Über die Cantorsche Theorie der reellen Zahlen.

Von László Kalmár in Szeged.

Als Student besuchte ich zu gleicher Zeit Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, sowie Vorlesungen über elementare Zahlentheorie. So geschah es, daß ich vormittags über Cantors Fundamentalfolgen und nachmittags über Restklassen mod m gehört habe. Ich war damals sehr überrascht wegen gewisse Analogien, die zwischen beiden Theorien trotz der großen Unterschied ihrer Gegenstände bestehen. Als typische Beispiele jener Analogien nenne ich die folgenden. (a) Multiplikation von reellen Zahlen α und β wurde vormittags mit Hilfe von entsprechenden Fundamentalfolgen a_n und b_n eingeführt, als die durch die Fundamentalfolge $a_n b_n$ definierte reelle Zahl; nachmittags wurde Multiplikation von Restklassen α und β mit Hilfe von Repräsentantelementen a und b definiert als die die Zahl ab enthaltende Restklasse. (b) Um jene Definitionen zu rechtfertigen, hatte man vormittags zu beweisen, daß für Fundamentalfolgen a'_n und b'_n, welche ebenfalls die reelle Zahlen α bzw. β definieren, die Fundamentalfolge $a'_n b'_n$ dieselbe reelle Zahl definiert, wie $a_n b_n$, während wir nachmittags zu beweisen hatten, daß für andere Repräsentanten a' und b' aus denselben Restklassen α und β die Zahl $a'b'$ kongruent ab mod m ist. (c) Der Satz, wonach das gliedweise Produkt von zwei Fundamentalfolgen wiederum eine Fundamentalfolge ist, wurde vormittags durch die Rechnung

$$(1) \qquad a_m b_m - a_n b_n = a_m b_m - a_m b_n + a_m b_n - a_n b_n = a_m (b_m - b_n) + b_n (a_m - a_n)$$

gezeigt, während nachmittags der Satz, wonach aus $a \equiv a'$ mod m und $b \equiv b'$ mod m die Kongruenz $ab \equiv a'b'$ mod m folgt, durch die Rechnung

$$ab - a'b' = ab - ab' + ab' - a'b' = a(b - b') + b'(a - a'),$$

also durch dieselbe Identität wie oben bewiese wurde.

Im Laufe meiner weiteren Studien habe ich in van der Waerden's *Moderne Algebra* (Berlin, 1930) die Erklärung der Analogien von den Typen (a) und (b) gefunden. In der Tat, die van der Waerdensche algebraische Version der Cantorschen Theorie (§. 64, S. 212—218 im ersten Band) zeigt, daß die Rechnung mit Fundamentalfolgen unter Identifizierung von Folgen, deren gliedweise Differenz eine Nullfolge ist, auf eine Rechnung mit Restklassen im Ring der Fundamentalfolgen modulo dem Ideal der Nullfolgen hinauskommt. Was aber die Analogie (*c*) betrifft, so blieb dieselbe unerklärt, da van der Waerden's Beweis für den Satz, daß die Menge der Fundamentalfolgen in bezug auf gliedweise Multiplikation abgeschlossen ist, sich nicht vom üblichen unterscheidet und keinen Zusammenhang mit der Multiplikation von Kongruenzen zeigt.

In dieser Arbeit werde ich die van der Waerdensche Version der Cantorschen Theorie einigermaßen modifizieren, indem ich die Fundamentalfolgen anstatt der üblichen Form der Cauchyschen Konvergenzbedingung durch eine (in einer anderen Arbeit[1]) gegebene) äquivalente Bedingung definiere. Diese Modifikation erlaubt es gewisse Rechnungen wie (1) durch bekannte Sätze über Kongruenzen zu ersetzen, daher, außer Erklärung der Analogie (*c*), auch eine gewisse Vereinfachung zu erzielen. Obzwar die Modifikation nur einige Punkte der Cantorschen Theorie betrifft, werde ich die ganze Theorie vom Beginn an lückenlos darstellen, so daß der Leser nicht die van der Waerdensche Darstellung (wohl aber die Grundbegriffe der modernen Algebra) zu kennen braucht.

1. Die Cantorsche (und desgleichen auch die Dedekindsche) Einführung der reellen Zahlen sollte man in angemessener Weise anstatt einer *Definition* im philosophisch-psychologisch-pädagogischem Sinne der Wortes, eher als eine *Modellbildung* für ein gewisses Axiomensystem der reellen Zahlen, mit Hilfe von mengentheoretisch-algebraischen Mitteln angewandt auf die rationalen Zahlen, betrachten. Dieses Axiomensystem besteht aus denjenigen Eigenschaften der reellen Zahlen, die sich bei einem anschaulichen Aufbau der Elemente der Analysis als nötig erweisen. Dasselbe enthält (außer der Tatsache, daß sämtliche rationalen Zahlen sich unter den reellen Zahlen vorkommen) gewöhnliches algebraisches Rechnen, d. h. die Axiome, die die Menge der reellen Zahlen als einen *Körper* charakterisieren; ferner, übliches Handeln mit Ungleichungen und absoluten Beträgen, d. h. die Axiome, welche den Körper der reellen Zahlen als einen *archimedisch angeordneten Körper* charakterisieren; endlich eine gewisse *Kompaktheitseigenschaft*, die in verschiedenen äquivalenten Formen angegeben werden kann (und in einer heuristischen Aufbau der Analysis, unter Berufung auf die Anschauung, in verschiedenen Formen angewandt wird), von denen eine die Cauchysche Konvergenzbedingung ist. Es gilt daher, aus dem Körper der rationalen Zahlen ausgehend, durch mengentheoretisch-algebraische Hilfsmitteln einen archimedisch angeordneten und zugleich (im Sinne des Bestehens der Cauchyschen Kon-

---

[1]) L. Kalmár, On Cauchy's convergence test, *Hungarica Acta Mathematica*, im Erscheinen; vgl. auch K. Knopp, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen* (Berlin, 1931), S. 89–90 (II. Hauptkriterium (3. Form)).

