A «FACTORISATIO NUMERORUM» PROBLÉMÁJÁRÓL.

Bevezetés.

Az *additív számelmélet* egyik nevezetes, «partitio numerorum» néven[1] ismert problémaköre valamely n természetes számnak tetszésszerinti számú pozitív egész szám *összegeként* való előállításainak számosságára vonatkozik. E számosság EULER óta számos vizsgálat tárgyát alkotta; HARDY és RAMANUJAN[2] aszimptotikus képletet is adtak rá. Ezzel szemben a megfelelő *multiplikatív számelméleti* problémát, amely valamely n természetes számnak tetszésszerinti számú, 1-nél nagyobb egész szám *szorzataként* való előállításainak számosságára vonatkozik, tudomásom szerint eddig még nem tárgyalták.[3]

---

[1] Szűkebb értelmében használva e kifejezést; tágabb értelemben a partitio numerorum problémaköre felölel minden additív számelméleti kérdést.

[2] G. H. HARDY és S. RAMANUJAN: Asymptotic Formulae in Combinatory Analysis, *Proceedings of the London Math. Society,* (2) **XVII** (1918), 75—115. oldal, vagy Collected Papers of SRINIVASA RAMANUJAN (Cambridge, 1927), 36. cikk, 276—309. oldal. A szóbanforgó aszimptotikus képlet egyszerűbb bebizonyítására nézve l. KONRAD KNOPP: Asymptotische Formeln der additiven Zahlentheorie, *Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft, naturwissenschaftliche Klasse,* **2** (1925), 45—74. oldal.

[3] Ezzel szemben annak az (egyszerűbb) additív számelméleti problémának, amely valamely n természetes számnak adott k számú egész szám összegeként való előállításainak számosságára vonatkozik, multiplikatív számelméleti analogonjával «PILTZ-féle osztóprobléma» néven számos munka foglalkozik; l. pl. G. H. HARDY és J. E. LITTLEWOOD: The Approximate Functional Equation in the Theory of the Zeta-function, with Applications to the Divisor-Problems of DIRICHLET and PILTZ, *Proceedings of the London Math. Society,* (2) **XXI** (1923), 39—74. oldal.

A szóbanforgó számosságok pontos definíciójához azt is meg kell mondanunk, hogy két előállítás különbözőnek számít-e, ha csak a tagok, illetőleg a tényezők *sorrendjében* térnek el egymástól. Az additív előállítások esetén csak az a definíció vezet problémához, amelynél a tagok különböző sorrendjével felírt felbontások nem tekintendők különbözőknek, mert a másik definíció mellett, tehát ha a tagok sorrendjére tekintettel vagyunk, a felbontások száma[4] — mint teljes indukcióval minden nehézség nélkül adódik — 2^{n-1}. A multiplikatív előállítások esetében azonban az előállítások számának egyik definíciója sem vezet triviális számelméleti függvényhez. Jelen dolgozatban *tekintettel* vagyok a tényezők sorrendjére is, tehát a következőképpen definiált $f(n)$ számelméleti függvényt — n «factorisatióinak» számát — vizsgálom: $f(n)$ jelenti az n számnak

$$n = n_1 n_2 \cdots n_k \tag{1}$$

alakú előállításainak számát, ahol $k = 0,$[5] $1,$[6] $2, \ldots$; $n_1, n_2, \ldots, n_k$ 1-nél nagyobb egész számok; végül az (1) és az

$$n = n'_1 n'_2 \ldots n'_{k'}$$

előállítások akkor és csakis akkor tekintendők azonosnak, ha

$$k = k'; \; n_1 = n'_1, \; n_2 = n'_2, \ldots, \; n_k = n'_k.$$

Minthogy $f(n)$ változása szabálytalan (pl. valahányszor n törzsszám, $f(n) = 1$, míg különben $f(n)$ tetszés szerint nagy értékeket is felvesz), ezért nem $f(n)$-re magára, hanem az

$$\frac{f(1) + f(2) + \cdots + f(n)}{n}$$

---

[4] Beleértve az «egy tag összegére» való nem-tulajdonképpeni felbontást is.

[5] 0-tényezős szorzat jelentése 1; ez tehát csak $n = 1$ esetén lép fel: $f(1) = 1$.

