AZ ELDÖNTÉSPROBLÉMA VISSZAVEZETÉSE LOGIKAI FORMULÁK VÉGES HALMAZON VALÓ KIELÉGÍTHETŐSÉGÉNEK KÉRDÉSÉRE

KALMÁR LÁSZLÓ (Szeged)*

Az a nagy megtiszteltetés, hogy a halmazelméleti és logikai szekcióba szánt előadásomat a Kongresszus vezetősége a plenáris ülésre tűzte ki, azt a kötelezettséget rója rám, hogy azok számára is érthetően elmondjam, mi az az eldöntésprobléma és miért érdekes, akik nem foglalkoznak matematikai logikával.

1. Hogy *mi* az eldöntésprobléma, azt legvilágosabban talán egy bizonyos absztrakt fogalmazása kapcsán lehet megérteni ; hogy *miért érdekes*, az egy bizonyos konkrét realizálás segítségével derül ki.

Tekintsünk két halmazt, L-et és I-t. L egy fix halmaz, két eleme van ; jelöljük ezeket α-val és β-val. I jelenthet bármely nem üres halmazt ; speciális elemei számára nem vezetünk be külön jeleket, de x, y, z, p (tetszőleges indexekkel) legyenek olyan változók, amelyek I elemein futnak át. Ezeket *matematikai változóknak* fogjuk nevezni.

Tekinteni fogjuk továbbá a függvényeknek három osztályát. Az egyik osztály azokból az egy- vagy többváltozós függvényekből áll, amelyek az L halmazon vannak értelmezve és értékeik is L-hez tartoznak. Az ilyen függvényeket röviden *műveleteknek* nevezzük ; amennyiben valamely műveletre szükségünk lesz, külön jelölést vezetünk be rá. E jelölés megadása végett legyenek A és B (ha szükséges, több latin nagybetű, esetleg indexekkel is) olyan változók, amelyek L elemein futnak át. Így pl. azt az egyváltozós műveletet, amely α-t β-ba, β-t α-ba viszi át, $\overline{A}$-sal jelöljük (tehát $\overline{\alpha} = \beta$, $\overline{\beta} = \alpha$) ; $A \,\&\, B$-vel (röviden AB-vel) jelöljük azt a kétváltozós műveletet, amelyre $\alpha \,\&\, \alpha = \alpha$, $\alpha \,\&\, \beta = \beta \,\&\, \alpha = \beta \,\&\, \beta = \beta$; $A \vee B$-vel azt a kétváltozós műveletet, amelyre $\alpha \vee \alpha = \alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha = \alpha$, $\beta \vee \beta = \beta$; $A \rightarrow B$-vel azt a kétváltozós műveletet, amelyre $\alpha \rightarrow \alpha = \beta \rightarrow \alpha = \beta \rightarrow \beta = \alpha$, $\alpha \rightarrow \beta = \beta$.

A függvények másik osztálya azokból az egy- vagy többváltozós függvényekből áll, amelyek I-n vannak értelmezve és értékeik is I-hez tartoznak.

* 1950. augusztus 29-én tartott előadás.

Az ilyen függvényeket *matematikai függvényeknek* nevezzük. Speciális matematikai függvényekre egyelőre nem vezetünk be külön jelet (később majd a φ ψ, ω γ λ, δ betűkkel, esetleg indexekkel ellátva, fogunk speciális matematikai függvényeket jelölni) ; azonban $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... legyenek olyan változók, amelyek az egyváltozós matematikai függvények halmazán futnak át, $f_1(x, y), f_2(x, y)$, ... olyan változók, amelyek a kétváltozós matematikai függvények halmazán futnak át stb. Az ilyen változókat *matematikai függvényváltozóknak* fogjuk nevezni.

A függvények harmadik osztálya végül azokból az egy- vagy többváltozós függvényekből áll, amelyek I-n vannak értelmezve, értékeik viszont L-hez tartoznak. Az ilyen függvényeket *predikátumoknak* nevezzük. Egyelőre csak a következő predikátumra vezetünk be külön jelet :

$$\Delta(x\ y) = \begin{cases} \alpha, \text{ ha } x = y, \\ \beta, \text{ ha } x \neq y \end{cases}$$

(a Kronecker-féle δ-szimbólum általánosítása) ; később majd a Φ, Ψ, Ω, Γ, Λ, Σ, Θ, Ξ betűkkel (némelyiket indexekkel ellátva) speciális predikátumokat fogunk jelölni. Legyenek $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... olyan változók, amelyek az egyváltozós predikátumok halmazán futnak át, $F(x, y)$, $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, ... olyan változók, amelyek a kétváltozós predikátumok halmazán futnak át stb. Az ilyen változókat *predikátumváltozóknak* fogjuk nevezni.

Tekinteni fogunk végül két speciális függvényoperációt, amelyek az egyváltozós predikátumokat L elemeibe viszik át, a többváltozós predikátumokat pedig eggyel kevesebb változós predikátumokba. (L elemeit tekinthetjük 0-változós predikátumoknak is.) Ezek a következők :

$$(x)\,F(x) = \begin{cases} \alpha, \text{ ha } F(x) \equiv \alpha & (\text{az az } I \text{ minden } x \text{ elemére } \alpha), \\ \beta \text{ különben} ; \end{cases}$$

$$(Ex)\,F(x) = \begin{cases} \beta, \text{ ha } F(x) \equiv \beta, \\ \alpha \text{ különben.} \end{cases}$$

Többváltozós predikátumokra úgy alkalmazzuk ezeket a függvényoperációkat, amiket *kvantoroknak* nevezünk, hogy az elején zárójelbe tett változón kívül a többi matematikai változót paraméternek tekintjük. Pl.

$$(x)\,F(x, y) = \begin{cases} \alpha \text{ az olyan } y \text{ helyeken, amelyekre } x\text{-ben identikusan } F(x, y) = \alpha, \\ \beta \text{ a többi } y \text{ helyeken,} \end{cases}$$

viszont

$$(y)\,F(x, y) = \begin{cases} \alpha \text{ az olyan } x \text{ helyeken, amelyekre } y\text{-ban identikusan } F(x, y) = \alpha, \\ \beta \text{ a többi } x \text{ helyeken.} \end{cases}$$

Az elöl zárójelbe tett matematikai változót a kvantor által *lekötött* változónak hívjuk; ettől tehát nem függ a kvantor alkalmazásával keletkezett érték (éppúgy, mint ahogy pl. $\int_a^b f(x)\,dx$ nem függ x-től).