vergenzbedingung) kompakten Erweiterungskörper zu konstruieren; für diesen gelten dann sämtliche Sätze der Analysis. Dabei zeigt sich, daß man zu diesem Zwecke von den rationalen Zahlen keine anderen Eigenschaften anzuwenden hat, als diejenigen, die ihre Menge als einen archimedisch angeordneten Körper charakterisieren; d. h. *man kann jeden archimedisch angeordneten Körper* K *zu einem kompakten archimedisch angeordneten Körper* Ω *erweitern.*

2. Als „Rohstoff" für die Konstruktion dieses Erweiterungskörpers betrachten wir die Menge $\mathfrak{f}$ der unendlichen Folgen[2]) $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ aus Elementen a_n von K, d. h. das abzählbar-unendliche hyperkomplexe System[3]) über K mit den Basiselementen[4]) $\mathbf{i}_1=(1, 0, \ldots, 0, \ldots)$, $\mathbf{i}_2=(0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots), \ldots$ Definiert man Summe und Produkt zweier Elemente $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}=(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ von $\mathfrak{f}$ durch gliedweise Addition und Multiplikation, d. h. durch[5]) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n, \ldots)$ und $\mathbf{ab}=(a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n, \ldots)$, so sind offenbar die Ringpostulate und auch das kommutative Gesetz der Multiplikation erfüllt; also *ist* $\mathfrak{f}$ *ein kommutativer Ring.* Nullelement von $\mathfrak{f}$ ist die Folge $\mathbf{0}=(0, 0, \ldots, 0, \ldots)$; Differenz zweier Folgen erhält man durch gliedweise Subtraktion: $\mathbf{a}-\mathbf{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2, \ldots, a_n-b_n, \ldots)$. Man sieht auch, daß $\mathfrak{f}$ *ein Einselement*, nämlich $\mathbf{1}=(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ *besitzt.*

Der Ring $\mathfrak{f}$ enthält *Nullteiler*, nämlich genau die Folgen $\mathbf{a}$, die Null als Glied enthalten. In der Tat, ist $a_k=0$, so ist z. B. $\mathbf{a}\mathbf{i}_k=\mathbf{0}$; ist aber $a_n \neq 0$ für jedes n, so kann $\mathbf{ab}=\mathbf{0}$ nur für $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ bestehen. *Jedes von den Nullteilern verschiedene Element* $\mathbf{a}$ *ist eine Einheit in* $\mathfrak{f}$, d. h. *es besitzt ein Inverses*, nämlich die Folge $(1/a_1, 1/a_2, \ldots, 1/a_n, \ldots)$.

3. Wir betrachten auch Folgen $\Phi=(k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots)$ von wachsenden positiven ganzen Zahlen $k_1<k_2<\ldots<k_n<\ldots$ Wir nennen sie *Indexfolgen*, während mit Folgen schlechthin in Nrn. **3—9** weiter unten stets Elemente von $\mathfrak{f}$ gemeint werden. Wir betrachten die Indexfolgen als *Operatoren* im Ring $\mathfrak{f}$, indem wir $\mathbf{a}^{\Phi}$ als die Teilfolge $(a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_n}, \ldots)$ von $\mathbf{a}$ definieren. Die Homomorphiebedingungen $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^{\Phi}=\mathbf{a}^{\Phi}+\mathbf{b}^{\Phi}$, $(\mathbf{ab})^{\Phi}=\mathbf{a}^{\Phi}\,\mathbf{b}^{\Phi}$ werden offensichtlicht erfüllt. Ist auch $\Psi=(l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots)$ eine Indexfolge, so definieren

---

[2]) Das n-te Glied der Folgen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (und weiter unten der Indexfolge Φ) bezeichnen wir bzw. mit a_n, b_n, c_n (und k_n), auch wenn dies der Kürze halber nicht besonders erwähnt wird.

[3]) Dieser Begriff wird oft auch in einem anderen Sinne als hier gebraucht.

[4]) Hier bedeutet 0 das Nullelement, 1 das Einselement von K. Bezeichnet n eine natürliche Zahl, so bezeichnen wir mit n oft auch das Element $n.1$ (d. h. $1+1+\ldots+1$ mit n Summanden) von K.

[5]) Diese Definition von $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ entspricht der gewöhnlichen Vektoraddition in hyperkomplexen Systemen Die Definition der Multiplikation entspricht der Festzetzung $\mathbf{i}_k\,\mathbf{i}_l=\mathbf{0}=(0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ für $k \neq l$, $\mathbf{i}_k^2=\mathbf{i}_k$ der Produkte von Basiselementen.

wir das *Produkt* $\Phi\Psi$ als die Indexfolge $(k_{l_1}, k_{l_2}, \ldots, k_{l_n}, \ldots)$, so daß allgemein $\mathbf{a}^{\Phi\Psi} = (\mathbf{a}^{\Phi})^{\Psi}$ gilt. Summe von Operatoren wird nicht definiert.

4. Eine Folge **a** heißt eine *Nullfolge*, falls es für jede positive ganze Zahl l (als Element von K betrachtet[6])) eine nichtnegative ganze Zahl n_l gibt, so daß[7]) $|a_n| < 1/l$ für $n > n_l$. Offenbar ist Summe und Differenz (und auch das Produkt) zweier Nullfolgen wiederum eine Nullfolge; d. h. *die Nullfolgen bilden einen Modul* (sogar einen Unterring) $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{f}$. Definiert man daher *Kongruenz* zweier Folgen **a** und **b** modulo $\mathfrak{n}$, im Zeichen $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b} \bmod \mathfrak{n}$ (in Nrn. **4—8** kurz $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$), wie üblich, durch $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathfrak{n}$, so *ist die Kongruenz eine reflexive, symmetrische und transitive Beziehung* und *man darf Kongruenzen addieren und subtrahieren*. Multiplizieren darf man sie jedoch im allgemeinen nicht, da $\mathfrak{n}$ kein Ideal im Ring $\mathfrak{f}$ ist. In der Tat, es gibt Nullfolgen **a**, die keine Nullteiler in $\mathfrak{f}$ sind, da sie 0 nicht als Glied enthalten (z. B. $\mathbf{a} = (1, 1/2, 1/3, \ldots)$); für $\mathbf{b} = 1/\mathbf{a}$ gilt dann $\mathbf{ab} = \mathbf{1} \,\bar{\in}\, \mathfrak{n}$ (also $\mathbf{ab} \not\equiv \mathbf{0}.\mathbf{b}$, obzwar $\mathbf{a} \equiv \mathbf{0}$).

