphi(\xi)},$$

tehát egyenletesen

$$\lim_{k=\infty} \left| \frac{\psi_k(x)}{\psi_k(\xi)} \right| = \frac{|\varphi(x)|}{|\varphi(\xi)|} = \frac{r'}{r''};$$

ezért, ha λ-t úgy választjuk, hogy

$$\frac{r'}{r''} < \lambda < 1$$

legyen, akkor, ha k elég nagy,

$$\left| \frac{\psi_k(x)}{\psi_k(\xi)} \right| \leqq \lambda. \tag{24}$$

Legyen már most s a C'' görbe hossza, M az $|f(\xi)|$ maximuma a C'' görbén, d pedig a C' és C'' görbék legrövidebb távolsága. Akkor a C' görbén (23) és (24) miatt

$$|f(x) - L_k(x)| \leqq \frac{1}{2\pi} \frac{sM}{d} \lambda^{nk},$$

tehát (9) miatt a C' görbén egyenletesen

$$\lim_{k=\infty} L_k(x) = f(x). \tag{5}$$

Ebből pedig következik, hogy (5) a $\overline{B}$ tartományban egyenletesen szintén érvényes, úgy, hogy az 1. szakasz elején kimondott feltétel elegendő is ahhoz, hogy a (11) helyek jól interpoláló helyek legyenek. Eszerint érvényes a következő tétel:

III. *Ahhoz, hogy a* Jordan-*féle C görbe $\overline{B}$ zárt belsejében választott* (11) *helyek jól interpoláló helyek legyenek, vagyis, hogy valahányszor $f(x)$ a $\overline{B}$ tartományban reguláris függvény s $L_k(x)$ az $f(x)$ függvényt az $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{nk}^{(k)}$ helyeken interpoláló* Lagrange—Hermite-*féle polinom* ($k = 1, 2, 3, \ldots$), *a $\overline{B}$ tartományban egyenletesen*

$$\lim_{k=\infty} L_k(x) = f(x)$$

legyen, szükséges és elegendő, hogy a C görbe K nyilt külsejének minden egyes x helyén

$$\lim_{k=\infty} \psi_k(x) = \varphi(x)$$

legyen.

A bebizonyitás mutatja, hogy, ha e feltétel teljesül s C^* oly JORDAN-féle görbe, mely C-t körülveszi, akkor (5) minden, C^* zárt belsejében reguláris és egyenletesen korlátos függvénycsaládra nézve a $\overline{B}$ tartományban *egyenlő mértékben* egyenletesen érvényes, azaz ha $\varepsilon > 0$, választható k_0 úgy, hogy $k \geqq k_0$ esetén $\overline{B}$ minden x helyén, a függvénycsalád bármely $f(x)$ tagjára s a hozzá tartozó $L_k(x)$ interpoláló polinomra nézve

$$|f(x) - L_k(x)| \leqq \varepsilon$$

legyen.

7. Ha (8) nem teljesül a K tartomány minden helyén, akkor a III. tétel szerint az (5) egyenlőségnek a $\overline{B}$ tartományban egyenletes teljesüléséhez nem elegendő, hogy $f(x)$ a $\overline{B}$ tartományban reguláris legyen. Azonban a III. tétel bebizonyitásának módja abban az általánosabb esetben is alkalmazható, amikor a (16) határérték K minden egyes helyén létezik, de nem szükségképpen $\varphi(x)$. Mégpedig módot ad oly T tartomány meghatározására, hogy $f(x)$-nek a T tartományban reguláris viselkedése elegendő legyen ahhoz, hogy (5) a $\overline{B}$ tartományban egyenletesen teljesüljön és emellett a T tartomány bizonyos értelemben a *legszűkebb* ily tulajdonságú tartomány legyen. Szabatosabban kifejezve, érvényes a következő tétel:

IV. *Legyenek a* (11) *helyek a* JORDAN-*féle* C *görbe* $\overline{B}$ *zárt belsejében úgy választva, hogy*

$$\lim_{k=\infty} \psi_k(x) = \psi(x) \tag{16}$$

a C *görbe* K *nyilt külsejének minden egyes* x *helyén létezzék. A* $z = \psi(x)$ *függvény a* K *tartományról a* z *síkon valamely* $\mathfrak{K}$ *képet létesít; jelentse* r_0 *a* $\mathfrak{K}$ *kép határpontjai abszolut értékének felső határát.* r_0 *pozitív, véges; a* $|z| > r_0$ *körkülső minden egyes pontja* $\mathfrak{K}$*-nak egyszeres pontja, úgy, hogy ez a körkülső a* K *tartomány valamely* K' *részének a* $z = \psi(x)$ *függvény létesítette kölcsönösen egyértelmü és konformis képe. Jelentse* T *az* x *sík ama pontjainak halmazát, amelyek* K'*-nek nem pontjai.*

