

Über die mittlere Anzahl der Produktdarstellungen der Zahlen.

(Erste Mitteilung.)

Von LÁSZLÓ KALMÁR in Szeged.

Einleitung.

1. In einer in ungarischer Sprache verfassten Arbeit¹⁾ habe ich den asymptotischen Verlauf derjenigen zahlentheoretischen Funktion $f(n)$ untersucht, welche als die Anzahl der Darstellungen von n als Produkt von ganzen Zahlen > 1 definiert ist, wobei die Anzahl (≥ 0) der Faktoren nicht vorgeschrieben²⁾ — und zwei Darstellungen gelten dann und nur dann nicht als verschieden, falls die Faktoren auch in der Reihenfolge übereinstimmen. Da der Verlauf von $f(n)$ ziemlich unregelmässig ist ($f(n)$ kann ja einerseits beliebig grosse Werte annehmen, andererseits ist aber immer wieder $f(n) = 1$, nämlich wenn n eine Primzahl ist), so ist es angemessen, den Mittelwert

$$\frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{n}$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, die summatorische Funktion

$$F(n) = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$$

¹⁾ L. KALMÁR, A „factorisatio numerorum“ problémájáról, erscheint demnächst in den *Matematikai és Fizikai Lapok*.

²⁾ Die Untersuchung der analog definierten zahlentheoretischen Funktion, wobei aber die Anzahl der Faktoren vorgeschrieben ist und auch Eins als Faktor zugelassen wird, bildet den Gegenstand des sogenannten PILTZschen Teilerproblems. Dieses Problem ist als das multiplikative Analogon des additiv-zahlentheoretischen Problems der Partitionen in eine gegebene Anzahl von Summanden aufzufassen; in gleicher Weise kann man die Untersuchung der oben definierten Funktion $f(n)$ als das multiplikative Analogon des Problems der unbeschränkten Partitionen auffassen.

hinsichtlich ihres asymptotischen Verlaufes zu untersuchen. In meiner erwähnten Arbeit bewies ich, dass für $n \rightarrow \infty$

$$(1) \quad F(n) \sim \frac{n^{\varrho}}{\varrho R}$$

gilt, wobei ϱ die einzige positive Wurzel³⁾ der Gleichung $\zeta(\varrho) = 2$ bedeutet und $R = -\zeta'(\varrho)$ ist.

2. In der vorliegenden Arbeit beschäftige ich mich mit der oberen Abschätzung des Restgliedes

$$(2) \quad F(n) - \frac{n^{\varrho}}{\varrho R}$$

der asymptotischen Formel (1); und zwar werde ich beweisen, dass für $n \rightarrow \infty$ die Abschätzung

$$(3) \quad F(n) = \frac{n^{\varrho}}{\varrho R} + O(n^{\varrho} (\log n)^{-\alpha \log \log \log n})$$

gilt, wobei α jede Zahl $< \frac{1}{2(\varrho-1)\log 2}$ bedeuten kann.

3. Zu der zahlentheoretischen Funktion $f(n)$ gehört die erzeugende DIRICHLETSche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{f(1)}{1^s} + \frac{f(2)}{2^s} + \dots + \frac{f(n)}{n^s} + \dots; \quad (s = \sigma + ti)$$

dieselbe konvergiert für $\sigma > \varrho$ und stellt die Funktion

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{1}{2 - \zeta(s)}$$

dar. In der Tat, es ist für $\sigma > \varrho$

$$|\zeta(s) - 1| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right| < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\varrho}} = \zeta(\varrho) - 1 = 1,$$

³⁾ Wegen $\zeta(s) \rightarrow \infty, 1$ für $s \rightarrow 1, \infty$ (und $\zeta(s) < 0$ für $0 < s < 1$) gibt es in der Tat eine und nur eine Wurzel ϱ . ($\zeta(s)$ ist hier die RIEMANNSche Zetafunktion.) Wegen

$$\zeta(2) = \pi^2/6 < 2$$

ist $1 < \varrho < 2$; wegen

$$\zeta(1,7) = 2,05428\ 87563 \dots$$

und

$$\zeta(1,8) = 1,88222\ 96181 \dots$$

(vgl. J. P. GRAM, Tafeln für die RIEMANNSche Zetafunktion, *Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifer, naturv. og mat. Afdeling*, (VIII) 10 (1926), S. 313–325) ist genauer

$$1,7 < \varrho < 1,8.$$

also

$$\frac{1}{2 - \zeta(s)} = \frac{1}{1 - (\zeta(s) - 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (\zeta(s) - 1)^k;$$