Offenbar ist jede Teilfolge einer Nullfolge wiederum eine Nullfolge; d. h. $\mathfrak{n}$ *ist ein zulässiger Unterring von* $\mathfrak{f}$ (in bezug auf den Operatorenbereich der Indexfolgen). *Ist* umgekehrt **a** *eine Nullfolge und* Φ *eine Indexfolge, so gibt es eine Nullfolge* **b**, *für die* $\mathbf{b}^{\Phi} = \mathbf{a}$ *gilt.* In der Tat, es genügt z. B. $b_n = a_l$ für $k_{l-1} < n \leqq k_l$, $l = 1, 2, \ldots$ zu wählen (wobei $k_0 = 0$ gesetzt wurde).

Nennt man eine Folge **a** *eigentlich divergent*, falls es für jede positive ganze Zahl l eine nichtnegative ganze Zahl n_l gibt, so daß[8]) $|a_n| > l$ für $n > n_l$ gilt, so *ist* offenbar *das Inverse einer Nullfolge (falls es existiert*, d. h. die fragliche Nullfolge kein Nullteiler ist,) *eigentlich divergent* und umgekehrt, *das Inverse einer eigentlich divergenten Folge ist, falls es existiert, eine Nullfolge.*

5. In der Gruppentheorie betrachtet man zur Erforschung von Eigenschaften einer Untergruppe $\mathfrak{H}$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$, falls $\mathfrak{H}$ kein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, mit Vorteil den Normalisator $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{H}$ in bezug auf $\mathfrak{G}$, d. h. die umfassendste Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{H}$ als Normalteiler enthält. Aus der Analogie der Normalteiler von Gruppen mit den Idealen von Ringen[9]) kann man

[6]) Vgl. [4]).

[7]) Aus der archimedischen Eigenschaft von K e gibt sich dann für jedes positive $\varepsilon \in K$ die Existenz einer nichtnegativen ganzen Zahl $n(\varepsilon)$, so daß $|a_n| < \varepsilon$ für $n > n(\varepsilon)$ gilt.

[8]) Aus der archimedischen Eigenschaft von K ergibt sich dann für jedes positive $\omega \in K$ die Existenz einer nichtnegativen ganzen Zahl $n(\omega)$, so daß $|a_n| > \omega$ für $n > n(\omega)$ gilt.

[9]) Der Grund dieser wohlbekannten Analogie wird nach einer mündlichen Mitteilung von L. Rédei besonders klar, falls man den Begriff der *normalen Klasseneinteilung* beliebiger algebraischer Strukturen (d. h. Mengen, worin gewisse Verknüpfungen definiert wurden) einführt. Er nennt eine Einteilung einer algebraischen Struktur $\mathfrak{S}$ in fremden Klassen (Untermengen) mit der Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}$ normal, falls man die in $\mathfrak{S}$ definierten Verknüpfungen in der üblichen Weise *eindeutig* auf die Klassen übertragen kann, d. h., falls für jede der

vermuten, daß für einen (etwa kommutativen) Ring $\mathfrak{f}$ und einen Unterring $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{f}$, der kein Ideal in $\mathfrak{f}$ ist, der umfassendste Unterring $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{f}$ eine Rolle spielen kann, in welchem $\mathfrak{n}$ ein Ideal ist. Die Existenz dieses umfassendsten Unterringes $\mathfrak{b}$ beweist man leicht. In der Tat bilden die Elemente $\mathbf{b} \in \mathfrak{f}$, die für jedes $\mathbf{n} \in \mathfrak{n}$ die Bedingung $\mathbf{b}\mathbf{n} \in \mathfrak{n}$ erfüllen, wie man sofort sieht, einen Ring $\mathfrak{b}$; offenbar ist $\mathfrak{n}$ ein Ideal in $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}$ enthält alle Unterringe von $\mathfrak{f}$, die $\mathfrak{n}$ als Ideal enthalten.

In unserem Falle (d. h. falls $\mathfrak{f}$ die Menge der Folgen und $\mathfrak{n}$ die Menge der Nullfolgen ist), besteht $\mathfrak{b}$ aus den *beschränkten* Folgen[10]), d. h. aus den Folgen $\mathbf{b}$, für welche es eine positive ganze Zahl l gibt, so daß[11]) $|b_n|<l$ gilt für jedes n. In der Tat, ist $\mathbf{a} \in \mathfrak{n}$ und $\mathbf{b}$ beschränkt, so gilt offenbar $\mathbf{a}\mathbf{b} \in \mathfrak{n}$. Andererseits besitzt eine unbeschränkte Folge $\mathbf{b}$ ersichtlich eine eigentlich divergente Teilfolge $\mathbf{b}^{\Phi}$; $\mathbf{1}/\mathbf{b}^{\Phi}$ ist eine Nullfolge, daher gibt es nach den Obigen eine Nullfolge $\mathbf{a}$ mit $\mathbf{a}^{\Phi}=\mathbf{1}/\mathbf{b}^{\Phi}$; daher ist $\mathbf{a}\mathbf{b} \bar{\in} \mathfrak{n}$, da $(\mathbf{a}\mathbf{b})^{\Phi}=\mathbf{a}^{\Phi}\mathbf{b}^{\Phi}=\mathbf{1} \bar{\in} \mathfrak{n}$.

Offenbar ist jede Teilfolge einer beschränkten Folge wiederum beschränkt; d. h., auch $\mathfrak{b}$ *ist ein zulässiger Unterring von* $\mathfrak{f}$.