Valahányszor $f(x)$ a T tartományban reguláris függvény és $L_k(x)$ az $f(x)$ függvényt az $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}$ helyeken interpoláló LAGRANGE—HERMITE-*féle polinom* ($k=1, 2, 3, \ldots$), *a* $\overline{B}$ *tartományban* (sőt, a T tartományban is) *egyenletesen*

$$\lim_{k=\infty} L_k(x) = f(x). \tag{5}$$

Azonban, ha a valamely belső helye a T tartománynak, akkor van oly $f(x)$ függvény, amely a T tartományban (sőt, az egész síkon is) *az $x=a$ hely kivételével mindenütt reguláris s amelyre nézve* (5) *nem érvényes a* $\overline{B}$ *tartományban egyenletesen.*

Bebizonyítás: A (13) sorozat *α), β), γ)* és *ε)* tulajdonságai teljesülnek; $\mathfrak{K}$ említett s a T tartomány értelmezéséhez is felhasznált tulajdonságai a 4. szakasz tárgyalásaiból folynak. Ha $f(x)$ a T tartományban reguláris függvény, akkor a 6. szakaszban adott bebizonyítás, ahol azonban $\varphi(x)$ helyébe mindenütt $\psi(x)$, (8) helyébe mindenütt (16) kerül, alkalmazható és adja, hogy (5) a T tartományban egyenletesen érvényes.

Másrészt, ha a a T tartomány belső helye, akkor az $f(x) = \dfrac{1}{a-x}$ függvényre nézve, mely, az $x=a$ hely kivételével, az egész síkon reguláris, (5) nem lehet $\overline{B}$-ban egyenletesen érvényes. Ha a a $\overline{B}$ tartomány helye, akkor ez a triviális; különben pedig, ha az állítás nem volna igaz, akkor úgy, mint az 1. szakaszban, következnék, hogy (14) bizonyos k-tól kezdve érvényes a C görbén s ebből, úgy, mint a 3. szakaszban, az következnék, hogy ha $\lambda > 1$, akkor van oly, C-t körülvevő JORDAN-féle C' görbe, hogy (18) a C és C' görbék határolta nyilt gyűrűtartományban érvényes, ami

$$|\psi(a)| < r_0$$

miatt, mint az 5. szakaszban, ellentmond a II. segédtételnek.

II. A jól interpoláló helyek eloszlása.

8. Ebben a fejezetben csak annak az esetnek tárgyalására szorítkozom, amikor a (11) interpolálóhelyek a JORDAN-féle C görbén vannak és bebizonyítom, hogy ahhoz, hogy jól interpoláló helyek legyenek, szükséges és elegendő, hogy a

$$\begin{matrix} z_1^{(1)}, & z_2^{(1)}, \ldots, & z_{n_1}^{(1)}, \\ z_1^{(2)}, & z_2^{(2)}, \ldots, & z_{n_2}^{(2)}, \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ z_1^{(k)}, & z_2^{(k)}, \ldots, & z_{nk}^{(k)}, \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \end{matrix} \tag{25}$$

képhelyek a $|z| = r$ körön egyenletesen oszoljanak el. E célból a (8) feltételt olyanszerű határértékfeltétellé fogom átalakítani, mint amilyenekkel WEYL foglalkozik az egyenletesen eloszló számsorozatokról írt munkájában.[15]

Mindenekelőtt bebizonyítom, hogy a III. tétel a következő alakban mondható ki: *ahhoz, hogy a* (11) *helyek jól interpoláló helyek legyenek, szükséges és elegendő, hogy a K tartomány minden x helyén*

$$\lim_{k=\infty} \frac{\psi'_k(x)}{\psi_k(x)} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \tag{26}$$

legyen.