hier ist

$$(\zeta(s) - 1)^k = \sum_{n_1=2}^{\infty} \sum_{n_2=2}^{\infty} \dots \sum_{n_k=2}^{\infty} \frac{1}{(n_1 n_2 \dots n_k)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_k(n)}{n^s},$$

wobei $f_k(n)$ die Anzahl der Darstellungen von n in der Form eines Produktes

$$n = n_1 n_2 \dots n_k$$

von k Faktoren mit $n_1 \geq 2, n_2 \geq 2, \dots, n_k \geq 2$ bedeutet, mit Berücksichtigung der Reihenfolge der Faktoren. (Dies gilt auch für $k=0$, falls man unter einem Produkt mit keinem Faktor, wie üblich, Eins versteht, da dieser Verabredung gemäss $f_0(1) = 1$ und sonst $f_0(n) = 0$ ist.) Wegen

$$f(n) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(n)$$

gilt also (4).

4. Hiernach steht die obere Abschätzung des Restgliedes (2) mit der oberen Abschätzung der erzeugenden Funktion (4) auf der Gerade $\sigma = \rho$ in Zusammenhang. Diese Abschätzung führe ich in I. mittels Anwendung der WEYLSchen Abschätzungsmethode durch; in II. werde ich sodann (3) mit den üblichen Methoden der analytischen Zahlentheorie (mittels Anwendung des CAUCHYSchen Integralsatzes)⁴⁾ beweisen.

Eine zweite Mitteilung soll die untere (Ω -) Abschätzung des Restgliedes (2) enthalten. Dabei wird bei der unteren Abschätzung von (4) diejenige Methode (Anwendung der Theorie der diophantischen Approximationen) zur Verwendung kommen, welche

⁴⁾ Ich könnte auch die elementarere Methode meiner Arbeit: Über die Abschätzung der Koeffizientensumme DIRICHLETScher Reihen, *diese Acta*, 4 (1928–29), S. 155–181 anwenden; die hierzu nötige Wahl der Hilfsfunktion $P(x)$ ist

$$P(x) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-e^{\gamma m}}$$

mit einer geeigneten Konstanten γ , welche beliebig nahe an $(\rho - 1) \log 2$ liegen kann.

von Herrn BOHR zur Untersuchung des Wertevorrats DIRICHLETScher Reihen mehrmals herangezogen wurde.⁵⁾

1. O-Abschätzung der erzeugenden Funktion (4).

5. Statt die Funktion (4) nach oben, d. h. $|2 - \zeta(s)|$ nach unten auf der Gerade $\sigma = \rho$ abzuschätzen, werde ich allgemeiner $|\zeta(\sigma) - \zeta(s)|$ für $\sigma > 1$, $s = \sigma + ti$ nach unten abschätzen. Ich behaupte nämlich, dass für $\sigma > 1$, $t \geq 3$ die Ungleichung

$$(5) \quad |\zeta(\sigma) - \zeta(s)| \geq c_1 t^{-\alpha_1 \frac{\sigma-1}{\log \log t}}$$

gilt, wobei α_1 irgendeine Zahl $> \log 2$ bedeutet kann und c_1 eine höchstens von σ und α_1 abhängige positive Zahl bezeichnet. Die Ungleichung (5), sowie die Ungleichung

$$(6) \quad |\zeta(s)| \leq \zeta(\sigma) - c_1 t^{-\alpha_1 \frac{\sigma-1}{\log \log t}}$$

(für $\sigma > 1$, $t \geq 3$), von der (5) eine unmittelbare Konsequenz ist, sind vielleicht auch an sich nicht ohne Interesse.

6. Im folgenden sollen c_2, \dots, c_8 positive Zahlen bezeichnen, welche höchstens von σ und von den mit α_2, α_3 und α_4 zu bezeichnenden Zahlen abhängen.

Die WEYLSche Abschätzungsmethode ergibt bekanntlich⁶⁾ für ganzes $N \geq 1$, $N \leq N' < 2N$, ganzes $k \geq 1$, $K = 2^{k-1}$, $t \geq 3$

$$\left| \sum_{n=N}^{N'} n^{ti} \right| \leq c_2 N \left(N^{-\frac{1}{K}} t^{\frac{1}{K(k+1)}} + t^{-\frac{1}{K(k+1)}} (\log N)^{\frac{k-1}{K}} \right) (\log t)^{\frac{1}{K}};$$

also ist für $N \leq t$ wegen $1 \leq \log t$, $\log N \leq \log t$, $k \leq K$ umso mehr

$$\left| \sum_{n=N}^{N'} n^{ti} \right| \leq c_2 N \left(N^{-\frac{1}{K}} t^{\frac{1}{K(k+1)}} + t^{-\frac{1}{K(k+1)}} \right) \log t.$$

Durch partielle Summation folgt hieraus (wegen $|\sum n^{-ti}| = |\sum n^{ti}|$)

⁵⁾ Vgl. z. B. H. BOHR, Über das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$, *Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse*, 1911, S. 409–428.