Ist ein Element $\mathbf{b}=(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ von $\mathfrak{b}$ ein Nullteiler in $\mathfrak{f}$, d. h. ist $b_k=0$ für ein k, so ist $\mathbf{b}$ ein Nullteiler auch in $\mathfrak{b}$; es ist ja $\mathbf{b}\mathbf{i}_k=\mathbf{0}$ und $\mathbf{i}_k \in \mathfrak{b}$. Im Gegensatz zu $\mathfrak{f}$ gibt es aber in $\mathfrak{b}$ außer den Nullteilern Elemente, die kein Inverses in $\mathfrak{b}$ besitzen, nämlich die Elemente $\mathbf{b}$, die eine Nullfolge $\mathbf{b}^{\Phi}$ als Teilfolge enthalten. In der Tat, es kann nicht $\mathbf{a}\mathbf{b}=\mathbf{1}$ für ein $\mathbf{a} \in \mathfrak{b}$ sein, da sonst auch $\mathbf{a}^{\Phi} \in \mathfrak{b}$ und doch $\mathbf{a}^{\Phi}\mathbf{b}^{\Phi}=(\mathbf{a}\mathbf{b})^{\Phi}=\mathbf{1}^{\Phi}=\mathbf{1} \bar{\in} \mathfrak{n}$ wäre. *Enthält* aber *eine Folge* $\mathbf{b} \in \mathfrak{b}$ *weder* 0 *als Glied, noch eine Nullfolge als Teilfolge, so ist sie eine Einheit in* $\mathfrak{b}$. In der Tat, wäre das in $\mathfrak{f}$ notwendig existierende Inverse $\mathbf{1}/\mathbf{b}$ von $\mathbf{b}$ unbeschränkt, und wäre $(\mathbf{1}/\mathbf{b})^{\Phi}=\mathbf{1}/\mathbf{b}^{\Phi}$ eine eigentlich divergente Teilfolge von $\mathbf{a}$, so wäre das Inverse $\mathbf{b}^{\Phi}$ von $\mathbf{1}/\mathbf{b}^{\Phi}$ doch eine Nullfolge.

---

in $\mathfrak{S}$ definierten Verknüpfungen die Klasse, der der Verknüpfungswert angehört, nur von den Klassen abhängt, der die verknüpften Elemente von $\mathfrak{S}$ angehören. Dann sind die normalen Klasseneinteilungen einer Gruppe genau die Einteilungen in Nebenklassen in bezug auf einem Normalteiler und die normalen Klasseneinteilungen eines Ringes genau die Einteilungen in Restklassen in bezug auf einem Ideal.

[10]) D. h. der Begriff der beschränkten Folge läßt sich folgendermaßen auf den Begriff der Nullfolge zurückführen: *eine Folge ist dann und nur dann beschränkt, falls sie mit einer Nullfolge multipliziert stets eine Nullfolge als Produkt ergibt.* Umgekehrt läßt sich auch der Begriff der Nullfolge auf den Begriff der beschränkten Folge zurückführen; *eine Folge ist* nämlich *dann und nur dann eine Nullfolge, falls die durch Weglassen ihrer Glieder gleich* 0 *entstehende Folge entweder endlich ist, oder ein Inverses besitzt, das keine beschränkte Folge als Teilfolge enthält.* — Man kann die Ringeigenschaft von $\mathfrak{b}$ natürlichen auch direkt beweisen.

[11]) Aus der archimedischen Eigenschaft von K ergibt sich, daß eine Folge $\mathbf{b}$ beschränkt ist, sofern es ein Element $\omega \in \mathsf{K}$ gibt, so daß $|b_n|<\omega$ gilt für jedes n.

6. Wir nennen nun eine beschränkte[12]) Folge $\mathbf{c}$ eine *Fundamentalfolge* (Cauchysche Folge), falls sie mit jeder ihrer Teilfolgen kongruent modulo $\mathfrak{n}$ ist, d. h., falls $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}^{\Phi}$ für jede Indexfolge Φ gilt. Offenbar gilt dann auch $\mathbf{c}^{\Phi} \equiv \mathbf{c}^{\Psi}$ für beliebige Indexfolgen Φ und Ψ. Daraus folgt, daß *jede Teilfolge* $\mathbf{c}^{\Phi}$ *einer Fundamentalfolge* $\mathbf{c}$ *wiederum eine Fundamentalfolge ist;* in der Tat gilt $\mathbf{c}^{\Phi} \equiv \mathbf{c}^{\Phi\Psi} = (\mathbf{c}^{\Phi})^{\Psi}$ für jede Indexfolge Ψ.

Die Fundamentalfolgen bilden einen Ring $\mathfrak{c}$ (also nach Obigem einen zulässigen Unterring von $\mathfrak{f}$ und auch von $\mathfrak{b}$). In der Tat, mit $\mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$ sind auch $\mathbf{c}+\mathbf{d}$, $\mathbf{c}-\mathbf{d}$ und $\mathbf{cd}$ Fundamentalfolgen, da sich aus $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}^{\Phi}$ und $\mathbf{d} \equiv \mathbf{d}^{\Phi}$ unmittelbar $\mathbf{c} \pm \mathbf{d} \equiv \mathbf{c}^{\Phi} \pm \mathbf{d}^{\Phi} = (\mathbf{c} \pm \mathbf{d})^{\Phi}$ und $\mathbf{cd} \equiv \mathbf{c}^{\Phi}\mathbf{d}^{\Phi} = (\mathbf{cd})^{\Phi}$ ergeben für eine beliebige Indexfolge Φ.