[6] E szerint a nem-tulajdonképpeni, «egy tényező szorzatára» való felbontás is számítandó.

középértékre fogok aszimptotikus képletet adni: bebizonyítom, hogy

$$\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(n)}{n} \sim \frac{1}{\varrho R} n^{\varrho-1}, \qquad (2)$$

ahol ϱ a $\zeta(s)=2$ egyenletnek[7] egyetlen 1-nél nagyobb valós gyöke,[8] R értéke pedig

$$R=\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\varrho}} = -\zeta'(\varrho).$$

A (2) aszimptotikus képlet abból a tényből fog következni, hogy az $f(n)$ számelméleti függvény generátor Dirichlet-sora $\frac{1}{2-\zeta(s)}$, azaz

$$f(1)+\frac{f(2)}{2^s}+\frac{f(3)}{3^s}+\cdots+\frac{f(n)}{n^s}+\cdots=\frac{1}{2-\zeta(s)} \qquad (3)$$

(l. 1. szakasz); ez az egyenlet akkor érvényes, ha az $s=\sigma+it$ komplex változó valós komponense, $\sigma>\varrho$; máskülönben a baloldalon álló sor széttartó. E generátorfüggvény a $\sigma>\varrho$ félsíkon reguláris; a $\sigma=\varrho$ egyenesen egyedüli szinguláris helye az $s=\varrho$ pólus. Bohr-nak a Riemann-féle ζ-függvény értékkészletére vonatkozó vizsgálataiból[9] következik, hogy a $\sigma=\varrho$ egyenes bármilyen kis (baloldali) környezetében vannak a $\zeta(s)=2$ egyen-

---

[7] Itt $\zeta(s)$ az s komplex változó oly értékeinél, melyeknek valós összetevője 1-nél nagyobb, a

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots$$

sorral értelmezett Riemann-féle ζ-függvény, ahol n^s az $e^{s\log n}$ transzcendens egész függvényt jelenti.

[8] Ilyen gyök valóban egy és csakis egy van; ugyanis $\zeta(s)$ 1-nél nagyobb valós s értékeknél csökkenő valós folytonos függvény, az $s=1$ helyhez (jobbról) közeledve minden határon túl nő, míg $s\to\infty$ esetén 1 a határértéke.

[9] H. Bohr: Über das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma>1$, *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse,* 1911, 409—428. oldal.

letnek gyökei, tehát a szóbanforgó generátorfüggvénynek pólusai. Ebből közvetlenül következik, hogy a (2) aszimptotikus képlet

$$\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(n)}{n}-\frac{1}{R}n^{\varrho-1} \tag{4}$$

maradéktagjára nézve nem áll fenn $O(n^{\alpha})$ alakú megbecslés, ahol $\alpha<\varrho-1$; BOHR módszerét részleteiben követve e maradéktagra még élesebb alulról való megbecsléshez lehet jutni. Úgyszólván azt az esetet illusztrálja az $f(n)$ számelméleti függvény, ami a törzsszámok eloszlásának problémájánál előállna, ha a RIEMANN-féle ζ-függvénynek — a nevezetes RIEMANN-féle sejtéssel ellentétben — a $\sigma=1$ egyenes bármilyen kis baloldali környezetében volnának zérushelyei. Jelen dolgozatban nem foglalkozom ezekkel, a (3) függvény mélyebb függvénytani tulajdonságaiból folyó eredményekkel; mindössze az említett (2) aszimptotikus képletet fogom bebizonyítani. E közben a komplex változós függvénytannak csak a legelemibb fogalmait és tételeit fogom alkalmazni; ezeknek teljes elkerülése nem ütköznék ugyan akadályba, azonban az előálló számításbeli többlet miatt nem volna érdemes. A (4) maradéktagnak említett alulról való megbecslésére, továbbá ugyane maradéktagnak a diophantikus approximációk elmélete segítségével történő felülről való megbecslésére más helyen szándékozom visszatérni.

1. Az $f(n)$ számelméleti függvényhez tartozó DIRICHLET-sor

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=f(1)+\frac{f(2)}{2^s}+\frac{f(3)}{3^s}+\cdots+\frac{f(n)}{n^s}+\cdots, \tag{5}$$

ahol $s=\sigma+it$ komplex változó. *Ha s valós összetevője, σ, nagyobb, mint a $\zeta(s)=2$ egyenlet egyetlen* 1*-nél nagyobb valós gyöke, ϱ, akkor e sor összetartó és összege*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=\frac{1}{2-\zeta(s)}. \tag{6}$$

Ugyanis $\sigma > \varrho$ esetén

$$\frac{1}{2-\zeta(s)} = \frac{1}{1-(\zeta(s)-1)} =$$
$$= 1 + (\zeta(s)-1) + (\zeta(s)-1)^2 + \cdots + (\zeta(s)-1)^k + \cdots,$$

mert ekkor

$$|\zeta(s)-1| = \left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right| \leqq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\varrho} = \zeta(\varrho) - 1 = 1.$$