⁶⁾ Vgl. E. LANDAU, Über die ζ -Funktion und die L -Funktionen, *Math. Zeitschrift*, 20 (1924), S. 103–125, Hilfssatz 6, oder E. LANDAU, *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Leipzig 1927), Bd. 2., S. 32. Aus Stetigkeitsgründen darf man natürlich den dortigen $w > 0$ durch 0 ersetzen und $t \geq 3$ statt $t > 3$ fordern.

für $\sigma \geq 0$

$$\left| \sum_{n=N}^{N'} n^{-s} \right| \leq c_1 N^{1-\sigma} \left(N^{-\frac{1}{K}} t^{\frac{1}{K(k+1)}} + t^{-\frac{1}{K(k+1)}} \right) \log t.$$

Es sei nun $1 < \alpha_2 < 2$, sonst beliebig; dann ergibt sich hieraus

für $\sigma > 1$ und $t^{\frac{\alpha_2}{k+1}} < N \leq t$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^{N'} n^{-s} \right| &\leq c_2 t^{-\alpha_2 \frac{\sigma-1}{k+1}} \left(t^{-\frac{\alpha_2-1}{K(k+1)}} + t^{-\frac{1}{K(k+1)}} \right) \log t \leq \\ &\leq 2c_2 t^{-\alpha_2 \frac{\sigma-1}{k+1} - \frac{\alpha_2-1}{K(k+1)}} \log t. \end{aligned}$$

Es sei hier $N = \left[t^{\frac{\alpha_2}{k+1}} + 1 \right]$, $2 \left[t^{\frac{\alpha_2}{k+1}} + 1 \right], \dots, 2^{\nu} \left[t^{\frac{\alpha_2}{k+1}} + 1 \right]$ mit $2^{\nu} \left[t^{\frac{\alpha_2}{k+1}} + 1 \right] < [t] \leq 2^{\nu+1} \left[t^{\frac{\alpha_2}{k+1}} + 1 \right]$; ferner wählen wir stets $N' = 2N + 1$, mit Ausnahme des letzten Wertes (d. h. $2^{\nu} \left[t^{\frac{\alpha_2}{k+1}} + 1 \right]$) von N ; in diesem Falle sei $N' = [t] - 1$. Wegen

$$2^{\nu} < t, \nu < \frac{\log t}{\log 2}$$

ergibt sich durch Addition⁷⁾

$$(7) \quad \left| \sum_{n=t^{\frac{\alpha_2}{k+1}}+1}^{t-1} n^{-s} \right| \leq c_3 t^{-\alpha_2 \frac{\sigma-1}{k+1} - \frac{\alpha_2-1}{K(k+1)}} (\log t)^2.$$

7. Nach (7) ist für $\sigma > 1$, $t \geq 3$

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &\leq \left| \sum_{n=1}^{t^{\frac{\alpha_2}{k+1}}} n^{-s} \right| + \left| \sum_{n=t^{\frac{\alpha_2}{k+1}}+1}^{t-1} n^{-s} \right| + \left| \sum_{n=t}^{\infty} n^{-s} \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{t^{\frac{\alpha_2}{k+1}}} n^{-\sigma} + c_3 t^{-\alpha_2 \frac{\sigma-1}{k+1} - \frac{\alpha_2-1}{K(k+1)}} (\log t)^2 + \sum_{n=t}^{\infty} n^{-\sigma} = \\ (8) \quad &= \zeta(\sigma) - \sum_{n=t^{\frac{\alpha_2}{k+1}}+1}^{t-1} n^{-\sigma} + c_3 t^{-\alpha_2 \frac{\sigma-1}{k+1} - \frac{\alpha_2-1}{K(k+1)}} (\log t)^2. \end{aligned}$$

7) $\sum_{n=u}^v$ bedeutet $\sum_{n=[u]}^{[v]}$.