2. Matematikai változókból matematikai függvényváltozók egyszeri vagy többszöri alkalmazásával *kifejezéseket* képezhetünk; ilyenek pl.

$$f_1(x,y)\,;\ f_1(f_2(x),f_3(x)),\ f_4(f_1(x,y),f_5(x,f_1(y,z))).$$

Magukat a matematikai változókat is kifejezéseknek tekintjük. Egy kifejezés értéke mindig I eleme, mégpedig attól függ, melyik halmaz az I, mely I-n definiált matematikai függvényeket tesszük a kifejezésben szereplő matematikai függvényváltozók helyébe és I mely elemeit tesszük a kifejezésben szereplő matematikai változók helyébe. Pl. ha I a pozitív egész számok halmaza, $f_1(x,y)=x+y$, $f_2(x)=x^2$, $f_3(x)=x!$ és $x=3$, akkor $f_1(f_2(x), f_3(x))= =3^2+3!=15$.

Olyan predikátumváltozókból, amelyeknek argumentumaiban tetszőleges kifejezések állanak, a műveletek, továbbá a kvantorok egymásutáni alkalmazásával *formulákat* képezhetünk; ilyenek pl.

$$F(x,y),\ (x)\,F(x,y),\ (Ex)\overline{(\overline{\Delta(f_1(x),f_2(y))}\rightarrow F_1(f_3(f_1(y),f_1(x)))\,\&\,(y)F_2(x,y))}.$$

Egy formula értéke mindig L eleme (tehát vagy α, vagy β), mégpedig attól függ, melyik halmaz az I, mely I-n definiált matematikai függvényeket tesszük a formulában szereplő matematikai függvényváltozók helyébe, mely I-n definiált predikátumokat tesszük a formulában szereplő predikátumváltozók helyébe és I mely elemeit tesszük a formulában *szabad* (azaz egyik kvantor által sem lekötött) matematikai változók helyébe. Pl. ha a legutóbbi formulában I az egyjegyű számok halmaza, $f_1(x)=\left[\frac{x}{2}\right]$, $f_2(x)=x^2-10\left[\frac{x^2}{10}\right]$, $f_3(x,y)=|x-y|$,

$$F_1(x)=\begin{cases}\alpha, \text{ ha } x \text{ páros,}\\ \beta, \text{ ha } x \text{ páratlan,}\end{cases}$$

$$F_2(x,y)=\begin{cases}\alpha, \text{ ha } (x,y)=1,\\ \beta, \text{ ha } (x,y)\neq 1,\end{cases}$$

továbbá y (amely az első két helyen szabad változó) értéke 9, akkor a formula értéke α. Ugyanis ekkor

$$\Delta(f_1(x),\ f_2(y))=\Delta\left(\left[\frac{x}{2}\right],1\right)=\begin{cases}\alpha, \text{ ha } x=2 \text{ vagy } 3,\\ \beta \text{ különben,}\end{cases}$$

$$F_1(f_3(f_1(y), f_1(x))) = F_1\left(\left|4 - \left[\frac{x}{2}\right]\right|\right) = \begin{cases} \alpha, \text{ ha } x = 0, 1, 4, 5, 8, 9, \\ \beta, \text{ ha } x = 2, 3, 6, 7, \end{cases}$$

$$(y) F_2(x, y) = \begin{cases} \alpha, \text{ ha } x = 1, \\ \beta \text{ különben,} \end{cases}$$

mert ha $x = 1$, akkor y-ban azonosan $F_2(x, y) = \alpha$ (mert $(x, y) = 1$), ha pedig $x \neq 1$, akkor az $y = x$ helyen $F_2(x, y) = \beta$ (mert $(x, x) = x \neq 1$). Így

$$F_1(f_3(f_1(y), f_1(x))) \mathbin{\&} (y) F_2(x, y) = \begin{cases} \alpha \mathbin{\&} \alpha = \alpha, \text{ ha } x = 1, \\ \alpha \mathbin{\&} \beta \text{ vagy } \beta \mathbin{\&} \beta, \text{ tehát } \beta \text{ különben.} \end{cases}$$

Így $\overline{\Delta(f_1(x), f_2(y)) \to \overline{F_1(f_3(f_1(y), f_1(x))) \mathbin{\&} (y) F_2(x, y)}}$ nem azonosan β, hiszen az $x = 1$ helyen értéke $\overline{\bar\beta \to \bar\alpha} = \overline{\alpha \to \beta} = \bar\beta = \alpha$; tehát a mondott választás mellett

$$(Ex)\,\overline{\overline{\Delta(f_1(x), f_2(y))} \to \overline{F_1(f_3(f_1(y), f_1(x))) \mathbin{\&} (y) F_2(x, y)}} = \alpha.$$

3. Vannak olyan formulák, amelyeknek értéke mindig α, bárhogy is válasszuk az I halmazt, bárhogy is definiáljuk I-n a formu ában szereplő matematikai függvényváltozók helyébe teendő matematikai függvényeket és a formulában szereplő predikátumváltozók helyébe teendő predikátumokat, és bárhogy is válasszuk I-nek a formulában szereplő szabad változók helyébe teendő elemeit. Ilyen »azonosan α értékű« formula pl.

$$(x) F(x, f_1(x)) \to (x)(Ey) F(x, y).$$

Valóban, ha $F(x, f_1(x)) \equiv \alpha$, akkor semmilyen x esetén nem állhat y-ban azonosan $F(x, y) = \beta$, hiszen az $y = f_1(x)$ helyen $F(x, y) = \alpha$; így, bármi is az x, $(Ey) F(x, y) = \alpha$, vagyis $(x)(Ey) F(x, y) = \alpha$. Ekkor a formula értéke $\alpha \to \alpha = \alpha$. Ha pedig $F(x, f_1(x))$ nem azonosan α, akkor $(x) F(x, f_1(x)) = \beta$, ezért a formula értéke vagy $\beta \to \alpha = \alpha$, vagy $\beta \to \beta = \alpha$; vagyis mindig α.