Itt, ha $\sigma > 1$,

$$(\zeta(s)-1)^k = \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right)^k = \sum_{n_1=2}^{\infty} \sum_{n_2=2}^{\infty} \cdots \sum_{n_k=2}^{\infty} \frac{1}{(n_1 n_2 \ldots n_k)^s},$$

s a jobboldalon álló k-szoros végtelen sor feltétlenül összetartó; egyszerű DIRICHLET-sorrá átrendezve

$$(\zeta(s)-1)^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_k(n)}{n^s}, \tag{7}$$

ahol $f_k(n)$ az n pozitív egész számnak k-tényezős

$$n = n_1 n_2 \ldots n_k$$

szorzat alakjában való előállításainak száma, hol $n_1, n_2, \ldots, n_k$ 1-nél nagyobb egész számok és két előállítás akkor és csakis akkor számít azonosnak, ha a tényezők, sorrendre nézve is, megegyeznek.[10] (7) érvényes $k = 0$ esetén is, ha $f_0(1)$ jelentése 1, különben (vagyis, ha $n > 1$,) $f_0(n) = 0$. Eszerint, ha $\sigma > \varrho$,

$$\frac{1}{2-\zeta(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_k(n)}{n^s}.$$

---

[10] A 3. lábjegyzetben említett PILTZ-féle osztóprobléma az

$$f_k(n) + \binom{k}{1} f_{k-1}(n) + \binom{k}{2} f_{k-2}(n) + \cdots + \binom{k}{k} f_0(n)$$

számelméleti függvényre vonatkozik, amelynek közvetlen jelentése az n számnak $n = n_1 n_2 \ldots n_k$ alakú előállításainak száma, ahol k adott természetes szám, két, egymástól a tényezők sorrendjében eltérő előállítás különbözőnek számít és $n_1, n_2, \ldots, n_k$ pozitív egész számok, *megengedve* az 1-et is.

E kétszeres végtelen sor $\sigma > \varrho$ esetén ismét feltétlenül összetartó (mert bármely tagjának abszolút értéke nem egyéb, mint ugyane sornak megfelelő tagja az $s = \sigma$ helyen), s így egyszerű DIRICHLET-sorrá átrendezve is összetartó és összege $\frac{1}{2-\zeta(s)}$; szóval (minthogy $f(n) = f_0(n) + f_1(n) + \cdots + f_k(n) + \cdots$[11]) az (5) sor összetartó és összegét (6) adja.

2. Az $f(n)$ számelméleti függvény közepes nagyságrendjének megbecsléséhez használni fogok egy, az $\frac{1}{2-\zeta(s)}$ függvénynek a $\sigma = \varrho$ egyenes jobboldali környezetében való viselkedésére vonatkozó egyenlőtlenséget. Ennek bebizonyítása a következő segédtételen fog alapulni:

Legyen t tetszésszerinti pozitív szám. Az n pozitív egész számnak adható végtelen sok különböző

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k, \ldots \tag{8}$$

érték, amelynél $\frac{t}{2\pi}\log n$-nek a legközelebbi egész számtól való távolsága legalább $\frac{1}{4}$; a (8) számok választhatók úgy, hogy

$$\nu_k < \frac{e^{\frac{2\pi k}{t}}}{1-e^{-\frac{\pi}{t}}} \tag{9}$$

legyen.

Bebizonyítás: Ha g valamely egész szám és az n egész szám teljesíti az

$$e^{\frac{2\pi}{t}(g+\frac{1}{4})} \leqq n \leqq e^{\frac{2\pi}{t}(g+\frac{3}{4})}$$

egyenlőtlenséget, akkor

$$g + \tfrac{1}{4} \leqq \frac{t}{2\pi}\log n \leqq g + \tfrac{3}{4},$$

tehát n-nek megvan a kívánt tulajdonsága. Ha

---

[11] E végtelen sor csak látszólagos, mert, ha k nagyobb, mint n törzstényezőinek száma (többszörösségükkel számlálva őket), akkor $f_k(n) = 0$.