Offenbar ist jede Nullfolge eine Fundamentalfolge; d. h., $\mathfrak{n}$ *ist ein Unterring von* $\mathfrak{c}$, daher auch *ein Ideal in* $\mathfrak{c}$, da ja er ein Ideal in $\mathfrak{b}$ ist. Auch die „skalaren Vielfachen" von $\mathbf{1}$, d. h. die Folgen $a.\mathbf{1} = (a, a, \ldots, a, \ldots)$ mit lauter gleichen Glieder, sind Fundamentalfolgen, da sie mit sämtlichen ihrer Teilfolgen identisch sind. Daher sind auch die *konvergenten Folgen*, d. h. die Folgen, die einem skalaren Vielfachen von $\mathbf{1}$ kongruent sind modulo $\mathfrak{n}$, Fundamentalfolgen. Ist eine konvergente Folge $\mathbf{c}$ kongruent der Folge $a.\mathbf{1}$ modulo $\mathfrak{n}$, so nennen wir das (offenbar eindeutig bestimmte) Element a von K den *Limes* der Folge $\mathbf{c}$. Offenbar ist eine Folge, die einem konvergenten Folge kongruent modulo $\mathfrak{n}$ ist, ebenfalls konvergent und sie besitzt denselben Limes.

Ist ein Element $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$ von $\mathfrak{c}$ ein Nullteiler in $\mathfrak{f}$, d. h., ist $c_k = 0$ für ein k, so ist $\mathbf{c}$ ein Nullteiler auch in $\mathfrak{c}$; es ist ja $\mathbf{c}\mathbf{i}_k = \mathbf{0}$ und offenbar $\mathbf{i}_k \in \mathfrak{c}$. Außer den Nullteilern besitzen auch die Nullfolgen kein Inverses in $\mathfrak{c}$, da ja sie kein Inverses in $\mathfrak{b}$ besitzen. Dagegen *ist jede Fundamentalfolge* $\mathbf{c}$, *die keine Nullfolge ist und* 0 *nicht als Glied enthält, eine Einheit in* $\mathfrak{c}$. In der Tat kann dann keine Teilfolge $\mathbf{c}^{\Phi}$ von $\mathbf{c}$ eine Nullfolge sein, da sonst $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}^{\Phi} \equiv \mathbf{0}$ wäre. Also besitzt $\mathbf{c}$ ein Inverses $\mathbf{1}/\mathbf{c}$ in $\mathfrak{b}$. Sogar gehört $\mathbf{1}/\mathbf{c}$ zu $\mathfrak{c}$, d. h. sie ist eine Fundamentalfolge. In der Tat folgt für eine beliebige Indexfolge Φ aus $\mathbf{c}^{\Phi} \equiv \mathbf{c}$ durch Multiplikation mit der wegen $\mathbf{1}/\mathbf{c} \in \mathfrak{b}$ und $\mathbf{1}/\mathbf{c}^{\Phi} = (\mathbf{1}/\mathbf{c})^{\Phi} \in \mathfrak{b}$ beschränkten Folge $\mathbf{1}/\mathbf{c}\mathbf{c}^{\Phi}$ die Kongruenz $\mathbf{1}/\mathbf{c} \equiv \mathbf{1}/\mathbf{c}^{\Phi} = (\mathbf{1}/\mathbf{c})^{\Phi}$.

7. Betrachten wir nun den Restklassering[13]) $\mathfrak{c}/\mathfrak{n} = \Omega$ von $\mathfrak{c}$ nach dem Ideal $\mathfrak{n}$. Wir zeigen, daß *Ω ein Körper ist.*

---

[12]) Man sieht leicht, daß man diese Bedingung entbehren kann, da sie aus $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}^{\Phi}$ (für jede Indexfolge) folgt; vgl. a. a. O. [1]).

[13]) Die Betrachtung des Restklassenringes $\mathfrak{c}/\mathfrak{n}$ kann man heuristisch wie folgt motivieren. Man sucht naturgemäß den Erweiterungskörper Ω von K (z. B. den Körper der reellen Zahlen, falls K der Körper der rationalen Zahlen ist) durch Hinzunahme der Limites gewisser (möglichst vieler) Folgen als neuen Elemente zu erhalten. Solange man aber noch keine Subtraktion, Anordnung und keinen Betrag für die neuen Elemente definiert hat, kann

In der Tat, es sei α ein vom Nullelement o von Ω verschiedenes Element von Ω, d. h. eine von $\mathfrak{n}$ verschiedene Restklasse von Fundamentalfolgen. Man hat zu zeigen, daß α ein Inverses in Ω besitzt. Es sei $\mathbf{a}$ ein beliebiges Element von α und $\mathbf{a}^{\Phi}$ die aus $\mathbf{a}$ durch Weglassen der etwaigen Glieder gleich 0 entstehende Teilfolge von $\mathbf{a}$. (Offenbar enthält $\mathbf{a}$ unendlichviele von 0 verschiedene Glieder, sonst wäre ja $\mathbf{a}$ eine Nullfolge.) Dann besitzt $\mathbf{a}^{\Phi}$ nach Obigem ein Inverses $1/\mathbf{a}^{\Phi}$ in $\mathfrak{c}$. Gehört $1/\mathbf{a}^{\Phi}$ der Restklasse $\beta \in \Omega$ an, so folgt aus $\mathbf{a}^{\Phi}.(1/\mathbf{a}^{\Phi}) = 1$ wegen $\mathbf{a}^{\Phi} \equiv \mathbf{a}$, also $\mathbf{a}^{\Phi} \in \alpha$, die Gleichung $\alpha\beta = \varepsilon$, wobei ε das Einselement von Ω bezeichnet; d. h, α besitzt ein Inverses β. Also ist Ω wirklich ein Körper[14]).

8. Um Ω zu einem angeordneten Körper zu machen, nennen wir zunächst eine Folge $\mathbf{a}$ *positiv*, falls sie keine Nullfolge ist und jedes ihrer Glieder positiv ist. Offenbar *ist die Summe zweier positiver Folgen wiederum positiv;* für das Produkt gilt dagegen das gleiche nicht, da es auch eine Nullfolge sein kann. Ferner nennen wir ein Element von Ω *positiv*, falls sie eine positive Folge enthält. Aus dieser Definition folgt unmittelbar, das o nicht positiv ist, da seine Elemente lauter Nullfolgen sind.