Ugyanis, ha a (8) feltétel K minden helyén teljesül, akkor VITALI tétele szerint K minden korlátos, zárt részében egyenletesen teljesül; ebből, minthogy sem $\psi_k(x)$, sem $\varphi(x)$ nem tűnik el K egy helyén sem, (26) következik. A fordított dolognak bebizonyításánál, t. i. hogy a (26) feltétellel együtt a (8) is teljesül K minden helyén, az I. segédtétel szerint elegendő arra az esetre szorítkoznom, amikor a

$$\lim_{k=\infty} \psi_k(x) = \psi(x) \tag{16}$$

határérték K minden helyén létezik. Ekkor, mint a 3. pontban láttuk, $\psi(x)$ a K tartományban reguláris, egyértékű, a (17)

---

15 Idézett hely, 314. oldal.

feltételt teljesitő függvény; VITALI tétele szerint (16) a K tartomány minden korlátos, zárt részében egyenletesen teljesül. Ha K' jelöli K valamely korlátos, zárt részét és d a K' tartománynak a C görbétől való legrövidebb távolságát, akkor K'-ben

$$\psi_k(x) = \left\{ \left| x - x_1^{(k)} \right| \cdot \left| x - x_2^{(k)} \right| \cdot \dots \cdot \left| x - x_{n_k}^{(k)} \right| \right\}^{\frac{1}{n_k}} \geqq d,$$

$(k = 1, 2, 3, \dots)$, úgy, hogy

$$\psi(x) \geqq d,$$

s igy $\psi(x)$ a K tartományban sehol sem tűnik el. Ezért (16)-ból

$$\lim_{k=\infty} \frac{\psi_k'(x)}{\psi_k(x)} = \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}$$

tehát (26) miatt $\varphi(x)$ és $\psi(x)$, eltekintve egy állandó szorzótól, egyenlők. Ez a szorzó (3) és (17) miatt az egység s igy (16) átmegy a (8) feltételbe.

9. A (26) feltételben

$$\frac{\psi_k'(x)}{\psi_k(x)} = \frac{1}{n_k} \sum_{l=1}^{n_k} \frac{1}{x - x_l^{(k)}};$$

ezenkivül, ha ($|z| \geqq r$ esetén) $x = \Phi(z)$ a $z = \varphi(x)$ függvény megfordítottját jelöli, a K tartomány minden egyes x helyén

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{x - \Phi(re^{i\vartheta})}.$$

Ugyanis, ha ξ a K tartomány helye,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\xi - \Phi(re^{i\vartheta})} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dz}{z\{\xi - \Phi(z)\}},$$

ahol az integráció útja a pozitiv értelemben befutott $|z| = r$ kör. Az integrálandó függvény a $\zeta = \varphi(\xi)$ pólustól eltekintve, amely a leképezés egyrétűsége miatt elsőrendű s reziduuma

$$\lim_{z=\zeta} \frac{z - \zeta}{z\{\xi - \Phi(z)\}} = -\frac{1}{\zeta} \lim_{x=\xi} \frac{\varphi(x) - \varphi(\xi)}{x - \xi} = -\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)},$$

e kör nyilt külsején reguláris, zárt külsején folytonos;

$$\lim_{z=\infty} \frac{\Phi(z)}{z} = \lim_{x=\infty} \frac{x}{\varphi(x)} = 1$$

miatt a $z=\infty$ helyen kétszeresen eltűnik; így, a reziduumtételt a $|z| \geqq r$ körkülsőre alkalmazva, a bebizonyítandó

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{dz}{z\{\xi - \Phi(z)\}} = \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)}$$

egyenlőség adódik.

Eszerint a (26) feltétel, jelölést változtatva, így írható:

$$\lim_{k=\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{l=1}^{n_k} \frac{1}{\xi - \Phi(z_l^{(k)})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\xi - \Phi(re^{i\vartheta})};$$

szóval *ahhoz, hogy a* (11) *helyek jól interpoláló helyek legyenek, szükséges és elegendő, hogy, ha* ξ *a* K *tartomány bármely helye, a*

$$G(z) = \frac{1}{\xi - \Phi(z)}$$

függvény eleget tegyen a

$$\lim_{k=\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{l=1}^{n_k} G(z_l^{(k)}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(re^{i\vartheta})\, d\vartheta \tag{27}$$

határértékfeltételnek.

10. Ha a (27) feltételt valamely $G(z)$ függvény kielégíti (mindig úgy értve, hogy $G(z)$ a $|z| = r$ körön értelmezve van, $G(re^{i\vartheta})$ a $0 \leq \vartheta < 2\pi$ számközön RIEMANN szerint integrálható s ezeken kívül (27) teljesül), akkor nyilván $\Re G(z)$ is, továbbá, ha c állandó, $cG(z)$ is kielégíti azt. Ha $G_1(z)$ és $G_2(z)$ oly függvények, amelyek eleget tesznek a (27) feltételnek, akkor $G_1(z) + G_2(z)$ is eleget tesz neki.