Az eldöntésprobléma az a kérdés, hogy mely formulák azonosan α értékűek. Megoldottnak akkor tekintenők az eldöntésproblémát, ha adva volna olyan véges algoritmus, amelynek segítségével, valahányszor valaki megad egy formulát, el tudnók dönteni, hogy az a formula azonosan α értékű-e.

Persze az eldöntésprobléma ekvivalens azzal a kérdéssel is, mely formulák azonosan β értékűek; hiszen valamely A formula akkor és csak akkor azonosan α, ha az $\overline{\mathsf{A}}$ formula azonosan β.

Könnyen megmutatható, hogy az eldöntésprobléma visszavezethető arra a speciális esetre, amikor a kérdéses formulában minden változó mindenütt le van kötve valamely kvantorral és sem matematikai függvényváltozó, sem a speciális Δ predikátum nem szerepel benne; vagyis ha volna olyan véges algoritmus, amellyel az ilyen formulák bármelyikéről el tudnók dönteni, hogy azonosan α értékű-e, akkor az eldöntésprobléma is meg volna oldva.

4. Az eldöntésprobléma érdekességét a következő speciális interpretáció mutatja.

L legyen a »logikai értékek« halmaza, α legyen az »igaz«, β a »hamis« logikai érték. A továbbiakban α helyett $\uparrow$-at, β helyett $\downarrow$-at fogok írni. Kiejtésük: »igaz«, ill. »hamis«; nevük: logikai értékek. A műveletek tehát logikai értékeket logikai értékekbe visznek át. A továbbiakban az ilyen műveleteket *logikai műveleteknek* nevezzük. Ezek a műveletek absztrakció útján keletkeztek olyan műveletekből, amelyek állításokat (pl. matematikai tételeket, sejtéseket) visznek át állításokba, mégpedig olyanokból, amelyek esetén a művelet eredményeként jelentkező állítás logikai értéke, vagyis az, hogy ez az állítás igaz-e vagy nem, csak attól függ, hogy azoknak az állításoknak, amelyekre a műveletet alkalmazzuk, mi a logikai értéke. Ilyen pl. a már fent $A \& B$-vel jelölt logikai művelet, az ú. n. *konjunkció*; ez a köznyelvben az »és« kötőszóval kifejezett, állításokra vonatkozó, művelet absztraktuma. Ugyanis, ha $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ két állítás, az »$\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$« állítás igaz, valahányszor $\mathfrak{A}$ is, $\mathfrak{B}$ is igaz, viszont hamis, ha $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ valamelyike (vagy mindkettő) hamis; így az »$\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$« állítás logikai értéke csak $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ logikai értékétől függ, éspedig azok konjunkciója. Hasonlóképpen, a fent $\bar{A}$-sal jelölt logikai művelet, az ú. n. *negáció* a köznyelvben a »nem« határozószóval kifejezett, állításra vonatkozó műveletből keletkezett absztrakció útján: a »nem $\mathfrak{A}$« állítás logikai értéke éppen az $\mathfrak{A}$ állítás logikai értékének negációja. A fent $A \vee B$-vel jelölt logikai művelet, a *diszjunkció*, a köznyelvben a »vagy« kötőszóval kifejezett, állításokra vonatkozó művelet absztraktuma, azonban csak akkor, ha ezt a műveletet, amelyet a köznyelvben több különböző értelemben szokás érteni, úgy értjük, hogy az »$\mathfrak{A}$ vagy $\mathfrak{B}$« állítás igaz akkor is, ha $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ közül az egyik igaz, a másik nem, meg akkor is, ha mind a kettő igaz, és csak akkor hamis, ha mind a kettő hamis. A fent $A \rightarrow B$-vel jelölt logikai művelet pedig, az *implikáció*, a köznyelvben a »ha..., akkor...« szókkal kifejezett, állításokra vonatkozó művelettel hozható kapcsolatba. Ez utóbbi művelet ugyan nem olyan, hogy eredményének logikai értéke csak azoknak az állításoknak logikai értékétől függ, amelyeket a »ha..., akkor...« szókkal összekapcsoltunk; olyankor ugyanis, amikor az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ állítások között nincs semmi értelmi kapcsolat, a »ha $\mathfrak{A}$, akkor $\mathfrak{B}$« állítást sem igaznak, sem hamisnak nem tekintjük, hanem értelmetlennek. Ki lehet azonban úgy terjeszteni ennek a műveletnek jelentését, hogy mindig legyen eredményének logikai értéke és az csak $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ logikai értékétől függjön; az implikáció az ily módon kiterjesztett »ha $\mathfrak{A}$, akkor $\mathfrak{B}$« művelet absztraktuma. Ennek megfelelően $A \& B$-t »A és B«-nek, $A \vee B$-t »A vagy B«-nek, $\bar{A}$-t »nem A«-nak ejtjük ki; $A \rightarrow B$ kiejtése »A nyil B«.

Valamely I halmazon definiált egyváltozós predikátumok olyan állítások logikai értékei, amelyek I egy változó x elemének valamely *tulajdonságát* fejezik ki ; az I-n definiált többváltozós predikátumok pedig I elemei közötti *relációk* logikai értékei. Ilyen predikátumok pl., ha I a természetes számok halmaza,

$$\Phi(x) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } x \text{ prímszám,} \\ \downarrow, & \text{ha } x \text{ nem prímszám,} \end{cases}$$

vagyis az »x prímszám« tulajdonság logikai értéke, vagy

$$\Psi(x, y) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } (x, y) = 1, \\ \downarrow, & \text{ha } (x, y) \neq 1, \end{cases}$$

vagyis az »x relatív prím y-hoz« reláció logikai értéke. A fent már említett $\Delta(x, y)$ predikátum az »$x = y$« reláció logikai értéke. Ilyen értelemben a predikátumok a tulajdonságok és relációk absztraktumai.

A kvantorok bizonyos, változót tartalmazó állításokra vonatkozó operációk absztraktumai ; ugyanis ha $F(x)$ valamely »x-nek megvan az $\mathfrak{F}$ tulajdonsága« alakú állítás logikai értéke, akkor $(x) F(x)$ a »minden x-nek (azaz I minden elemének) megvan az $\mathfrak{F}$ tulajdonsága« állításnak, $(Ex) F(x)$ pedig a »van oly x (I-ben), amelynek megvan az $\mathfrak{F}$ tulajdonsága« állításnak logikai értéke. Hasonlóan, ha $G(x, y)$ valamely »x a $\mathfrak{G}$ relációban áll y-nal« állítás logikai értéke, akkor $(x) G(x, y)$ a »minden x a $\mathfrak{G}$ relációban áll y-nal« állításnak logikai értéke. A kvantorok kiejtése : (x)-é »zárójel x«, (Ex)-é pedig »é x«.