Ist α ein von o verschiedenes Element von Ω, so ist entweder α, oder $-\alpha$

---

man von der Beziehung des Limes einer Folge zu den Gliedern der Folge nichts mehr als folgendes behaupten. (1) Ein Element a von K ist dann und nur dann der Limes einer Folge $\mathbf{a}$, falls $\mathbf{a} - a.1$ eine Nullfolge ist. (2) Falls eine Folge $\mathbf{a}$ einen Limes besitzt, so besitzt jede Teilfolge von $\mathbf{a}$ denselben Limes. (3) Zwei Folgen besitzen dann und nur dann denselben Limes, falls ihre Differenz eine Nullfolge ist. (4) Eine Folge besitzt nur dann keinen Limes, falls die Existenz ihrer Limes den Behauptungen (1)—(3) widerspricht. D. h. man hat vorläufig einen *undefinierten* Limesbegriff, der durch die *Axiome* (1) (4) charakterisiert wird. Es gilt also ein *Modell* für das Axiomensystem (1)—(4) zu bilden. Nun folgt aus (2) - (4) offenbar, daß eine Folge dann und nur dann einen Limes besitzt, falls sie eine Fundamentalfolge ist; und zwei Fundamentalfolgen besitzen dann und nur dann denselben Limes, falls sie kongruent modulo $\mathfrak{n}$ sind; und umgekehrt, aus diesen Sätzen folgen (2), (3) und (4). Also wird ein Modell für das genannte Axiomensystem geliefert, falls man unter Limes einer Fundamentalfolge die Menge der ihr kongruenten Fundamentalfolgen modulo $\mathfrak{n}$ versteht (und nachträglich diese Menge im Fall eines in K vorhandenen Limes a mit a indentifiziert), ebenso, wie z. B. die Menge der einer Gerade parallelen Geraden ein Modell für den Begriff der Richtung der Gerade liefert, falls von diesem Begriff nichts mehr gefordert wird, als daß er für parallele Geraden gleich, für nichtparallele Geraden aber verschieden ausfalle.

[14]) Daher *ist $\mathfrak{n}$ ein teilerloses (maximales) Ideal in* $\mathfrak{c}$. Man kann den Beweis dieses Satzes (woraus, wie bekannt, wiederum die Körpereigenschaft des Restklassenringes $\mathfrak{c}/\mathfrak{n}$ folgt) auch folgendermaßen formulieren. Es sei $\mathfrak{i}$ ein Ideal, das ein echter Teiler von $\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{c}$ ist und es sei $\mathbf{a}$ ein nicht zu $\mathfrak{n}$ gehöriges Element von $\mathfrak{i}$. Es sei $\mathbf{a}^{\Phi}$ die aus $\mathbf{a}$ durch Weglassen der etwaigen Glieder gleich 0 entstehende Teilfolge von $\mathbf{a}$. Wegen $\mathbf{a} \in \mathfrak{i}$, also $\mathbf{a} \in \mathfrak{c}$ gilt $\mathbf{a}^{\Phi} \equiv \mathbf{a} \bmod \mathfrak{n}$, also auch $\mathbf{a}^{\Phi} \equiv \mathbf{a} \equiv \mathbf{0} \bmod \mathfrak{i}$, d. h. $\mathbf{a}^{\Phi} \in \mathfrak{i}$. Andererseits gilt $\mathbf{a}^{\Phi} \in \mathfrak{c}$ und $\mathbf{a}^{\Phi} \bar{\in} \mathfrak{n}$, da sonst auch $\mathbf{a} \in \mathfrak{n}$ gälte. Also besitzt $\mathbf{a}^{\Phi}$ einen Inversen $1/\mathbf{a}^{\Phi}$ in $\mathfrak{c}$; aus $\mathbf{a}^{\Phi} \in \mathfrak{i}$ und $1/\mathbf{a}^{\Phi} \in \mathfrak{c}$ folgt aber $\mathbf{1} = \mathbf{a}^{\Phi}.(1/\mathbf{a}^{\Phi}) \in \mathfrak{i}$ und hieraus weiter, für jedes $\mathbf{b} \in \mathfrak{c}$, $\mathbf{b} = \mathbf{1}.\mathbf{b} \in \mathfrak{i}$, da $\mathfrak{i}$ ein Ideal in $\mathfrak{c}$ ist; also ist $\mathfrak{i} = \mathfrak{c}$.

positiv. In der Tat, es sei $\mathbf{a}$ eine beliebige Folge aus der Restklasse α und $\mathbf{a}^{\Phi}$ die durch Weglassen der etwaigen Glieder gleich 0 entstehende Teilfolge von $\mathbf{a}$. Dann besitzt $\mathbf{a}^{\Phi}$ entweder unendlich viele positive, oder unendlich viele negative Glieder, d. h. $\mathbf{a}^{\Phi}$ besitzt eine Teilfolge $(\mathbf{a}^{\Phi})^{\Psi} = \mathbf{a}^{\Phi\Psi}$ entweder mit lauter positiven, oder mit lauter negativen Gliedern. Wie bemerkt, ist $\mathbf{a}^{\Phi\Psi}$ keine Nullfolge; also ist entweder $\mathbf{a}^{\Phi\Psi}$ oder $-\mathbf{a}^{\Phi\Psi}$ eine positive Folge. Im ersten Fall ist nun α, im zweiten Fall aber $-\alpha$ positiv.

Die Summe und das Produkt zweier positiven Elementen α und β von Ω ist wiederum positiv. In der Tat, sind $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ positive Folgen aus den Restklassen α bzw. β, so ist $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ eine positive Folge aus $\alpha+\beta$. Auch die Folge $\mathbf{ab}$, die der Restklasse $\alpha\beta$ angehört, ist positiv. In der Tat, sie besteht aus lauter positiven Gliedern; andererseits kann sie keine Nullfolge sein, sonst wäre ja $\alpha\beta = o$, also, da Ω ein Körper ist, entweder $\alpha = o$, oder $\beta = o$, entgegen der Voraussetzung, daß α und β positiv sind.