$$e^{\frac{2\pi}{t}(g+\frac{3}{4})} - e^{\frac{2\pi}{t}(g+\frac{1}{4})} \geqq 1,$$

akkor biztosan van ilyen n egész szám; ez pedig teljesül, amint

$$e^{\frac{2\pi}{t}(g+\frac{3}{4})} \geqq \frac{1}{1-e^{-\frac{\pi}{t}}}, \tag{10}$$

tehát g-nek minden elég nagy értékénél. Legyen g_0 a legnagyobb egész szám, amely a (10) egyenlőséget nem teljesíti. Akkor

$$e^{\frac{2\pi}{t}(g_0+\frac{3}{4})} < \frac{1}{1-e^{-\frac{\pi}{t}}}, \tag{11}$$

de

$$e^{\frac{2\pi}{t}(g_0+k+\frac{3}{4})} \geqq \frac{1}{1-e^{-\frac{\pi}{t}}}$$

ha $k=1, 2, 3, \ldots$; a (8) pozitiv egész számokat úgy választva, hogy

$$e^{\frac{2\pi}{t}(g_0+k+\frac{1}{4})} \leqq \nu_k \leqq e^{\frac{2\pi}{t}(g_0+k+\frac{3}{4})}$$

legyen, ezek a kívánt tulajdonsággal fognak bírni és (11) miatt a (9) egyenlőtlenségnek is megfelelnek.

3. Ha $\sigma > 1$, akkor

$$\zeta(\sigma) - \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n^{-ti}}{n^\sigma},$$

$$|\zeta(\sigma) - \zeta(s)| \geqq \Re\big(\zeta(\sigma) - \zeta(s)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(t\log n)}{n^\sigma}.$$

A jobboldalon egy tag sem negativ; ha n olyan, hogy $\frac{t}{2\pi}\log n$-nek a legközelebbi egész számtól való távolsága legalább $\frac{1}{4}$, akkor a $t \log n$ szög vagy a második, vagy a harmadik negyedben van, tehát $\cos(t\log n) \leqq 0$. Így a megelőző szakaszban bebizonyított segédtétel szerint

$$|\zeta(\sigma)-\zeta(s)| \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_k^\sigma} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1-e^{-\frac{\pi}{t}}\right)^\sigma}{e^{\frac{2k\pi\sigma}{t}}} =$$

$$= \frac{\left(1-e^{-\frac{\pi}{t}}\right)^\sigma}{e^{\frac{2\pi\sigma}{t}}\left(1-e^{-\frac{2\pi\sigma}{t}}\right)} = e^{-\frac{3\pi\sigma}{t}} \frac{\left(e^{\frac{\pi}{t}}-1\right)^\sigma}{1-e^{-\frac{2\pi\sigma}{t}}},$$

tehát, a minden valós x helyen érvényes $e^x \geqq 1+x$ egyenlőtlenség miatt,

$$|\zeta(\sigma)-\zeta(s)| \geqq e^{-\frac{3\pi\sigma}{t}} \frac{\left(\frac{\pi}{t}\right)^\sigma}{\frac{2\pi\sigma}{t}} = \frac{\pi^{\sigma-1}}{2\sigma} e^{-\frac{3\pi\sigma}{t}} t^{1-\sigma}. \tag{12}$$

4. Minthogy

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} < 2,$$

ezért $1<\varrho<2$.[12] Legyen $\varrho \leqq \sigma \leqq 2$, $t \geqq 1$; akkor (12) folytán

$$|\zeta(\sigma)-\zeta(s)| \geqq \frac{\pi^{\varrho-1}}{4} e^{-6\pi} t^{1-\sigma} = c_1 t^{1-\sigma},$$

ahol c_1, (mint alább $c_2, c_3, \ldots, c_8$ is) pozitív állandót jelent. Továbbá, minthogy $\sigma>1$ esetén $\zeta(\sigma)$ csökkenő konvex függvény,[13] ezért

$$0 \leqq 2-\zeta(\sigma) = \zeta(\varrho)-\zeta(\sigma) \leqq (\varrho-\sigma)\,\zeta'(\varrho) = R\,(\sigma-\varrho),$$

ahol R, mint a bevezetésben, $-\zeta'(\varrho)$-t jelöli. Ennélfogva

$$|2-\zeta(s)| \geqq |\zeta(\sigma)-\zeta(s)| - \big(2-\zeta(\sigma)\big) \geqq c_1 t^{1-\sigma} - R\,(\sigma-\varrho),$$

[12] J. P. Gram: Tafeln für die Riemannsche Zetafunktion, *Det kongelige Danske Videnskabernes Selkabs Skrifter, naturvidenskabelig og matematisk Afdeling*, (VIII) **10** (1926), 313—325. oldal szerint

$$\zeta(1\cdot7) = 2\cdot05428\ 87568\ldots,$$
$$\zeta(1\cdot8) = 1\cdot88222\ 96181\ldots,$$

(320. oldal); tehát $1\cdot7<\varrho<1\cdot8$.