Hier ist, da $n^{-\sigma}$ als Funktion von n abnehmend ist,

$$\begin{aligned} \sum_{n=t^{\frac{\alpha_2}{k+1}}+1}^{t-1} n^{-\sigma} &\geq \int_{t^{\frac{\alpha_2}{k+1}}+1}^{t-1} u^{-\sigma} du = \frac{\left(t^{\frac{\alpha_2}{k+1}}+1\right)^{-(\sigma-1)} - (t-1)^{-(\sigma-1)}}{\sigma-1} \geq \\ &\geq \frac{\left(2t^{\frac{\alpha_2}{k+1}}\right)^{-(\sigma-1)} - \left(\frac{2}{3}t\right)^{-(\sigma-1)}}{\sigma-1}. \end{aligned}$$

Nun ist aber für $t \geq c_4 (\geq 3)$

$$\frac{2}{3}t \geq 3t^{\frac{\alpha_2}{2}} \geq 3t^{\frac{\alpha_2}{k+1}},$$

folglich ist dann

$$(9) \quad \sum_{n=t^{\frac{\alpha_2}{k+1}}+1}^{t-1} n^{-\sigma} \geq c_5 t^{-\alpha_2 \frac{\sigma-1}{k+1}}.$$

8. Aus (8) und (9) folgt für $\sigma > 1$, $t \geq c_4$

$$|\zeta(s)| \leq \zeta(\sigma) - c_5 t^{-\alpha_2 \frac{\sigma-1}{k+1}} \left(1 - \frac{c_3}{c_5} t^{-\frac{\alpha_2-1}{K(k+1)}} (\log t)^2\right);$$

ist also

$$(10) \quad t^{-\frac{\alpha_2-1}{K(k+1)}} (\log t)^2 < \frac{c_5}{2c_3},$$

so ist

$$(11) \quad |\zeta(s)| \leq \zeta(\sigma) - \frac{1}{2} c_5 t^{-\alpha_2 \frac{\sigma-1}{k+1}}.$$

Es sei nun $\alpha_3 > \log 2$, sonst beliebig; ferner wähle man

$$k = \left\lceil \frac{\log \log t}{\alpha_3} - 1 \right\rceil.$$

Für $t \geq c_6 (\geq c_4)$ ist dann $k \geq 1$; ferner ist

$$k+1 \leq \frac{\log \log t}{\alpha_3}, \quad K = \frac{1}{4} 2^{k+1} \leq \frac{1}{4} (\log t)^{\frac{\log 2}{\alpha_3}};$$

also

$$\begin{aligned} t^{-\frac{\alpha_2-1}{K(k+1)}} (\log t)^2 &\leq t^{-\frac{4(\alpha_2-1)\alpha_3}{\log 2}} (\log t)^{\frac{\log 2}{\alpha_3}} \log \log t (\log t)^2 = \\ &= e^{-\frac{4(\alpha_2-1)\alpha_3(\log t)^{1-\frac{\log 2}{\alpha_3}}}{\log \log t} + 2 \log \log t}. \end{aligned}$$

Für $t \rightarrow \infty$ strebt der letzte Ausdruck wegen $\alpha_2 > 1$, $\alpha_3 > \log 2$ gegen Null; also ist (10) für $t \geq c_7$ ($\geq c_6$) erfüllt. Aus (11) folgt nun, wegen

$$k+1 \geq \frac{\log \log t}{\alpha_3} - 1 \geq \frac{\log \log t}{\alpha_4}$$

mit beliebigem $\alpha_4 > \alpha_3$ für $t \geq c_8$ ($\geq c_7$),

$$|\zeta(s)| \leq \zeta(\sigma) - \frac{1}{2} c_5 t^{-\alpha_2 \alpha_1 \frac{\sigma-1}{\log \log t}}.$$

Ist nun $\alpha_1 > \log 2$ gegeben, so kann man $1 < \alpha_2 < 2$, $\alpha_4 > \alpha_3 > \log 2$ so wählen, dass $\alpha_1 = \alpha_2 \alpha_4$ sei; also folgt die Richtigkeit von (6) und (5) zunächst für $\sigma > 1$, $t \geq c_8$ mit $c_1 = 1/2 c_5$; wegen

$$|\zeta(s)| < \zeta(\sigma) \quad \text{für } t \neq 0$$

gilt aber (6) und (5) mit passend gewähltem c_1 auch für $3 \leq t < c_8$.