Ha a (27) feltételt a $|z| = r$ körön egyenletesen összetartó

$$G_1(z),\ G_2(z), \ldots,\ G_\nu(z), \ldots$$

függvénysorozat minden egyes tagja kielégíti, akkor határfüggvényük, $G(z)$ is. Ugyanis k-ban egyenletesen ($k = 1, 2, 3, \ldots$)

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{l=1}^{n_k} G_\nu(z_l^{(k)}) = \frac{1}{n_k} \sum_{l=1}^{n_k} G(z_l^{(k)}),$$

úgy, hogy a feltételezett

$$\lim_{k=\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{l=1}^{n_k} G_\nu(z_l^{(k)}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_\nu(re^{i\vartheta})\, d\vartheta$$

egyenlőségből $\nu \longrightarrow \infty$ határátmenettel (minthogy az a $k \longrightarrow \infty$ határátmenettel és az integrálással felcserélhető,) (27) adódik.

A Cauchy-féle integrálképlet jól ismert következménye, hogy minden, a $\overline{B}$ tartományban reguláris $g(x)$ függvény a C görbén egyenletesen megközelíthető

$$g_\nu(x) = \sum_{l=1}^{\nu} c_l^{(\nu)} \frac{1}{\xi_l^{(\nu)} - x}$$

alakú függvényekkel, ahol a $c_l^{(\nu)}$ együtthatók állandók s a $\xi_l^{(\nu)}$ helyek a K tartomány helyei ($\nu = 1, 2, 3, \ldots;\ l = 1, 2, \ldots, \nu$). A $|z| = r$ körön egyenletesen

$$g(\Phi(z)) = \lim_{\nu=\infty} g_\nu(\Phi(z)),$$

ezért a fentiek szerint, valahányszor a (11) helyek jól interpoláló helyek és $g(x)$ a $\overline{B}$ tartományban x reguláris *analitikai* függvénye, a

$$G(z) = g(\Phi(z))$$

függvény kielégíti a (27) feltételt.

Ebből viszont következik, hogy $G(z) = g(\Phi(z))$ akkor is eleget tesz a (27) feltételnek, ha $g(x)$ a $\overline{B}$ tartományban x valós és képzetes összetevőjének reguláris *harmonikus* függvénye, feltéve, hogy a (11) helyek jól interpoláló helyek.

11. Bebizonyítom, hogy a $G(z) = g(\Phi(z))$ függvény, feltéve, hogy a (11) helyek jól interpoláló helyek, akkor is kielégíti a (27) feltételt, ha $g(x)$ az x valós és képzetes összetevőjének a zárt $\overline{B}$ tartományban folytonos, a nyilt B tartományban reguláris harmonikus függvénye. E célból elegendő bebizonyítanom, hogy az ily $g(x)$ függvény a $\overline{B}$ tartományban (tehát a C görbén is) egyenletesen megközelíthető a $\overline{B}$ tartományban reguláris harmonikus függvényekkel.

Ennek bebizonyítására felhasználhatnám WALSH egy tételét,[16] amely többek között az analog állítást tartalmazza harmonikus függvények helyett analitikai függvényekre; azonban egyszerűbb lesz WALSH bebizonyításának következő részleteredményére hivatkoznom:

Bármely JORDAN-*féle C görbéhez találhatók oly, a $\overline{B}$ tartományban reguláris*

$$\chi_1(x), \chi_2(x), \ldots, \chi_\nu(x), \ldots$$

függvények, amelyek a $\overline{B}$ tartományt B egy-egy részére képezik le, hogy valahányszor $g(x)$ a $\overline{B}$ tartományban folytonos függvény, mindannyiszor $\overline{B}$-ban egyenletesen

$$\lim_{\nu=\infty} g\left(\chi_\nu(x)\right) = g(x).^{17} \tag{28}$$

Ha itt $g(x)$ ezenkívül még a B tartományban x valós és képzetes összetevőjének reguláris harmonikus függvénye, akkor $g\left(\chi_\nu(x)\right)$ a $\chi_\nu(x)$ függvény felsorolt tulajdonságai miatt x valós és képzetes összetevőjének a zárt $\overline{B}$ tartományban reguláris harmonikus függvénye ($\nu=1, 2, 3, \ldots$), úgy, hogy állításom be van bizonyítva.

Ha most $G(z)$ bármely, a $|z|=r$ körön folytonos valós függvény, akkor

$$g(x) = G\left(\varphi(x)\right)$$

---

[16] J. L. WALSH: *Über die Entwicklung einer analytischen Funktion nach Polynomen,* Mathematische Annalen 96. (1926); 430—436. oldal. FEJÉR professzor úrnak köszönöm, hogy figyelmemet szíves volt felhívni erre a cikkre; enélkül az V. tételt a JORDAN-féle görbéknek csak egy speciális osztályára tudtam bebizonyítani.