[13] Ugyanis

$$\zeta'(\sigma) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma} < 0, \quad \zeta''(\sigma) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^2 n}{n^\sigma} > 0.$$

tehát, ha

$$\sigma \geqq \varrho, \quad R(\sigma-\varrho) \leqq \tfrac{1}{2} c_1 t^{-\frac{\varrho}{2}} \quad \text{és} \quad 1-\sigma \geqq -\frac{\varrho}{2}, \tag{13}$$

akkor (minthogy ekkor $\sigma \leqq 1+\frac{\varrho}{2} < 2$)

$$|2-\zeta(s)| \geqq \tfrac{1}{2} c_1 t^{-\frac{\varrho}{2}}.$$

(13) áll, ha $t \geqq 1$ és $\varrho \leqq \sigma \leqq \varrho + c_2 t^{-\frac{\varrho}{2}}$, hacsak c_2 elég kicsi; ugyanis ekkor

$$R(\sigma-\varrho) \leqq R c_2 t^{-\frac{\varrho}{2}} \leqq \tfrac{1}{2} c_1 t^{-\frac{\varrho}{2}}, \text{ ha } c_2 \leqq \frac{c_1}{2R},$$

$$1-\sigma \geqq 1-\varrho-c_2 t^{-\frac{\varrho}{2}} \geqq 1-\varrho-c_2 \geqq -\frac{\varrho}{2}, \text{ ha } c_2 \leqq 1-\frac{\varrho}{2}.$$

Ennélfogva ekkor

$$\left|\frac{1}{2-\zeta(s)}\right| \leqq \frac{2}{c_1} t^{\frac{\varrho}{2}};$$

viszont, ha $t \geqq 1$ és $\varrho + c_2 t^{-\frac{\varrho}{2}} < \sigma \leqq 2$, akkor, $\zeta(\sigma)$ konvexsége miatt,

$$\left|\frac{1}{2-\zeta(s)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^\sigma} = \frac{1}{2-\zeta(\sigma)} <$$

$$< \frac{1}{(\varrho-\sigma)\,\zeta'(\sigma)} < \frac{1}{-c_2 \zeta'(2)\, t^{-\frac{\varrho}{2}}} = \frac{1}{-c_2\zeta'(2)} t^{\frac{\varrho}{2}}.$$

Eszerint $\varrho \leqq \sigma \leqq 2$, $t \geqq 1$ esetén

$$\left|\frac{1}{2-\zeta(s)}\right| \leqq c_3 t^{\frac{\varrho}{2}}. \tag{14}$$

5. Az $s=\varrho$ hely a $2-\zeta(s)$ függvénynek elsőrendű[14] zérushelye, tehát reciprok értékének elsőrendű pólusa

$$\lim_{s=\varrho} \frac{s-\varrho}{2-\zeta(s)} = -\lim_{s=\varrho} \frac{s-\varrho}{\zeta(s)-\zeta(\varrho)} = -\frac{1}{\zeta'(\varrho)} = \frac{1}{R}$$

reziduummal; ezért a

---

[14] $\zeta'(\varrho) < 0$.

$$\varphi(s) = \frac{1}{2-\zeta(s)} - \frac{1}{R}\frac{1}{s-\varrho}$$

függvény, és első differenciálhányadosa is, a $\varrho \leqq \sigma \leqq 2$, $0 \leqq t \leqq 1$ téglalapon — reguláris lévén — korlátos:

$$|\varphi(s)| \leqq c_4, \tag{15}$$

$$|\varphi'(s)| \leqq c_5. \tag{16}$$

Másrészt, (14) miatt, $\varrho \leqq \sigma \leqq 2$, $t > 1$ esetén,

$$|\varphi(s)| \leqq \left|\frac{1}{2-\zeta(s)}\right| + \frac{1}{R}\frac{1}{|s-\varrho|} \leqq c_3 t^{\frac{\varrho}{2}} + \frac{1}{R}, \tag{17}$$

$$\begin{aligned} |\varphi'(s)| &= \left|\frac{\zeta'(s)}{(2-\zeta(s))^2} + \frac{1}{R}\frac{1}{(s-\varrho)^2}\right| \leqq \\ &\leqq \left|\frac{1}{2-\zeta(s)}\right|^2 |\zeta'(s)| + \frac{1}{R}\frac{1}{|s-\varrho|^2} \leqq Rc_3^2 t^{\varrho} + \frac{1}{R}. \end{aligned} \tag{18}$$