II. O-Abschätzung des Restgliedes (2).

9. Im folgenden sollen c_9, \dots, c_{21} höchstens von α_3, α_6 und α_7 abhängige (also auch von σ unabhängige) positive Zahlen bedeuten. Nach (5) ist speziell für $\sigma = \varrho$, $t \geq 3$

$$(12) \quad |2 - \zeta(s)| \geq c_9 t^{-\frac{\alpha_5}{\log \log t}}$$

falls α_5 irgendeine Zahl $> (\varrho - 1) \log 2$ bedeutet. Da für $\sigma \geq \frac{\varrho+1}{2}$

$$\begin{aligned} |\zeta(s) - \zeta(\varrho + ti)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} n^{-ti} \left(\frac{1}{n^\sigma} - \frac{1}{n^\varrho} \right) \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^\sigma} - \frac{1}{n^\varrho} \right| = |\zeta(\sigma) - \zeta(\varrho)| \leq c_{10} |\sigma - \varrho| \end{aligned}$$

ist, folgt aus (12) allgemeiner

$$\begin{aligned} |2 - \zeta(s)| &\geq |2 - \zeta(\varrho + ti)| - |\zeta(s) - \zeta(\varrho + ti)| \geq \\ &\geq c_9 t^{-\frac{\alpha_5}{\log \log t}} - c_{10} |\sigma - \varrho| \geq \frac{1}{2} c_9 t^{-\frac{\alpha_5}{\log \log t}} \end{aligned}$$

für

$$(13) \quad |\sigma - \varrho| \leq c_{11} t^{-\frac{\alpha_5}{\log \log t}}, \quad t \geq 3,$$

wenn nur $c_{11} \leq \frac{c_9}{2c_{10}}$ so klein ist, dass für $t \geq 3$

$$c_{11} t^{-\frac{\alpha_5}{\log \log t}} < \frac{\varrho - 1}{2}$$

gilt; denn alsdann folgt aus (13) $\sigma \geq \frac{\varrho+1}{2}$. Für

$$\sigma > \varrho + c_{11} t^{-\frac{\alpha_5}{\log \log t}}$$

ist aber

$$|2 - \zeta(s)| \geq 2 - |\zeta(s)| \geq 2 - \zeta(\sigma) \geq c_{12}(\sigma - \varrho) \geq c_{13} t^{-\frac{\alpha_5}{\log \log t}};$$

daher ergibt sich für

$$(14) \quad \sigma > \varrho - c_{11} t^{-\frac{\alpha_5}{\log \log t}}$$

die Abschätzung

$$(15) \quad |2 - \zeta(s)| \geq c_{14} t^{-\frac{\alpha_5}{\log \log t}};$$

insbesondere ist dortselbst $\zeta(s) \neq 2$.

10. Nach einer bekannten Formel⁸⁾ aus der Theorie der DIRICHLETSCHEN Reihen ist

$$(16) \quad \sum_{n=1}^x f(n) \log \frac{x}{n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^s}{s} \frac{ds}{2-\zeta(s)}.$$

Durch Anwendung des CAUCHYSCHEN Integralsatzes auf das Achteck mit den Eckpunkten $2 \pm \omega i$, $\varrho \pm \omega i$, $\varrho \pm 3i$, $\beta \pm 3i$, wobei $\omega > 3$ ist und $\beta < \varrho$ so zu wählen ist, dass für $\beta \leq \sigma \leq \varrho$, $0 < |t| \leq 3$ $\zeta(s) \neq 2$ sei, ergibt sich⁹⁾

$$\int_{2-\omega i}^{2+\omega i} \frac{x^s}{s^2} \frac{ds}{2-\zeta(s)} = \frac{x^\varrho}{\varrho^2 R} + \left\{ \int_{\varrho-3i}^{\beta-3i} + \int_{\beta-3i}^{\beta+3i} + \int_{\beta+3i}^{\varrho+3i} + \int_{\varrho+3i}^{\varrho-\omega i} + \int_{\varrho-\omega i}^{\varrho+\omega i} + \int_{\varrho+\omega i}^{2+\omega i} + \int_{2+\omega i}^{2-\omega i} \right\} \frac{x^s}{s^2} \frac{ds}{2-\zeta(s)},$$

da innerhalb jenes Achteckes der Integrand bis auf den Pol erster Ordnung $s = \varrho$ mit dem Residuum

$$\lim_{s \rightarrow \varrho} \frac{x^s}{s^2} \frac{s-\varrho}{2-\zeta(s)} = -\frac{x^\varrho}{\varrho^2} \lim_{s \rightarrow \varrho} \frac{s-\varrho}{\zeta(s)-\zeta(\varrho)} = -\frac{x^\varrho}{\varrho^2} \frac{1}{\zeta'(\varrho)} = \frac{x^\varrho}{\varrho^2 R}$$

regulär ist.

⁸⁾ Vgl. z. B. E. LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Leipzig und Berlin 1909), S. 268.

⁹⁾ Die komplexen Integrale sind überall, wenn nicht anders angegeben, geradlinig. Der Integrand ist bei den sieben Integralen auf der rechten Seite derselbe, dgl. später bei ähnlichen Abkürzungen.