Ezt az interpretációt alkalmazva, az eldöntésprobléma az a kérdés, hogy mely állítások olyanok, hogy már puszta formájuknál (vagyis más állításokból az »és«, »vagy«, »ha. . ., akkor. . .«, »nem« és hasonló jellegű, továbbá a »minden«, »van oly« szók segítségével való felépítésük módjánál) fogva igazak, függetlenül attól, hogy mit jelentenek (és mely halmaz elemeire vannak definiálva) az állításban szereplő tulajdonságok és relációk (kivéve az egyenlőségi relációt), továbbá az állításban esetleg előforduló matematikai függvények, valamint, hogy I mely elemeiről van szó az állításban. Ez a kérdés a logika szempontjából magában véve érdekes, de még érdekesebbé teszi az, hogy visszavezethetők rá más logikai kérdések (pl. hogy mi annak szükséges és elegendő feltétele, hogy egy állítás pusztán logikailag következék más állításokból, függetlenül attól, hogy mit jelentenek az állításokban szereplő tulajdonságok és relációk), axiómatikus kérdések (pl. hogy mely tételek következnek valamely adott, nem túl komplikált szerkezetű axiómarendszer axiómáiból, t. i. olyanéból, amely véges számú axiómából áll s amelyre nézve az a követelés, hogy az axiómák igazak legyenek, felírható úgy, hogy bizonyos formulák az $\uparrow$ logikai értéket állítsák elő ; továbbá, hogy egy adott, ilyen értelemben »formalizálható«, axiómarendszer ellentmondástalan-e, vagy hogy független-e), sőt bizonyos alakú aritmetikai kérdések is (pl. a Goldbach-féle, vagy a Fermat-féle sejtés érvénye).

Az azonosan $\uparrow$ értékű formulákat röviden *azonosan igaz* formuláknak, a *nem* azonosan $\downarrow$ értékű formulákat röviden *kielégíthető* formuláknak nevezzük. (»Formula« a továbbiakban mindig a **2.** pontban definiált értelemben vett formulát jelent.) Az eldöntésprobléma tehát úgy is kimondható, hogy olyan algoritmust keresünk, amelynek segítségével bármely adott formuláról el lehet dönteni, azonosan igaz-e, meg úgy is, hogy olyan algoritmust keresünk, amelynek segítségével bármely adott formuláról el lehet dönteni, kielégíthető-e. Ha egy formula értéke mindig $\uparrow$ (ill. ha nem mindig $\downarrow$), valahányszor I-t egy bizonyos adott halmaznak választjuk, bárhogyan definiáljuk egyébként I-n a formulában szereplő predikátumváltozók és matematikai függvényváltozók helyére teendő predikátumokat, ill. matematikai függvényeket, továbbá bárhogyan választjuk I-nek a formulában szereplő szabad változók helyére teendő elemeit, akkor ezt a formulát *az* adott *I halmazon azonosan igaznak* (ill. *kielégíthetőnek*) nevezzük. Könnyen látható,[1] hogy az, hogy egy adott formula egy adott I halmazon azonosan igaz-e, vagy, hogy kielégíthető-e, csak I számosságától függ ; vagyis, ha egy formula egy I halmazon azonosan igaz (ill. kielégíthető), akkor minden I-vel egyenlő számosságú halmazon azonosan igaz (ill. kielégíthető). Ha egy formula azonosan igaz (ill. kielégíthető) valamely $\mathfrak{n}$ számosságú halmazon, tehát a fentiek szerint azonosan igaz (ill. kielégíthető) *minden* $\mathfrak{n}$ számosságú halmazon, akkor ezt a formulát *az* $\mathfrak{n}$ *számosságban azonosan igaznak* (ill. *kielégíthetőnek*) mondjuk.

5. Az eldöntésproblémára vonatkozó kutatások nagy része vagy az eldöntésprobléma egyes speciális eseteinek megoldását tűzi ki célul, vagy az eldöntésprobléma visszavezetését bizonyos speciális eseteire. A kétirányú kutatások persze párhuzamosan folynak : valahányszor sikerült az eldöntésprobléma valamely speciális esetét megoldani, igyekszünk az általános problémát erre, vagy legalább is hasonló speciális esetre visszavezetni.

Így pl., mint régóta ismeretes,[2] az eldöntésproblémának az a speciális esete, amelyben az I halmaz számossága adott véges szám, megoldható ; más szóval, minden adott pozitív egész n számhoz megadható olyan algoritmus, amelynek segítségével bármely adott formuláról el lehet dönteni, azonosan igaz-e az n számosságban. Másrészt, *Löwenheim*[3] egy nevezetes tétele

[1] L. pl. *P. Bernays* és *M. Schönfinkel*, Zum Entscheidungproblem der mathematischen Logik, *Math. Annalen*, *99* (1928), 342—372., különösen 344. l.

[2] L. pl. *D. Hilbert* és *W. Ackermann*, Grundzüge der theoretischen Logik, 3. kiadás (Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1949), 97—98. l.

[3] *L. Löwenheim*, Über Möglichkeiten im Relativkalkül, *Math. Annalen*, *76* (1945), 447—470., különösen 450—456. l.

szerint, amelynek *Skolem*[4] adta könnyebben követhető bizonyítását és egy fontos általánosítását, és fejtette ki az axiómatikus módszerre vonatkozó meglepő következményeit, az eldöntésprobléma visszavezethető arra a speciális esetére, amelyben az I halmaz megszámlálható; vagyis, ha volna olyan algoritmus, amelynek segítségével bármely formuláról el lehetne dönteni, hogy azonosan igaz-e, ill. hogy kielégíthető-e az $\aleph_0$ számosságban (röviden: hogy *azonosan igaz-e*, ill. hogy *kielégíthető-e a megszámlálhatóban*), akkor ennek az algoritmusnak segítségével olyan algoritmust is meg lehetne adni, amelynek segítségével bármely formuláról el lehetne dönteni, azonosan igaz-e. Ugyanis, mint *Löwenheim* megmutatta, egy formula akkor és csak akkor azonosan igaz, ha a megszámlálhatóban azonosan igaz.