(15), (16), (17) és (18) szerint, ha $\varrho \leqq \sigma \leqq 2$, $t \geqq 0$, akkor, $t \leqq |s|$, $1 < \varrho \leqq |s|$ miatt,

$$|\varphi(s)| \leqq c_3 t^{\frac{\varrho}{2}} + \frac{1}{R} + c_4 \leqq c_6 |s|^{\frac{\varrho}{2}}, \tag{19}$$

$$|\varphi'(s)| \leqq Rc_3^2 t^{\varrho} + \frac{1}{R} + c_5 \leqq c_7 |s|^{\varrho}. \tag{20}$$

$\varphi(\bar{s}) = \overline{\varphi(s)}$ és $\varphi'(\bar{s}) = \overline{\varphi'(s)}$ miatt érvényesek a (19) és (20) egyenlőtlenségek $\varrho \leqq \sigma \leqq 2$, $t < 0$ esetén is, szóval $\varrho \leqq \sigma \leqq 2$ esetén mindig.

6. Mint ismeretes,[15] ha $\sigma > 0$, $x > 0$ és k pozitív egész szám, akkor ($s = \sigma + it$)

$$\frac{k!}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^s}{s^{k+1}}\, dt = \begin{cases} \log^k x, & \text{ha } x \geqq 1, \\ 0, & \text{ha } x \leqq 1, \end{cases} \tag{21}$$

[15] L. például E. LANDAU: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, I. kötet, 266. oldal, ahol $\sigma=2$, ez azonban a bizonyításhoz nem lényeges; vagy E. LANDAU: Sobre los números primos en progresión aritmética, *Revista Matemática Hispano-Americana,* 5 (1923), teorema 62 (5. oldal), ahol a (21) képlet $k=1$ speciális esete van — elemi úton — bebizonyítva, amelyből az általános k — 1-szeres parciális integrálással adódik.

továbbá[16] $x > 1$ esetén

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^s}{s}\,dt = 1. \tag{22}$$

Ennélfogva, ha $\sigma > \varrho$, az

$$\frac{1}{2-\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$$

végtelen sornak feltétlen és t-ben egyenletes összetartása[17] miatt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^s}{s^3}\,\frac{dt}{2-\zeta(s)} &= \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\frac{2!}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s^3}\,dt = \\ &= \sum_{n \leqq x} f(n)\log^2\frac{x}{n},\end{aligned} \tag{23}$$

ahol az összegezés jele alatt $n \leqq x$ azt jelzi, hogy n az x-nél nem nagyobb pozitív egész számokat futja át; megfelelő módon értelmezendők alább is a hasonló jelölések.

7. Itt

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^s}{s^3}\,\frac{dt}{2-\zeta(s)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s\,\frac{\varphi(s)}{s^3}.dt + \frac{1}{R}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^s}{s^3(s-\varrho)}\,dt.$$

A szokásos eljárással (részlettörtekre bontás) adódik, hogy

$$\frac{1}{s^3(s-\varrho)} = \frac{1}{\varrho^3(s-\varrho)} - \frac{1}{\varrho^3 s} - \frac{1}{\varrho^2 s^2} - \frac{1}{\varrho s^3},$$

---

[16] E képlet a (21) képlet $k=1$, $x>1$ esetéből parciális] integrációval adódik; egyébként megtalálható például a 15. lábjegyzetben idézett helyeen is, a 344., illetőleg 1. oldalon (teorema 60).

[17] U. i. $\left|\frac{f(n)}{n^s}\right| = \frac{f(n)}{n^\sigma}$ és $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^\sigma}$ összetartó.

tehát, $x > 1$, $\sigma > \varrho$ esetén, (21) és (22) miatt,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^s}{s^3(s-\varrho)}\,dt = \frac{x^\varrho}{\varrho^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{\sigma-\varrho+it}}{\sigma-\varrho+it}\,dt - \frac{1}{\varrho^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^s}{s}\,dt -$$

$$-\frac{1}{\varrho^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^s}{s^2}\,dt - \frac{1}{\varrho}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^s}{s^3}\,dt = 2\pi\left(\frac{x^\varrho}{\varrho^3} - \frac{1}{\varrho^3} - \frac{\log x}{\varrho^2} - \frac{\log^2 x}{2\varrho}\right).$$

Igy, (23) szerint,

$$\sum_{n \leqq x} f(n)\log^2\frac{x}{n} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x^s\frac{\varphi(s)}{s^3}\,dt + \frac{2x^\varrho - 2 - 2\varrho\log x - \varrho^2\log^2 x}{\varrho^3 R}.$$