Hierbei sind die drei ersten Integrale auf der rechten Seite von ω unabhängig; für die beiden letzten gilt aber bei $\omega \rightarrow \infty$ wegen (15)

$$\int_{\rho \pm \omega i}^{2 \pm \omega i} \frac{x^s}{s^2} \frac{ds}{2 - \zeta(s)} = O\left(\int_{\rho}^2 \frac{x^s}{\omega^2} \omega^{\frac{\alpha_5}{\log \log \omega}} d\sigma\right) = o(1).$$

Also ist nach (16)

$$\sum_{n=1}^x f(n) \log \frac{x}{n} = \frac{x^{\rho}}{\rho^2 R} + \int_{\rho - \infty i}^{\rho + \infty i} \frac{x^s}{s^2} \frac{ds}{2 - \zeta(s)},$$

wobei die Integration längs der gebrochenen Linie $\rho - \infty i$, $\rho - 3i$, $\beta - 3i$, $\beta + 3i$, $\rho + 3i$, $\rho + \infty i$ zu erstrecken ist; die zu diesem Schluss noch nötige absolute Konvergenz des Integrals rechts ergibt sich ohne weiteres aus (15).

Hierbei ist noch das geradlinige Integral von $\beta - 3i$ bis $\beta + 3i$ gleich $O(x^{\beta})$ für $x \rightarrow \infty$; wegen der Spiegelsymmetrie des Integranden in Bezug auf die reelle Achse ist also

$$(17) \quad \sum_{n=1}^x f(n) \log \frac{x}{n} = \frac{x^{\rho}}{\rho^2 R} + O(x^{\beta}) + O\left|\int_{\beta+3i}^{\rho+\infty i} \frac{x^s}{s^2} \frac{ds}{2-\zeta(s)}\right|,$$

wobei als Integrationsweg der Haken $\beta + 3i$, $\rho + 3i$, $\rho + \infty i$ dient.

11. Es sei y eine später anzugebende Funktion von x , für die bei $x \rightarrow \infty$ $y \rightarrow \infty$ gilt. Dann ist für $x \geq c_{15}$ $y \geq 3$; ferner, wegen (15), für $x \rightarrow \infty$

$$(18) \quad \int_{\rho+yi}^{\rho+\infty i} \frac{x^s}{s^2} \frac{ds}{2-\zeta(s)} = O\left(x^{\rho} \int_y^{\infty} \frac{t^{\frac{\alpha_5}{\log \log t}}}{t^2} dt\right) = \\ = O\left(x^{\rho} \int_y^{\infty} \frac{dt}{t^{2 \cdot \frac{\alpha_5}{\log \log y}}}\right) = O\left(\frac{x^{\rho}}{y^{1 - \frac{\alpha_5}{\log \log y}}}\right).$$

Auf den übrigbleibenden Teil des Integrals wenden wir wiederum den CAUCHYSCHEN Integralsatz für das Rechteck mit den Eckpunkten $\rho + 3i$, $\rho + yi$, $\rho - c_{11}y^{-\frac{\alpha_5}{\log \log y}} + 3i$, $\rho - c_{11}y^{-\frac{\alpha_5}{\log \log y}} + yi$ an; dieses Rechteck liegt für $x \geq c_{16}$ ganz im Gebiet (14), da die Funktion

$$t^{-\frac{\alpha_5}{\log \log t}} = e^{-\frac{\alpha_5 \log t}{\log \log t}}$$

für hinreichend grosse t monoton nach Null abnimmt. Es ergibt sich

$$(19) \quad \left\{ \int_{\beta+3i}^{\varrho+3i} + \int_{\varrho+3i}^{\varrho+yi} \right\} \frac{x^s}{s^2} \frac{ds}{2-\zeta(s)} = \left\{ \int_{\beta+3i}^{\varrho-c_{11}y^{-\frac{\alpha_5}{\log \log y}+3i}} + \right. \\ \left. + \int_{\varrho-c_{11}y^{-\frac{\alpha_5}{\log \log y}+yi}}^{\varrho-c_{11}y^{-\frac{\alpha_5}{\log \log y}+3i}} + \int_{\varrho-c_{11}y^{-\frac{\alpha_5}{\log \log y}+yi}}^{\varrho+yi} \right\} \frac{x^s}{s^2} \frac{ds}{2-\zeta(s)}.$$