Azt lehetne hinni, hogy a *Löwenheim*-féle visszavezetési tételt nem lehet tovább élesíteni anélkül, hogy az eldöntésproblémát magát meg nem oldanók, ami egyébként, mint *Church*[5] az algoritmus fogalmának egy bizonyos szabatos definíciója esetén[6] megmutatta, nem lehetséges. Ugyanis a megszámlálható halmazok számosságánál kisebb számosság már nincs más, mint a véges számosságok.

Mégis meg fogom mutatni, ho y a *Löwenheim*-féle visszavezetési tételt élesíteni lehet annak felhasználásával, hogy az *adott véges* számosságok és a *megszámlálható* halmazok számossága között bizonyos értelemben ott vannak a *tetszőleges véges* számossá ok. Nevezzünk ugyanis *a végesben azonosan igaznak, ill. a végesben kielégíthetőnek* egy formulát, ha minden véges számosságban azonosan gaz, ill. ha van olyan véges számosság, amelyben kielégíthető. Akkor meg fogom mutatni, hogy az eldöntésprobléma visszavezethető arra a kérdésre, mely formulák azonosan igazak, vagy hogy mely formulák elégíthetők ki a végesben. (E két kérdés persze ekvivalens, hiszen egy **A** formula akkor és csak akkor elégíthető ki a végesben, ha az $\overline{\mathbf{A}}$ formula nem azonosan igaz a végesben.) Részletesebben, be fogom bizonyítani a következő tételt:

Bármely adott **A** *formulához szerkeszteni lehet olyan* **B** *formulát, hogy* **A** *akkor és csak akkor elégíthető ki* (egyáltalában), *ha* **B** *nem elégíthető ki a végesben.*

E tételből, *Church* említett tételének felhasználásával, következik *Trahtyenbrot*[7] tétele, amely szerint nincs olyan algoritmus (az említett szabatos értelem-

[4] *Th. Skolem*, Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theorem über dichte Mengen, *Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania*, Mat.-naturv. klasse, 1920, no. *4*, 1—33., különösen 4—15. l.; Über einige Grundlagenfragen der Mathematik, *Skrifter utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo*, Mat.-naturv. klasse, 1929, no. *4*, 1—48., különösen 3—9. és 23—29. l.

[5] *A. Church*, A note to the Entscheidungsproblem, *The journal of symbolic logic*, *1* (1936), 40—41. és 101—102. l.

[6] L. *A. Church*, An unsolvable problem of elementary number theory, *American journal of math.*, *58* (1936), 345—363. l. és *S. C. Kleene*, General recursive functions of natural numbers, *Math. Annalen*, *112* (1936), 727—742. l. Az e cikkben definiált (*Herbrand*ra és *Gödel*re visszamenő) rekurzív eljárás fogalma, *Markov* s óbeli közlése szerint, ekvivalens az algoritmus *Markov*-féle fogalmával; l. *А. А. Марков*, Теория алгорифмов, *ugyane kötet*, 191—203. l.

[7] *Б. А. Трахтенброт*, Невозможность алгорифма для проблемы разрешимости на конечных классах, *Доклады Академии Наук СССР*, новая серия, *70* (1950), 561—564. l.

ben), amelynek segítségével bármely adott formuláról el lehetne dönteni, kielégíthető-e a végesben. (Ezt a tételt *Trahtyenbrot* más módszerrel bizonyította be.)

6. A bizonyítás alapgondolata a következő. Egy *Skolem—Herbrand*-féle lemma[8] szerint egy **A** formula *kielégíthetősége* ekvivalens egy bizonyos formalizált elemi axiómarendszer *ellentmondástalanságával*, amelyet *az* **A** *formulához tartozó axiómarendszernek* fogunk nevezni. Ez az axiómarendszer elemi abban az értelemben, hogy az axiómákat formalizáló formulák nem tartalmaznak kvantort. Mármost egy axiómarendszer *ellentmondásossága* olyan dolog, ami a végesben játszódik le, t. i. egy véges hosszúságú bizonyításon belül, amely az axiómákból egymásnak ellentmondó tételekig vezet. E tény felhasználásával az **A** formulához tartozó $\mathfrak{A}$ axiómarendszer ellentmondásosságát át lehet fogalmazni egy bizonyos **B** formulának *a végesben való kielégíthetőségére* ; így tehát **A** akkor és csakis akkor *elégíthető ki*, ha **B** *nem elégíthető ki a végesben*.[9]

7. A bizonyítás részleteinek közlésében egyszerűség kedvéért

$$(x_1)(x_2)(x_3)(Ex_4)\ldots(Ex_n)\,\mathbf{M} \tag{1}$$

alakú **A** formulákra szorítkozom, ahol az **M** formulában, **A** ú. n. magvában, nem szerepel egyetlen egy kvantor sem, továbbá **A**-ban egyetlen egy, kétváltozós, $F(x, y)$ predikátumváltozó szerepel; a $\Delta(x, y)$ predikátum, matematikai függvényváltozók és szabad változók pedig nem szerepelnek az **A**-ban. Eszerint

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(F;\, x_1, \ldots, x_n) \tag{2}$$

úgy épül fel az F predikátumváltozóból és az $x_1, \ldots, x_n$ változókból (amelyek mind előfordulnak **A**-ban), hogy F argumentumaiba az $x_1, \ldots, x_n$ változók közül kettőt-kettőt beteszünk és az így keletkezett $F(x_\mu, x_\nu)$ alakú formulákra logikai műveleteket alkalmazunk. Az általános esetben azonban hasonlóan lehet végrehajtani a bizonyítást. Egyébként az (1) alakú, (2) alakú maggal bíró formulákra való szorítkozás nem jelenti az általánosság megszorítását,

[8] *Th. Skolem*, második idézett helyen, különösen 24—29. l.; *J. Herbrand*, Recherches sur le Théorie de la démonstration, *Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego*, Wydział III, Nr. *33* (1930), 1—128., különösen 112—117. l. L. még: *D. Hilbert* és *P. Bernays*, Grundlagen der Mathematik, 2. kötet (Berlin, 1939), 149—163. l.