[17] Idézett hely, 431—432. oldal. WALSH jelöléseivel

$$\chi_\nu(x) = \psi\left(\varphi_\nu(x)\right),$$

ahol $\varphi_\nu(x)$ alkalmasan választott, C-t körülvevő C_ν JORDAN-féle görbe belsejét az egységkör belsejére, $\psi(x)$ pedig az egységkör belsejét C belsejére képezi le kölcsönösen egyértelműen és konformisan, úgy, hogy $\chi_\nu(x)$ a C_ν görbe belsejét a C görbe belsejére képezi le így, amiből kimondott tulajdonságai következnek. A $g(x)$ függvényre tett feltételek közül WALSH a (28) egyenlőség bebizonyítására csak azt használja fel, hogy a $\overline{B}$ tartományban folytonos. (Nála $g(x)$ helyett $f(z)$-vel van a függvény jelölve.)

a C görbén folytonos és valós. Ezért CARATHÉODORY vizsgálatai szerint[18] $g(x)$ értelmezhető a B tartományban úgy, hogy ott x valós és képzetes összetevőjének reguláris harmonikus, a $\overline{B}$ tartományban folytonos függvénye legyen, úgy, hogy

$$G(z) = g\big(\Phi(z)\big)$$

kielégíti a (27) feltételt. Igy — mindig feltéve, hogy a (11) helyek jól interpoláló, a C görbe kerületén levő helyek — a (27) egyenlőség bármely, a $|z| = r$ körön folytonos és valós $G(z)$ függvényre nézve teljesül s így általában bármely, ott folytonos függvényre nézve is érvényes.

12. Ezek után — teljesen WEYL egyik bebizonyításának[19] mintájára — kimutathatom a 8. szakasz elején kimondott feltétel szükségességét. E célból azt a következő alakra hozom:

Ahhoz, hogy a JORDAN-*féle C görbén levő* (11) *helyek jól interpoláló helyek legyenek, szükséges és elegendő, hogy, ha*

$$\alpha \leqq \vartheta < \beta, \quad z = re^{i\vartheta}$$

a $|z| = r$ kör valamely γ íve s

$$G(z) = G(z;\, \alpha, \beta)$$

ezen az íven 1, *a $|z| = r$ kör többi pontjaiban pedig* 0, *akkor $G(z)$ eleget tesz a* (27) *feltételnek.*

Hogy ez a feltétel nem más, mint a 8. szakasz elején kimondott feltétel, az következőkép látható be. Erre a $G(z)$ függvényre nézve $G(z_l^{(k)}) = 1$, vagy 0 aszerint, hogy $z_l^{(k)}$ a γ íven van-e, vagy sem. Tehát, ha ν_k jelöli a $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \ldots, z_{n_k}^{(k)}$ helyek közül a γ íven levők számát, $k = 1, 2, 3, \ldots$ esetén

$$\frac{1}{n_k} \sum_{l=1}^{n_k} G(z_l^{(k)}) = \frac{\nu_k}{n_k};$$

továbbá, ha $\sigma = (\beta - \alpha) r$ a γ ív hosszúsága, úgy

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(re^{i\vartheta})\, d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta d\vartheta = \frac{\beta - \alpha}{2\pi} = \frac{\sigma}{2\pi r}.$$

---

[18] Idézett hely, 320. oldal.

[19] Idézett hely, 315. oldal.

Ezért a (27) feltétel erre a $G(z)$ függvényre nézve valóban nem más, mint a

$$\lim_{k=\infty} \frac{\nu_k}{n_k} = \frac{\sigma}{2\pi r} \tag{12}$$

egyenletes eloszlási feltétel más alakja.

Ez a $G(z)$ függvény nem folytonos a $|z| = r$ körön s így nem is lehet folytonos függvényekkel egyenletesen megközelíteni. Ezért a feltétel szükségességének bebizonyítására a következő, lényegében WEYLtől származó segédtételre [20] van szükségem:

III. segédtétel. Legyen $G(z)$ valamely, a $|z| = r$ körön értelmezett valós, RIEMANN *szerint integrálható* [21] *függvény. Ha minden pozitív ε számhoz található oly, a $|z| = r$ körön valós és a (27) feltételt kielégítő $\underline{G}(z)$ és $\overline{G}(z)$ függvény, hogy a $|z| = r$ kör minden z pontjában*

$$\underline{G}(z) \leqq G(z) \leqq \overline{G}(z) \tag{29}$$

s továbbá

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{\overline{G}(re^{i\vartheta}) - \underline{G}(re^{i\vartheta})\}\, d\vartheta \leqq \varepsilon,$$

akkor $G(z)$ is kielégíti a (27) feltételt.