Ist α ein beliebiges Element von Ω, so können α und $-\alpha$ nicht beide positiv sein. Sonst wäre nämlich auch $\alpha+(-\alpha) = o$ positiv.

Also *ist Ω ein angeordneter Körper.* Und zwar ist er *archimedisch angeordnet.* In der Tat, es sei α ein beliebiges Element von Ω und $\mathbf{a}$ eine Folge aus der Restklasse α. Dann ist $\mathbf{a}$ als Fundamentalfolge beschränkt, d. h. es gilt, für eine geeignete positive ganze Zahl l, $a_n \leqq |a_n| < l$ für jedes n. Dann ist aber $l+1-a_n > 1 > 0$, also ist $(l+1).\mathbf{1}-\mathbf{a}$ eine positive Folge; daher ist $(l+1).\varepsilon-\alpha$ ein positives Element von Ω, d. h. es gilt, bei der üblichen Definition des Zeichens $<$, $\alpha < (l+1).\varepsilon$.

Eine Folge $\mathbf{a}$, die zu einem positiven Element α von Ω zugehört, kann höchstens endlich viele nichtpositive Glieder enthalten; d. h. es gibt eine nichtnegative ganze Zahl n_0, so daß $a_n > 0$ für $n > n_0$. Sonst gäbe es nämlich eine Teilfolge $\mathbf{a}^{\Phi}$ von $\mathbf{a}$ mit lauter nichtpositiven Elementen; andererseis enthält α auch eine positive Folge $\mathbf{b}$. Wegen $\mathbf{a} \in \alpha$ und $\mathbf{b} \in \alpha$ gilt $\mathbf{b} \equiv \mathbf{a} \equiv \mathbf{a}^{\Phi}$, d. h. $\mathbf{b}-\mathbf{a}^{\Phi}$ ist eine Nullfolge. Dann wäre aber auch $\mathbf{b}$ eine Nullfolge, da jedes Glied von $\mathbf{b}$ positiv und nicht größer ist als das entspechende Glied von $\mathbf{b}-\mathbf{a}^{\Phi}$.

9. Wir nennen eine Restklasse $\alpha \in \Omega$ *konvergent,* falls sie eine konvergente Folge enthält; offenbar sind dann alle ihre Elemente konvergente Folgen mit gleichem Limes. Ordnen wir jedem Element a von K die aus den konvergenten Folgen mit dem Limes a bestehende Restklasse α zu, so *erhalten wir* offenbar *eine isomorphe Abbildung von K auf die aus den konvergenten Restklassen bestehende Teilmenge* (also Teilkörper) K' *von Ω Die Anordnung bleibt bei dieser Abbildung erhalten,* da einem positiven Element von K offenbar ein positives Element von K' entspricht. Ersetzt man also die Elemente von K' durch die entsprechenden Elementen von K, so entsteht aus Ω ein *archi-*

medisch angeordneter Erweiterungskörper von K, den wir ebenfalls mit Ω bezeichnen[15]).

10. Nun haben wir noch zu zeigen, daß Ω *kompakt* ist. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß sämtliche, oben für einen *beliebigen* archimedisch angeordneten Körper K definierte Begriffe und bewiesene Sätze ohne weiteres auch für Ω anwendbar sind[16]). Insbesondere bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}$ den Ring der unendlichen Folgen, mit $\mathfrak{N}$ den Ring der Nullfolgen, mit $\mathfrak{B}$ den Ring der beschränkten Folgen und mit $\mathfrak{C}$ den Ring der Fundamentalfolgen aus Elementen von Ω. Offenbar ist $\mathfrak{f}$ ein Unterring von $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{n}$ ein Unterring von $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{b}$ ein Unterring von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{c}$ ein Unterring von $\mathfrak{C}$ und es ist z. B. $\mathfrak{n}$ der Durchschnitt von $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{N}$. Wir haben zu zeigen, daß *jedes Element von* $\mathfrak{C}$ *eine konvergente Folge in* Ω *ist*, d. h. mit einem skalaren Vielfachen $\alpha \cdot \mathbf{1} = (\alpha, \alpha, \ldots, \alpha, \ldots)$, wobei $\alpha \in \Omega$, des gemeinsamen Einselementes $\mathbf{1}$ von $\mathfrak{f}, \mathfrak{F}, \mathfrak{b}\ \mathfrak{B}, \mathfrak{c}, \mathfrak{C}$ kongruent modulo $\mathfrak{N}$ ist[17]).

Zunächst zeigen wir dies für die Elemente $\mathbf{c}$ von $\mathfrak{c}$. Es gehöre $\mathbf{c}$ der Restklasse $\gamma \in \Omega$ an. Wir zeigen, daß die Folge $\mathbf{c}$ den Limes γ besitzt. Im Falle $\gamma \in \mathsf{K}$ (d. h. eigentlich $\gamma \in \mathsf{K}'$) ist nichts zu beweisen; sonst enthält nicht die Folge $\mathbf{c} - \gamma \cdot \mathbf{1} = (c_1 - \gamma, c_2 - \gamma, \ldots, c_n - \gamma, \ldots)$ 0 als Glied und gehört wegen $\mathbf{c} \in \mathfrak{c} \subset \mathfrak{C}$ und $\gamma \cdot \mathbf{1} \in \mathfrak{C}$ dem Ring $\mathfrak{C}$ an. Wäre sie keine Nullfolge, so besäße sie ein Inverses in $\mathfrak{B}$ (ja sogar in $\mathfrak{C}$); d. h. es gäbe eine positive ganze Zahl l mit $|1/(c_m - \gamma)| < l$, also $|c_m - \gamma| > 1/l$ für jede positive ganze Zahl m. Dann wäre aber entweder $c_m - \gamma > 1/l$, oder $\gamma - c_m > 1/l$, also wäre entweder $(c_m - 1/l) - \gamma$ oder $\gamma - (c_m + 1/l)$ positiv. Nun gehört aber die Folge $(c_m - 1/l) \cdot \mathbf{1} - \mathbf{c}$ dem Element $(c_m - 1/l) - \gamma$, die Folge $\mathbf{c} - (c_m + 1/l) \cdot \mathbf{1}$ dem Element $\gamma - (c_m - 1/l)$ von Ω an; also gibt es nach obigem zu jedem positiven ganzen Zahl m eine nichtnegative ganze Zahl n_m, so daß entweder $(c_m - 1/l) - c_n > 0$ oder $c_n - (c_m + 1/l) > 0$, also jedenfalls $|c_m - c_n| > 1/l$ für $n > n_m$. Es sei $k_1 = n_1 + 1$ und, falls k_{m-1} schon bekannt ist, $k_m = \max(k_{m-1}, n_m) + 1$. Dann ist $k_m > k_{m-1}$ und $k_m > n_m$, also $|c_m - c_{k_m}| > 1/l$ für jede positive ganze Zahl m; also wäre für die Indexfolge $\Phi = (k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots)$ $\mathbf{c} - \mathbf{c}^{\Phi}$ keine Nullfolge, entgegen $\mathbf{c} \in \mathfrak{c}$. Also ist $\mathbf{c} - \gamma \cdot \mathbf{1}$ eine Nullfolge, γ der Limes der Folge $\mathbf{c}$.