Für das erste Integral rechts ergibt sich sofort die Abschätzung

$$(20) \quad \int_{\beta+3i}^{\varrho-c_{11}y^{-\frac{\alpha_5}{\log \log y}+3i}} \frac{x^s}{s^2} \frac{ds}{2-\zeta(s)} = O\left(x^{\varrho-c_{11}y^{-\frac{\alpha_5}{\log \log y}}}\right),$$

da für $x \geq c_{17}$ $\beta < \varrho - c_{11}y^{-\frac{\alpha_5}{\log \log y}}$ ist; für das zweite gilt wegen (15)

$$(21) \quad \int_{\varrho-c_{11}y^{-\frac{\alpha_5}{\log \log y}+yi}}^{\varrho-c_{11}y^{-\frac{\alpha_5}{\log \log y}+3i}} \frac{x^s}{s^2} \frac{ds}{2-\zeta(s)} = O\left(x^{\varrho-c_{11}y^{-\frac{\alpha_5}{\log \log y}}} \int_3^y \frac{t^{\frac{\alpha_5}{\log \log t}}}{t^2} dt\right) = \\ = O\left(x^{\varrho-c_{11}y^{-\frac{\alpha_5}{\log \log y}}}\right);$$

für das dritte ebenfalls wegen (15)

$$(22) \quad \int_{\varrho-c_{11}y^{-\frac{\alpha_5}{\log \log y}+yi}}^{\varrho+yi} \frac{x^s}{s^2} \frac{ds}{2-\zeta(s)} = O\left(\frac{x^{\varrho}}{y^2} y^{\frac{\alpha_5}{\log \log y}} \int_{\varrho-c_{11}y^{-\frac{\alpha_5}{\log \log y}}}^{\varrho} d\sigma\right) = \\ = O\left(\frac{x^{\varrho}}{y^2}\right) = O\left(\frac{x^{\varrho}}{y^{1-\frac{\alpha_5}{\log \log y}}}\right).$$

Aus (17), (18), (19), (20), (21) und (22) ergibt sich endlich

$$\sum_{n=1}^x f(n) \log \frac{x}{n} = \frac{x^{\varrho}}{\varrho^2 R} + O\left(\frac{x^{\varrho}}{y^{1-\frac{\alpha_5}{\log \log y}}}\right) + O\left(x^{\varrho-c_{11}y^{-\frac{\alpha_5}{\log \log y}}}\right),$$

da

$$x^{\beta} = O\left(x^{\varrho-c_{11}y^{-\frac{\alpha_5}{\log \log y}}}\right)$$

ist.

12. Es sei nun $0 < \alpha_6 < 1$; dann ist umso mehr

$$(23) \quad \sum_{n=1}^x f(n) \log \frac{x}{n} = \frac{x^\varrho}{\varrho^2 R} + O\left(\frac{x^\varrho}{y^{\alpha_6}}\right) + O\left(x^{\varrho - c_{11}} y^{-\frac{\alpha_5}{\log \log y}}\right).$$

Wir wählen jetzt

$$y = (\log x)^{\alpha_7 \log \log \log x},$$

wo $0 < \alpha_7 < \frac{1}{\alpha_5}$ ist. Dann ist

$$(24) \quad \frac{x^\varrho}{y^{\alpha_6}} = x^\varrho (\log x)^{-\alpha_6 \alpha_7 \log \log \log x},$$

ferner ist für $x \geq c_{18}$

$$y \geq \log x, \quad \log \log y \geq \log \log \log x,$$

also

$$y^{-\frac{\alpha_5}{\log \log y}} \geq y^{-\frac{\alpha_5}{\log \log \log x}} = (\log x)^{-\alpha_5 \alpha_7},$$

folglich

$$(25) \quad \begin{aligned} x^{\varrho - c_{11}} y^{-\frac{\alpha_5}{\log \log y}} &= O(x^{\varrho - c_{11}} (\log x)^{-\alpha_5 \alpha_7}) = \\ &= O(x^\varrho e^{-c_{11} (\log x)^{1 - \alpha_5 \alpha_7}}). \end{aligned}$$

Daher folgt, da wegen $1 - \alpha_5 \alpha_7 > 0$

$$\begin{aligned} e^{-c_{11} (\log x)^{1 - \alpha_5 \alpha_7}} &= O(e^{-\alpha_6 \alpha_7 \log \log x \log \log \log x}) = \\ &= O((\log x)^{-\alpha_6 \alpha_7 \log \log \log x}) \end{aligned}$$

ist, aus (23), (24) und (25)

$$(26) \quad \sum_{n=1}^x f(n) \log \frac{x}{n} = \frac{x^\varrho}{\varrho^2 R} + O(x^\varrho (\log x)^{-\alpha_6 \alpha_7 \log \log \log x}).$$