Bebizonyítás: Legyen ε tetszésszerinti pozitív szám; $\underline{G}(z)$ és $\overline{G}(z)$ legyenek olyan, a (27) feltételnek eleget tevő függvények, amelyek a (29) és az

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{\overline{G}(re^{i\vartheta}) - \underline{G}(re^{i\vartheta})\}\, d\vartheta \leqq \frac{\varepsilon}{2} \tag{30}$$

egyenlőtlenségnek is megfelelnek. Ha k elég nagy, akkor

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underline{G}(re^{i\vartheta})\, d\vartheta \leqq \frac{1}{n_k}\sum_{l=1}^{n_k} \underline{G}(z_l^{(k)}) + \frac{\varepsilon}{2}$$

és

[20] Idézett hely, 314. oldal.

[21] Ezt úgy értem, hogy $G(re^{i\vartheta})$ a ϑ-nak a $0 \leqq \vartheta < 2\pi$ számközön RIEMANN szerint integrálható függvénye legyen. Ez a feltétel ugyan könnyen következik a többiből, de nincs szükségem arra, hogy elhagyjam.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{G}(re^{i\vartheta})\,d\vartheta \geqq \frac{1}{n_k}\sum_{l=1}^{n_k}\overline{G}(z_l^{(k)}) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tehát (29) és (30) miatt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}G(re^{i\vartheta})\,d\vartheta &\leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{G}(re^{i\vartheta})\,d\vartheta \leqq \\ &\leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\underline{G}(re^{i\vartheta})\,d\vartheta + \frac{\varepsilon}{2} \leqq \\ &\leqq \frac{1}{n_k}\sum_{l=1}^{n_k}\underline{G}(z_l^{(k)}) + \varepsilon \leqq \\ &\leqq \frac{1}{n_k}\sum_{l=1}^{n_k}G(z_l^{(k)}) + \varepsilon\end{aligned}$$

és hasonlóan

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}G(re^{i\vartheta}) \geqq \frac{1}{n_k}\sum_{l=1}^{n_k}G(z_l^{(k)}) - \varepsilon.$$

Vagyis a (27) feltétel valóban teljesül.

A $G(z) = G(z;\, \alpha, \beta)$ függvényhez pl. a következőképpen lehet a III. segédtételben megkivánt egyenlőtlenségeket kielégitő, a $|z| = r$ körön valós, folytonos (tehát az előző szakasz eredménye szerint, ha a (11) helyek jól interpoláló helyek, a (27) feltételnek is megfelelő) $\underline{G}(z)$ és $\overline{G}(z)$ függvényeket értelmezni: Legyen

$$\begin{aligned}\underline{G}(re^{i\vartheta}) &= \frac{2}{\varepsilon}(\vartheta-\alpha), &&\text{ha } \alpha \leqq \vartheta \leqq \alpha + \frac{\varepsilon}{2},\\ &= 1, &&\text{ha } \alpha + \frac{\varepsilon}{2} \leqq \vartheta \leqq \beta - \frac{\varepsilon}{2},\\ &= \frac{2}{\varepsilon}(\beta-\vartheta), &&\text{ha } \beta - \frac{\varepsilon}{2} \leqq \vartheta \leqq \beta,\end{aligned}$$

különben legyen $\underline{G}(re^{i\vartheta}) = 0$; továbbá

$$\begin{aligned}\overline{G}(re^{i\vartheta}) &= \frac{2}{\varepsilon}(\vartheta-\alpha)+1, &&\text{ha } \alpha - \frac{\varepsilon}{2} \leqq \vartheta \leqq \alpha,\\ &= 1, &&\text{ha } \alpha \leqq \vartheta \leqq \beta,\\ &= \frac{2}{\varepsilon}(\beta-\vartheta)+1, &&\text{ha } \beta \leqq \vartheta \leqq \beta + \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

különben pedig $\overline{G}(re^{i\vartheta}) = 0$.[22] Világos, hogy $\underline{G}(z)$ és $\overline{G}(z)$ a $|z| = r$ körön folytonosak, hogy (29) teljesül, továbbá éppen

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\overline{G}(re^{i\vartheta}) - \underline{G}(re^{i\vartheta})\}\,d\vartheta = \varepsilon.$$

Igy, ha a (11) helyek jól interpoláló helyek, akkor, a III. segédtétel szerint, $G(z) = G(z;\, \alpha,\, \beta)$ kielégiti a (27) feltételt s igy a szakasz elején kimondott feltétel valóban szükséges.