Hieraus folgt, daß *es zu jedem* $\gamma \in \Omega$ *und jeder positiven ganzen Zahl* l *ein Element* c *von* K *mit* $|c - \gamma| < 1/l$ *gibt*. Ist nämlich $\mathbf{c}$ eine Folge aus der Restklasse γ, so haben wir bewiesen, daß $\mathbf{c} - \gamma \cdot \mathbf{1}$ eine Nullfolge ist, so

---

15) Mit Ω wird bald der Restklassenkörper $\mathfrak{c}/\mathfrak{n}$, bald dieser Erweiterungskörper bezeichnet; doch besteht es keine Gefahr eines Mißverständnisses.

16) Im Falle relativer Begriffe (wie z. B. Konvergenz) wird überall, wo es nötig scheint, hervorgehoben werden, ob es um einen Begriff in bezug auf K oder auf Ω handelt (z. B. Konvergenz in K, in Ω).

17) Hieraus ergibt sich die übliche Form des Cauchyschen Konvergenzsatzes, wie a. a. O. [1]).

daß sie ein Glied $c_n - \gamma$ mit $|c_n - \gamma| < 1/l$ enthält. Daraus Folgt weiter, daß *jede Folge* $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ *aus* $\mathfrak{F}$ *einer Folge* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ *aus* $\mathfrak{f}$ *kongruent modulo* $\mathfrak{N}$ *ist.* In der Tat, wählt man $a_n \in K$ für jede positive ganze Zahl n so, daß $|a_n - \alpha_n| < 1/n$, so ist $\mathbf{a} - \mathbf{A}$ eine Nullfolge.

Ist nun $\mathbf{C}$ eine Fundamentalfolge aus $\mathfrak{C}$ und $\mathbf{c}$ eine Folge aus $\mathfrak{f}$ mit $\mathbf{C} \equiv \mathbf{c} \bmod \mathfrak{N}$, so gilt für jede Indexfolge Φ auch $\mathbf{C}^\Phi \equiv \mathbf{c}^\Phi \bmod \mathfrak{N}$ (da $\mathfrak{N}$ ein zulässiger Unterring von $\mathfrak{F}$ ist), also gilt, wegen $\mathbf{C} \equiv \mathbf{C}^\Phi \bmod \mathfrak{N}$, auch $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}^\Phi \bmod \mathfrak{N}$, daher auch $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}^\Phi \bmod \mathfrak{n}$, da $\mathbf{c} - \mathbf{c}^\Phi$ einerseits $\mathfrak{f}$, andererseits $\mathfrak{N}$, also auch $\mathfrak{n}$ angehört. Also ist $\mathbf{c}$ eine Fundamentalfolge, daher konvergent in Ω; demnach ist auch die Folge $\mathbf{C}$ konvergent in Ω, da sie einer konvergenten Folge $\mathbf{c}$ kongruent modulo $\mathfrak{N}$ ist.

11. Natürlich ist die Konstruktion von Ω aus K im allgemeinen keine rein algebraische, da sie (bereits in der Voraussetzung über K und in der Zielsetzung für Ω) außer rein algebraischen (d. h. auf Addition und Multiplikation mit Hilfe von mengentheoretisch-logischen Operationen zurückführbaren) Begriffen auch mit der Begriff der Anordnung operiert[18]). Im Spezialfall jedoch, wo K der Körper der rationalen Zahlen (d. h. der Primkörper der Charakteristik 0) ist, kann man nach einer mündlichen Mitteilung von T. SZELE die (gewöhnliche) Anordnung rein algebraisch charakterisieren: *die positiven rationalen Zahlen bilden* nämlich *die einzige gegenüber den Addition abgeschlossene Untergruppe der Multiplikationsgruppe der rationalen Zahlen.* In diesem Spezialfall läßt sich also die obige (und auch die ursprüngliche van der Waerdensche) Konstruktion von Ω (die dann zum Körper der reellen Zahlen führt) als eine rein algebraische betrachten. Also ist der Begriff der reellen (und daher auch der komplexen) Zahl ein rein algebraischer; insbesondere ist der Fundamentalsatz der Algebra ein algebraischer (wenn auch in der modernen Algebra kein fundamentaler) Satz.

(Eingegangen am 8. Dezember 1949.)

[18]) Man findet oft die Auffassung, daß die Anordnung ein rein algebraischer Begriff ist, da sie durch Axiome charakterisiert wird (ebenso, wie der Begriff der Addition und Multiplikation). Mit dem gleichen Recht könnte man dann aber auch z. B. den Umgebungsbegriff als einen rein algebraischen Begriff erlauben, da er durch die Hausdorffschen Axiome charakterisiert wird; also sollte man auch die Topologie (und ähnlicherweise jedes axiomatisierte Gebiet der Mathematik) als reine Algebra betrachten.