(2[illegible])

8. Itt, parciálisan integrálva,

$$\int_{-\omega}^{+\omega} x^s\frac{\varphi(s)}{s^3}\,dt = \frac{1}{i\log x}\left(x^{\sigma+i\omega}\frac{\varphi(\sigma+i\omega)}{(\sigma+i\omega)^3} - x^{\sigma-i\omega}\frac{\varphi(\sigma-i\omega)}{(\sigma-i\omega)^3}\right) -$$

$$-\frac{1}{\log x}\int_{-\omega}^{+\omega} x^s\left(\frac{\varphi(s)}{s^3}\right)' dt,$$

tehát, minthogy $\omega \to \infty$ esetén, (19) miatt,

$$\left| x^{\sigma\pm i\omega}\frac{\varphi(\sigma\pm i\omega)}{(\sigma\pm i\omega)^3}\right| = x^\sigma\left|\frac{\varphi(\sigma+i\omega)}{(\sigma+i\omega)^3}\right| \leqq c_6 x^\sigma |\sigma+i\omega|^{\frac{\varrho}{2}-3} \to 0,$$

ezért

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^s\frac{\varphi(s)}{s^3}\,dt = \frac{1}{\log x}\int_{-\infty}^{+\infty} x^s\left(3\frac{\varphi(s)}{s^4} - \frac{\varphi'(s)}{s^3}\right) dt.$$

Ennélfogva, a (19) és (20) egyenlőtlenségeket alkalmazva,

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} x^s \frac{\varphi(s)}{s^3}\,dt\right| \leqq \frac{x^\sigma}{\log x}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(3\,\frac{|\varphi(s)|}{|s|^4}+\frac{|\varphi'(s)|}{|s|^3}\right)dt \leqq$$

$$\leqq \frac{x^\sigma}{\log x}\int_{-\infty}^{+\infty}(3c_6|s|^{\frac{\varrho}{2}-4}+c_7|s|^{\varrho-3})\,dt \leqq$$

$$\leqq (3c_6+c_7)\frac{x^\sigma}{\log x}\int_{-\infty}^{+\infty}|\varrho+it|^{\varrho-3}\,dt = c_8\frac{x^\sigma}{\log x}, \tag{25}$$

mert $\frac{\varrho}{2}-4<\varrho-3<0$; a legutolsó integrál (s így a többi is) konvergens, mert $\varrho-3<-1$. (25) mindig érvényes, ha $\sigma>\varrho$; ezért, σ-t ϱ-hoz közelítve,

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} x^s \frac{\varphi(s)}{s^3}\,dt\right| \leqq c_8\frac{x^\varrho}{\log x},$$

s így, ha $x\to\infty$,

$$x^{-\varrho}\int_{-\infty}^{+\infty} x^s\frac{\varphi(s)}{s^3}\,dt \to 0.$$

Tehát, figyelemmel (24)-re, adódik, hogy $x\to\infty$ esetén

$$x^{-\varrho}\sum_{n\leqq x} f(n)\log^2\frac{x}{n}\to\frac{2}{\varrho^3 R}. \tag{26}$$

9. Legyen $\lambda>1$; továbbá, rövidítésképpen,

$$\Phi_\lambda(x)=\sum_{n\leqq\lambda^2x} f(n)\log^2\frac{\lambda^2x}{n}-2\sum_{n\leqq\lambda x} f(n)\log^2\frac{\lambda x}{n}+\sum_{n\leqq x} f(n)\log^2\frac{x}{n};$$

(26) miatt $x\to\infty$ esetén

$$x^{-\varrho}\Phi_\lambda(x)\to\frac{2}{\varrho^3 R}(\lambda^{2\varrho}-2\lambda^\varrho+1). \tag{27}$$

Másrészt azonban

$$\Phi_\lambda(x)=\sum_{n\leqq x} f(n)\left(\log^2\frac{\lambda^2x}{n}-2\log^2\frac{\lambda x}{n}+\log^2\frac{x}{n}\right)+$$

$$+\sum_{x<n\leqq\lambda x} f(n)\left(\log^2\frac{\lambda^2x}{n}-2\log^2\frac{\lambda x}{n}\right)+\sum_{\lambda x<n\leqq\lambda^2x} f(n)\log^2\frac{\lambda x}{n}.$$