[9] A tételt másképp is be lehetne bizonyítani, a *Skolem—Herbrand*-féle lemma helyett a *Gödel*-féle teljességi tétel segítségével; l. *K. Gödel*, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funtionenkalküls, *Monatshefte für Math. und Phys.*, *37* (1930), 349—360. l. Ugyanis a kérdéses tétel szerint **A** akkor és csak akkor *elégíthető ki*, ha az $\overline{\mathbf{A}}$ formula *nem bizonyítható be* a logikai függvénykalkulus egy bizonyos axiómarendszerében; másrészt $\overline{\mathbf{A}}$ *bebizonyíthatóságát* ebben az axiómarendszerben át lehet fogalmazni egy bizonyos **B**″ formulának a végesben való kielégíthetőségére. A *Skolem—Herbrand*-féle lemma alkalmazása annyiban előnyösebb, hogy annak segítségével *elemi* axiómarendszerben lehet dolgozni, míg a logikai függvénykalkulus axiómarendszere természetesen *nem elemi.*

mert, mint *Surányi*val megmutattuk[10], az eldöntésprobléma visszavezethető arra a kérdésre, hogy az ilyen alakú formulák közül melyek elégíthetők ki.[11] Azt is feltehetjük az általánosság megszorítása nélkül, hogy $\mathbf{M}$-ben ne forduljon elő más logikai művelet, mint az implikáció és a negáció ; ugyanis ezek segítségével, mint ismeretes,[12] minden (akárhány változós) logikai művelet kifejezhető.

Mindenekelőtt pontosan megadom az $\mathbf{A}$ formulához tartozó $\mathfrak{A}$ axiómarendszert. $\mathfrak{A}$ kifejezései és formulái a következő jelekből épülnek fel (a kezdő- és végzárójelen és a vesszőn kívül[13]) : a ; $f_4, \ldots, f_n$; F ; $\rightarrow$, $\overline{}$. Az $\mathfrak{A}$ axiómarendszer *kifejezései* azok a véges jelsorozatok, amelyek a-ból azon műveletek véges számú alkalmazásával jönnek létre, amelyek a $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$ jelsorozatokból az $f_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3), \ldots, f_n(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ jelsorozatokat hozzák létre. Pl. a, $f_4(a, a, a)$, $f_5(a, f_4(a, a, a), f_4(a, f_5(a, a, a), a))$ (ha $n \geqq 5$) $\mathfrak{A}$-nak kifejezései. Az $\mathfrak{A}$ axiómarendszer *formulái* azok a véges jelsorozatok, amelyek az $F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ alakú jelsorozatokból, ahol $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ az $\mathfrak{A}$ kifejezései, azon két művelet véges számú alkalmazásával jönnek létre, amelyek egyike egy $\mathbf{G}$ jelsorozatból a $\overline{\mathbf{G}}$ jelsorozatot, másika két $\mathbf{G}$ és $\mathbf{H}$ jelsorozatból a $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$ jelsorozatot hozza létre. Pl. $F(a, a)$, $\overline{F(a, f_4(a, a, a))}$, $(F(f_4(a, a, a), a) \rightarrow (\overline{F(a, a)} \rightarrow F(a, f_4(a, a, f_5(a, a, a)))))$ (ha $n \geqq 5$) $\mathfrak{A}$-nak formulái.[14]

Az $\mathfrak{A}$ axiómarendszer bizonyos formuláit $\mathfrak{A}$ *axiómáinak* nevezzük ; ezek egyrészt a

$$(3) \quad \begin{cases} (\mathbf{H} \rightarrow (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})), \\ ((\mathbf{G} \rightarrow (\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{K})) \rightarrow ((\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}) \rightarrow (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{K}))), \\ ((\overline{\mathbf{H}} \rightarrow \overline{\mathbf{G}}) \rightarrow (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})) \end{cases}$$

alakú formulák, ahol $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{K}$ az $\mathfrak{A}$ tetszőleges formulái ; másrészt az

$$(4) \qquad \mathbf{M}(F\,;\ \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, f_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3), \ldots, f_n(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3))$$

[10] *L. Kalmár* és *J. Surányi*, On the reduction of the decision problem, second paper, Gödel prefix, a single binary predicate, *The journal of symbolic logic*, *3* (1947), 65—73. l.

[11] Ehelyett azt is feltehetnők, hogy $\mathbf{A}$ (1) alakú formula, ahol $n = 4$ és magva

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(F_1, \ldots, F_l\,;\ x_1, x_2, x_3, x_4)$$

alakú ; l. *Surányi János*, A logikai függvénykalkulus eldöntésproblémájának redukciójáról, *Mat. és fiz. lapok*, *50* (1943), 51—74., különösen 57—61. l. ; Contributions to the reduction theory of the decision problem, second paper, three universal, one existential quantifiers, *Acta Math. Hung*, *1* (1950), 261—271. l. Az ilyen alakú formulákon éppen olyan egyszerű volna megmutatni a bizonyítás módját, — amelyet egyébként az általános eseten is el lehetne mondani, csak az ehhez szükséges formulák lennének sokkal komplikáltabbak.

[12] L. pl. *D. Hilbert* és *W. Ackermann*, a [2] lábjegyzetben idézett mű, 15—17. l.

[13] Ez utóbbiakat meg lehetne takarítani, ha a *Łukasiewicz*-féle zárójeltelen jelölésrendszert használnók ; l. pl. *J. Łukasiewicz* és *A. Tarski*, Untersuchungen über den Aussagenkalkül, *Sprawozdania z posiedzeń Towarzysztwa Naukowego Warszawskiego*, Wydział III, *23* (1930), 30—50. l.

[14] Az $\mathfrak{A}$ axiómarendszerben $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ helyett mindig $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$-t írok ; ezzel meg lehet takarítani a zárójelek szokásos használata eléggé bonyolult módszerének leírását. Hasonló okokból használom később a $(\mathbf{G} \,\&\, \mathbf{H})$ és $(\mathbf{G}_1 \,\&\, \mathbf{G}_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathbf{G}_m)$ írásmódot.

alakú formulák,[15] ahol $\mathsf{k}_1, \mathsf{k}_2, \mathsf{k}_3$ az $\mathfrak{A}$ tetszőleges formulái. A (3) alakú axiómákat *logikai axiómáknak*, a (4) alakúakat *valódi axiómáknak* nevezzük.