13. Es sei z eine später zu bestimmende positive Funktion von x , die für $x \rightarrow \infty$ gegen Null strebt. Wegen (26) und

$$(xe^{\pm z})^\varrho (\log x \pm z)^{-\alpha_6 \alpha_7 \log \log (\log x \pm z)} \sim x^\varrho (\log x)^{-\alpha_6 \alpha_7 \log \log \log x}$$

folgen dann die Beziehungen

$$\sum_{n=1}^{xe^z} f(n) \log \frac{xe^z}{n} = \frac{x^\varrho e^{\varrho z}}{\varrho^2 R} + O(x^\varrho (\log x)^{-\alpha_6 \alpha_7 \log \log \log x})$$

und

$$\sum_{n=1}^{xe^{-z}} f(n) \log \frac{xe^{-z}}{n} = \frac{x^\varrho e^{-\varrho z}}{\varrho^2 R} + O(x^\varrho (\log x)^{-\alpha_6 \alpha_7 \log \log \log x}),$$

also

$$\begin{aligned}
 z \sum_{n=1}^x f(n) &\leq z \sum_{n=1}^{xe^z} f(n) + \sum_{n=x+1}^{xe^z} f(n) \log \frac{xe^z}{n} = \\
 &= \sum_{n=1}^{xe^z} f(n) \log \frac{xe^z}{n} - \sum_{n=1}^x f(n) \log \frac{x}{n} = \\
 &= \frac{x^\rho}{\rho^2 R} (e^{\rho z} - 1) + O(x^\rho (\log x)^{-\alpha_6 \alpha_7} \log \log \log x), \\
 z \sum_{n=1}^x f(n) &\geq z \sum_{n=1}^x f(n) - \sum_{n=x e^{-z} + 1}^x f(n) \log \frac{n}{x e^{-z}} = \\
 &= \sum_{n=1}^x f(n) \log \frac{x}{n} - \sum_{n=1}^{x e^{-z}} f(n) \log \frac{x e^{-z}}{n} = \\
 &= \frac{x^\rho}{\rho^2 R} (1 - e^{-\rho z}) + O(x^\rho (\log x)^{-\alpha_6 \alpha_7} \log \log \log x).
 \end{aligned}$$

Daher ist für $x \geq c_{19}$

$$\begin{aligned}
 \frac{x^\rho}{\rho R} \frac{1 - e^{-\rho z}}{\rho z} - c_{20} \frac{x^\rho}{z} (\log x)^{-\alpha_6 \alpha_7} \log \log \log x &\leq \\
 &\leq \sum_{n=1}^x f(n) \leq \frac{x^\rho}{\rho R} \frac{e^{\rho z} - 1}{\rho z} + c_{21} \frac{x^\rho}{z} (\log x)^{-\alpha_6 \alpha_7} \log \log \log x.
 \end{aligned}$$

Hier ist

$$\frac{e^{\rho z} - 1}{\rho z} = 1 + O(z), \quad \frac{1 - e^{-\rho z}}{\rho z} = 1 + O(z);$$

also ist für $x \geq c_{22}$

$$\begin{aligned}
 \frac{x^\rho}{\rho R} - c_{23} x^\rho z - c_{20} \frac{x^\rho}{z} (\log x)^{-\alpha_6 \alpha_7} \log \log \log x &\leq \\
 &\leq \sum_{n=1}^x f(n) \leq \frac{x^\rho}{\rho R} + c_{24} x^\rho z + c_{21} \frac{x^\rho}{z} (\log x)^{-\alpha_6 \alpha_7} \log \log \log x,
 \end{aligned}$$

d. h.

$$(27) \quad \sum_{n=1}^x f(n) = \frac{x^\rho}{\rho R} + O(x^\rho z) + O\left(\frac{x^\rho}{z} (\log x)^{-\alpha_6 \alpha_7} \log \log \log x\right).$$

Die günstigste Wahl von z ist offenbar

$$z = (\log x)^{-1/2 \alpha_6 \alpha_7} \log \log \log x;$$

(27) geht dann in

$$\sum_{n=1}^x f(n) = \frac{x^\varrho}{\varrho R} + O(x^\varrho (\log x)^{-1/2 \alpha_6 \alpha_7} \log \log \log x)$$

über.

Es sei nun $\alpha < \frac{1}{2(\varrho-1)\log 2}$ gegeben; dann kann man $\alpha_6 > (\varrho-1)\log 2$, $0 < \alpha_6 < 1$, $0 < \alpha_7 < \frac{1}{\alpha_6}$ so wählen, das $\alpha = \frac{1}{2} \alpha_6 \alpha_7$ sei; damit ist die in der Einleitung ausgesprochene Abschätzungsrelation (3) bewiesen.

(Eingegangen am 3. November 1930.)