Itt

$$\log^2 \frac{\lambda^2 x}{n} - 2\log^2 \frac{\lambda x}{n} + \log^2 \frac{x}{n} =$$

$$= \left(\log \frac{x}{n} + 2\log \lambda\right)^2 - 2\left(\log \frac{x}{n} + \log \lambda\right)^2 + \log^2 \frac{x}{n} =$$

$$= 2\log^2 \lambda,$$

s innét

$$\log^2 \frac{\lambda^2 x}{n} - 2\log^2 \frac{\lambda x}{n} \leqq 2\log^2 \lambda,$$

továbbá $x < n \leqq \lambda x$ esetén

$$\log^2 \frac{\lambda^2 x}{n} - 2\log^2 \frac{\lambda x}{n} \geqq \log^2 \frac{\lambda^2 x}{n} - \left(2\log \frac{\lambda x}{n}\right)^2 =$$

$$= \log^2 \frac{\lambda^2 x}{n} - \log^2 \frac{\lambda^2 x^2}{n^2} \geqq 0;$$

$\lambda x < n \leqq \lambda^2 x$ esetén pedig

$$0 \leqq \log^2 \frac{\lambda^2 x}{n} \leqq \log^2 \lambda \leqq 2\log^2 \lambda.$$

Ezért

$$2\log^2 \lambda \sum_{n \leqq x} f(n) \leqq \Phi_\lambda(x) \leqq 2\log^2 \lambda \sum_{n \leqq \lambda^2 x} f(n),$$

azaz

$$\frac{\left(\frac{x}{\lambda^2}\right)^{-\varrho} \Phi_\lambda\left(\frac{x}{\lambda^2}\right)}{2\lambda^{2\varrho}\log^2 \lambda} \leqq x^{-\varrho} \sum_{n \leqq x} f(n) \leqq \frac{x^{-\varrho}\Phi_\lambda(x)}{2\log^2 \lambda}.$$

Ha $x \to \infty$, (27) folytán ezek az $x^{-\varrho} \sum_{n \leqq x} f(n)$-re talált korlátok rendre az

$$\frac{1}{\varrho^3 R} \frac{\lambda^{2\varrho} - 2\lambda^\varrho + 1}{\lambda^{2\varrho}\log^2 \lambda} \quad \text{és} \quad \frac{1}{\varrho^3 R} \frac{\lambda^{2\varrho} - 2\lambda^\varrho + 1}{\log^2 \lambda}$$

határértékekhez közelednek; ennélfogva $x^{-\varrho} \sum_{n \leqq x} f(n)$ minden sűrűsödési helye ezek közé esik. Ez igaz minden 1-nél nagyobb λ-ra; minthogy $\lambda \to 1$, azaz $\log \lambda = h \to 0$ esetén

$$\frac{\lambda^{2\varrho}-2\lambda^{\varrho}+1}{\log^2\lambda}=\frac{e^{2h\varrho}-2e^{h\varrho}+1}{h^2}\to\frac{d^2(e^{y\varrho})}{dy^2}\bigg|_{y=0}=\varrho^2,$$

s így egyúttal

$$\frac{\lambda^{2\varrho}-2\lambda^{\varrho}+1}{\lambda^{2\varrho}\log^2\lambda}\to\varrho^2,$$

ezért $x\to\infty$ esetén

$$x^{-\varrho}\sum_{n\leqq x}f(n)\to\frac{1}{\varrho^3R}\varrho^2=\frac{1}{\varrho R},$$

aminek a bevezetésben kimondott (2) aszimptotikus képlet evidens következménye.

Szeged, 1930. május 25.

Kalmár László.

ÜBER DAS PROBLEM DER «FACTORISATIO NUMERORUM».

In der vorliegenden Arbeit wird der asymptotische Verlauf der zahlentheoretischen Funktion $f(n)$ untersucht, welche als die Anzahl der Darstellungen von n in der Form

$$n=n_1n_2\ldots n_k \tag{1}$$

definiert wird, wobei $k=0, 1, 2, \ldots$, ferner $n_1, n_2, \ldots, n_k$ beliebige ganze Zahlen >1 sind. Dabei bedeutet das Produkt (1) im Falle $k=0$ Eins; ferner sind zwei Darstellungen (1) auch dann als verschieden zu betrachten, wenn sie sich bloss in der Reihenfolge der Faktoren unterscheiden. Die zahlentheoretische Funktion $f(n)$ ist ein multiplikativ-zahlentheoretisches Analogon der Anzahl der unbeschränkten Partitionen von n.

Es wird für $f(n)$ die asymptotische Formel

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)\sim\frac{n^{\varrho}}{-\varrho\zeta'(\varrho)}$$

hergeleitet, wobei ϱ durch $\varrho>1$, $\zeta(\varrho)=2$ definiert ist.

László Kalmár.