Az $\mathfrak{A}$ axiómarendszerben az egyetlen megengedett *következtetésmód* a *leválasztás* (modus ponens), vagyis az a művelet, amely a G és $(\mathsf{G} \to \mathsf{H})$ formulákból (ahol G és H az $\mathfrak{A}$ tetszőleges formulái) a H formulát hozza létre. Vagyis az $\mathfrak{A}$ axiómarendszerben azokat a formulákat nevezzük (bebizonyítható) *tételeknek*, amelyek $\mathfrak{A}$ véges számú axiómájából véges számú egymásutáni leválasztással jönnek létre (beleértve magukat az axiómákat is). Eszerint $\mathfrak{A}$ egy G formulája akkor és csak akkor tétel $\mathfrak{A}$-ban, ha van $\mathfrak{A}$ formuláinak olyan $\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2, \ldots, \mathsf{G}_m$ véges sorozata, amelynek minden G_μ tagja vagy $\mathfrak{A}$-nak axiómája, vagy a sorozat előbbi tagjaiból leválasztás útján jön létre, vagyis van olyan $\mu', \mu'' < \mu$, hogy $\mathsf{G}_{\mu''} = (\mathsf{G}_{\mu'} \to \mathsf{G}_\mu)$; és G tagja e sorozatnak. Minden ilyen $\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2, \ldots, \mathsf{G}_m$ sorozatot G egy *bizonyításának* nevezünk $\mathfrak{A}$-ban.

8. Ezekután — az (1), (2) alakú formulákra specializálva — a következőképpen mondhatjuk ki a *Skolem—Herbrand*-féle lemmát.

Az A formula akkor és csak akkor elégíthető ki, ha a hozzá tartozó $\mathfrak{A}$ axiómarendszer ellentmondástalan, vagyis, ha nincs olyan $\mathfrak{A}$-ban bebizonyítható G tétel, hogy $\overline{\mathsf{G}}$ is tétel $\mathfrak{A}$-ban.

Hogy ne kelljen feltételezni *Skolem* és *Herbrand* említett cikkeinek ismeretét,[16] bebizonyítom ezt a lemmát. Először tegyük fel, hogy $\mathfrak{A}$ kielégíthető. Akkor van olyan (nem üres) I halmaz, továbbá olyan, I-n definiált $\Phi(x, y)$ predikátum és, valahányszor $x_1, x_2, x_3 \in I$, vannak I-nek olyan további $x_4, \ldots, x_n$ elemei, hogy

$$\mathsf{M}(\Phi;\ x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n) = \uparrow ;$$

vagyis, lehet olyan $\varphi_4(x_1, x_2, x_3), \ldots, \varphi_n(x_1, x_2, x_3)$ matematikai függvényeket definiálni I-n, hogy I bármely x_1, x_2, x_3 elemére

$$\mathsf{M}(\Phi\ ;\ x_1, x_2, x_3, \varphi_4(x_1, x_2, x_3), \ldots, \varphi_n(x_1, x_2, x_3)) = \uparrow . \tag{5}$$

Legyen b az I-nek egy tetszőleges fix eleme. $\mathfrak{A}$ minden kifejezéséhez hozzárendeljük I egy elemét a következőképpen : az a kifejezéshez b-t rendeljük hozzá ; ha a $\mathsf{k}_1, \mathsf{k}_2, \mathsf{k}_3$ kifejezésekhez rendre az I halmaz c_1, c_2, c_3 elemeit rendeltük hozzá, akkor az $f_\nu(\mathsf{k}_1, \mathsf{k}_2, \mathsf{k}_3)$ kifejezéshez $\varphi_\nu(c_1, c_2, c_3)$-at rendeljük hozzá ($\nu = k, \ldots, n$). Végül $\mathfrak{A}$ minden formulájához hozzárendeljük az $\uparrow$ és $\downarrow$ logikai értékek egyikét a következőképpen : ha a $\mathsf{k}_1, \mathsf{k}_2$ kifejezésekhez rendre

[15] Az M szerkezetéről tett feltevés miatt ez valóban formulája az $\mathfrak{A}$-nak.

[16] *Skolem* a lemma bizonyítását (amellett, hogy a bizonyítás könnyebbik felét el is hagyja) beágyazza a már említett *Löwenheim*-féle tétel egyik új, a kiválasztási tételt fel nem használó bizonyításába. *Herbrand* viszont azáltal nehezíti meg a bizonyítás megértését, hogy az e dolgozatban elfogadott »halmazelméleti« álláspont helyett »bizonyításelméleti« álláspontra helyezkedik ; ugyanezt teszik *Hilbert* és *Bernays* is. Ezért is kívánatos e lemmának rövid halmazelméleti bizonyítását adni. Egyébként a fent kimondott tétel, a lemma *Herbrand*-féle bizonyítására hivatkozva, bebizonyítható a »bizonyításelméleti« álláspont alapján is.

az I halmaz c_1, c_2 elemeit rendeltük hozzá, akkor az $F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ formulához $\Phi(c_1, c_2)$ logikai értékét rendeljük hozzá ; ha a $\mathbf{G}$ formulához az $\uparrow$ értéket rendeltük hozzá, akkor $\overline{\mathbf{G}}$-hoz a $\downarrow$ értéket rendeljük hozzá, ha pedig $\mathbf{G}$-hez a $\downarrow$ értéket rendeltük hozzá, akkor $\overline{\mathbf{G}}$-hoz az $\uparrow$ értéket rendeljük hozzá ; a $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$ formulához a $\downarrow$ értéket rendeljük hozzá, ha $\mathbf{G}$-hez az $\uparrow$, $\mathbf{H}$-hoz pedig a $\downarrow$ értéket rendeltük hozzá, minden más esetben az $\uparrow$ értéket rendeljük $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$-hoz.