13. Annak bebizonyítására, hogy ez a feltétel elegendő is, elég kimutatnom, hogy teljesülése esetén (27) minden, a $|z| = r$ körön értelmezett és Riemann szerint integrálható $G(z)$ függvényre nézve fennáll. Ugyanis ekkor (27) teljesül a

$$G(z) = \frac{1}{\xi - \Phi(z)}$$

függvényre nézve is, valahányszor ξ a K tartomány helye, ami, a 9. szakasz eredménye szerint, elegendő ahhoz, hogy a (11) helyek jól interpoláló helyek legyenek.

Ha a megelőző szakasz elején kimondott feltétel teljesül, akkor alkalmazható Weyl következő meggondolása:[20] A (27) feltételt, a 10. szakasz elején tett megjegyzés szerint, minden oly $G(z)$ függvény kielégíti, amely véges számú $G(z) = G(z;\, \alpha,\, \beta)$ alakú függvényből homogén lineáris módon előállítható, más szóval: minden, a $|z| = r$ körön ívről-ívre állandó függvény. Ha most $G(z)$ a $|z| = r$ körön *valós* és Riemann szerint integrálható függvény, akkor, hacsak $\varepsilon > 0$, a $|z| = r$ kör felosztható úgy ívekre, hogy, $\underline{G}(z)$-vel, illetőleg $\overline{G}(z)$-vel minden egyes részíven állandóan $G(z)$-nek a kérdéses részívhez tartozó Weierstrass-féle alsó, illetőleg felső határát jelölve,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\overline{G}(re^{i\vartheta}) - \underline{G}(re^{i\vartheta})\}\,d\vartheta \leq \varepsilon:$$

[22] Az előírásnak csak akkor van értelme, ha $\varepsilon \leq \beta - \alpha$ és $\varepsilon \leq 2\pi + \alpha - \beta$, ami az elfajuló $\beta = \alpha$ és $\beta = \alpha + 2\pi$ esetek kivételével (amikor egyébként $G(z;\, \alpha,\, \beta)$ maga is folytonos), nem lényeges megszorítás.

ez éppen a $G(re^{i\vartheta})$ függvénynek a $0 \leqq \vartheta < 2\pi$ számközön RIEMANN-szerinti integrálhatóságához szükséges és elegendő feltétel. Igy a III. segédtétel szerint $G(z)$ eleget tesz a (27) feltételnek; ebből pedig következik, hogy bármely, a $|z| = r$ körön értelmezett és RIEMANN szerint integrálható *komplex* függvény is eleget tesz neki. Igy a megelőző szakasz elején kimondott s már szükségesnek bizonyult feltétel elegendő is, tehát a 8. szakasz elején kimondott feltétel szintén. Eszerint érvényes a következő tétel:

V. *Ahhoz, hogy a* JORDAN-*féle* C *görbén választott* (11) *helyek jól interpoláló helyek legyenek, vagyis, hogy, valahányszor* $f(x)$ *a* C *görbe* $\overline{B}$ *zárt belsejében reguláris függvény s* $L_k(x)$ *az* $f(x)$ *függvényt az* $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}$ *helyeken interpoláló* LAGRANGE-HERMITE-*féle polinom* ($k = 1, 2, 3, \ldots$), *a* $\overline{B}$ *tartományban egyenletesen*

$$\lim_{k=\infty} L_k(x) = f(x)$$

legyen, szükséges és elegendő, hogy a (25) *képhelyek egyenletesen oszoljanak el a* $|z| = r$ *körön, azaz, ha* γ *e kör bármely,* σ *hosszúságú íve,* ν_k *pedig a* $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \ldots, z_{n_k}^{(k)}$ *képhelyek közül a* γ *íven levők száma, akkor*

$$\lim_{k=\infty} \frac{\nu_k}{n_k} = \frac{\sigma}{2\pi r}$$

legyen.

14. A tétel szószerint nem alkalmazható abban a — feltétlenül érdekes — esetben, amikor a C görbe helyébe valamely, pl. a $-1 \leqq x \leqq +1$ számköz kerül s a jól interpoláló tulajdonságot természetesen úgy értjük, hogy bármely, a számközön reguláris $f(x)$ függvényre nézve a számközön egyenletesen

$$\lim_{k=\infty} L_k(x) = f(x)$$

legyen. Azonban a bebizonyitás könnyen átvihető erre az esetre is; a $\varphi(x)$ leképezőfüggvényen az

$$\tfrac{1}{2}\{x + \sqrt{x^2 - 1}\}$$

függvénynek a $-1 \leqq x \leqq +1$ számköz mentén felvágott síkon egyértékű ágai közül az értendő, amelyik pl. az $x = \frac{5}{4}$ helyen a $\varphi(\frac{5}{4}) = 1$ értéket veszi fel: ez a felvágott síkot a $z = \varphi(x)$ sík

$$|z| > \tfrac{1}{2}$$

körkülsejére képezi le. Magán a számközön $\varphi(x)$ kétértékű, ezért minden $x_l^{(k)}$ interpolálóhelynek két képhely felel meg: $z_l'^{(k)}$ és $z_l''^{(k)}$.[23] Ha ν_k jelenti a

$$z_1'^{(k)},\ z_2'^{(k)}, \ldots,\ z_{n_k}'^{(k)};\ z_1''^{(k)},\ z_2''^{(k)}, \ldots,\ z_{n_k}''^{(k)}$$

helyek közül a $|z| = r$ kör valamely σ hosszúságú γ ívére esők számát, akkor a (12) *egyenletes eloszlási feltétel* helyébe a

$$\lim_{k=\infty} \frac{\nu_k}{2n_k} = \frac{\sigma}{2\pi r}$$

feltétel kerül. E feltétel szükséges és elegendő voltát ugyanúgy lehet bebizonyítani, mint ahogy az V. tételt bizonyítottam be; a 11. szakasz tárgyalásai helyébe WEIERSTRASS approximáció-tételének alkalmazása kerül.

Kalmár László.

ÜBER INTERPOLATION.

Es sei C eine JORDANsche Kurve in der komplexen x-Ebene; die Interpolationsstellen sollen auf dieser Kurve gewählt werden. $f(x)$ sei eine analytische Funktion, die in dem von C umgrenzten abgeschlossenen Bereiche $\overline{B}$ regulär ist und $L_k(x)$ bezeichne das zu $f(x)$ und zu den Interpolationsstellen $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ gehörige LAGRANGE—HERMITE'sche Interpolationspolynom.

Es entsteht die Frage, kann man die Stellen (2) ein für allemal so wählen, dass immer gleichmässig in $\overline{B}$

$$\lim_{k=\infty} L_k(x) = f(x)$$

sei, wenn nur $f(x)$ ebenda regulär ist? Solche Stellen werde ich *gut interpolierende Stellen* nennen.

---

[23] Ha $x_l^{(k)} = 1$, vagy -1, akkor $z_l'^{(k)} = z_l''^{(k)}$.

Diese Frage, im Falle eines Kreises schon von RUNGE [1] aufgeworfen und auch gelöst, wurde im allgemeinen Falle von Herrn FEJÉR [2] formuliert und im bejahenden Sinne beantwortet.

Es seien (4) *die* Stellen des Einheitskreises in der komplexen z-Ebene, in die bei einer konformen und schlichten Abbildung des Aussengebietes von C auf das Äussere des Einheitskreises — wobei die unendlich fernen Punkte der beiden Ebenen einander entsprechen — die Interpolationsstellen (2) überführt werden. Herr FEJÉR beweist, dass, wenn $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \ldots, z_k^{(k)}$ die Eckpunkte eines regelmässigen k-Ecks bilden, so sind die Stellen (2) gut interpolierend.

Aus einer Bemerkung des Herrn FEJÉR am Ende seiner Abhandlung erhellt, dass dafür auch hinreicht, wenn man die Interpolationsstellen (2) allgemeiner so wählt, dass die «*Bildstellen*» (4) auf dem Einheitskreise *gleichmässig verteilt* ausfallen. Darunter verstehe ich nach Herrn WEYL, dass, wenn γ ein beliebiger Bogen von der Länge σ des Einheitskreises ist und ν_k die Anzahl derjenigen Punkte $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \ldots, z_k^{(k)}$ bezeichnet, die auf den Bogen γ fallen, so soll

$$\lim_{k=\infty} \frac{\nu_k}{k} = \frac{\sigma}{2\pi}$$

sein.

Ich beweise, dass diese FEJÉR'sche *hinreichende* Bedingung auch *notwendig* ist.[24] Das ist das Hauptresultat vorliegender Arbeit.

Ladislaus Kalmár.

---

[24] Die Frage, welche Bedingungen für die Stellen (2) *notwendig und hinreichend* sind um gut interpolierend zu sein, wurde zuerst von Herrn FABER (zitiert in der Fussnote [9]) behandelt. Vergleiche auch den demnächst in der Mathematischen Zeitschrift erscheinenden Artikel des Herrn FEKETE (auch zitiert in der Fussnote [9]), in welchem die Untersuchungen des Herrn FABER ergänzt werden.