Könnyen látható, hogy ily módon $\mathfrak{A}$ axiómáihoz az $\uparrow$ értéket rendeltük hozzá. A logikai axiómák esetében ez abból következik, hogy a (3) formulákból, ha $\mathbf{G}$-t, $\mathbf{H}$-t és $\mathbf{K}$-t tetszőleges logikai értékekkel helyettesítjük bennük, majd az implikáció és negáció definíciója alapján kiszámítjuk értéküket, mindig $\uparrow$ -at kapunk ; a valódi axiómák esetében pedig (5)-ből. A hozzárendelés módjából következik az is, hogy ha $\mathbf{G}$ és $\mathbf{H}$ tetszőleges formulái $\mathfrak{A}$-nak, és $\mathbf{G}$-hez is, $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$-hoz is az $\uparrow$ logikai értéket rendeltük hozzá, akkor a $\mathbf{H}$-hoz hozzárendelt logikai érték is $\uparrow$. Ebből következik, hogy ha $\mathbf{G}$ az $\mathfrak{A}$ axiómarendszerben bebizonyítható tétel, akkor $\mathbf{G}$-hez az $\uparrow$ logikai értéket rendeltük hozzá ; ennélfogva a $\overline{\mathbf{G}}$-hoz hozzárendelt logikai érték $\downarrow$, és így $\overline{\mathbf{G}}$ nem lehet $\mathfrak{A}$-ban tétel, vagyis $\mathfrak{A}$ valóban ellentmondástalan.

Másrészt tegyük fel, hogy az $\mathfrak{A}$ axiómarendszer ellentmondástalan ; akkor megmutatjuk, hogy az $\mathfrak{A}$ formula kielégíthető. Világos, hogy a formulák, így tehát a valódi axiómák is, megszámlálható halmazt alkotnak. Legyen

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m, \ldots$$

a valódi axiómák egy megszámlálása. Jelölje K_m azoknak a kifejezéseknek halmazát, amelyek $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ valamelyikében a (4)-ben szereplő $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ vagy $f_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3), \ldots, f_n(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ gyanánt előfordulnak, K_ω pedig az $\mathfrak{A}$ összes kifejezéseinek halmazát. Világos, hogy

$$K_1 \subseteqq K_2 \subseteqq \ldots \subseteqq K_m \subseteqq \ldots \subseteqq K_\omega;$$

továbbá, hogy $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ az $F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ alakú formulákból, ahol $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in K_m$, implikációk és negációk segítségével jönnek létre.

Vezessük be, ha $\mathbf{G}$ és $\mathbf{H}$ az $\mathfrak{A}$ formulái, $(\mathbf{G} \& \mathbf{H})$-t rövidítés gyanánt $\overline{\mathbf{G} \rightarrow \overline{\mathbf{H}}}$ helyett,[17] továbbá, ha $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \ldots, \mathbf{G}_m$ az $\mathfrak{A}$ formulái, $(\mathbf{G}_1 \& \mathbf{G}_2 \& \ldots \& \mathbf{G}_m)$-et röviditės gyanánt $(\ldots(\mathbf{G}_1 \& \mathbf{G}_2) \& \ldots \& \mathbf{G}_m)$ helyett.[18] Akkor, $m = 1, 2, \ldots$ esetén, $(\mathbf{A}_1 \& \mathbf{A}_2 \& \ldots \& \mathbf{A}_m)$ az $\mathfrak{A}$ axiómarendszerben bebizonyítható tétel. Ennek megmutatására hivatkozom a (3) alakú

[17] A konjunkció és implikáció fenti definíciója alapján könnyen belátható, hogy tetszőleges A és B logikai értékekre $A \& B = \overline{A \rightarrow \overline{B}}$.

[18] A konjunkció fenti definíciója alapján könnyen belátható, hogy a konjunkció asszociatív művelet.

formulák következő ismert tulajdonságára[19]: minden olyan formulát, amely a logikai értékeken átfutó változókból véges számú implikáció és negáció segítségével jön létre, és amelynek értéke változóinak minden értéke mellett $\uparrow$, meg lehet kapni (3) alakú formulákból (ahol $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{K}$ tetszőleges, szintén a logikai értékeken átfutó változókból véges számú implikáció és negáció segítségével létrejövő formulákat jelölnek) véges számú leválasztás segítségével. Ezen természetesen nem változtat az sem, ha a logikai értékeken átfutó változókat betűk helyett összetett jelekkel jelöljük, pl. ha az $\mathfrak{A}$-nak $F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ alakú formulái, ahol $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in K_\omega$, szerepelnek ilyen változók gyanánt; ekkor tehát $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{K}$ helyébe $\mathfrak{A}$ tetszőleges formulái tehetők. Más szóval, $\mathfrak{A}$ minden olyan formulája megkapható véges számú leválasztással a logikai axiómákból, amelynek, ha benne az $F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ alakú formulákat, ahol $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in K_\omega$, a logikai értékeken átfutó változóknak tekintjük, e változók minden értéke mellett $\uparrow$ az értéke. Ilyen formula többek között minden

$$(6) \qquad (\mathbf{G} \to (\mathbf{H} \to \overline{(\mathbf{G} \to \overline{\mathbf{H}})}))$$

alakú formula, ahol $\mathbf{G}$ és $\mathbf{H}$ az $\mathfrak{A}$ tetszőleges formulái. Valóban, az implikáció és a negáció definíciója alapján könnyen látható, hogy a (6) formula értéke mindig $\uparrow$ lesz, ha $\mathbf{G}$ és $\mathbf{H}$ helyébe tetszőleges logikai értékeket írunk. Ezért tehát az $\mathfrak{A}$ minden (6) alakú formulája véges számú leválasztás segítségével megkapható a logikai axiómákból és így $\mathfrak{A}$-ban bebizonyítható tétel. A (6) formulából, $\mathbf{G}$-ből és $\mathbf{H}$-ból viszont $\overline{(\mathbf{G} \to \overline{\mathbf{H}})}$, vagyis $(\mathbf{G} \mathbin{\&} \mathbf{H})$, két további leválasztással adódik; tehát, ha $\mathbf{G}$ és $\mathbf{H}$ az $\mathfrak{A}$ axiómarendszer tételei, akkor $(\mathbf{G} \mathbin{\&} \mathbf{H})$ is bebizonyítható tétel $\mathfrak{A}$-ban. E tény iterált alkalmazása adja, hogy valahányszor $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \ldots, \mathbf{G}_m$ tételei $\mathfrak{A}$-nak, $(\mathbf{G}_1 \mathbin{\&} \mathbf{G}_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathbf{G}_m)$ is az; speciálisan, hogy $(\mathbf{A}_1 \mathbin{\&} \mathbf{A}_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathbf{A}_m)$ is tétele $\mathfrak{A}$-nak.

Ebből következik, hogy az $F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ alakú formuláknak, ahol $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in K_m$, a logikai értékeken átfutó változóknak tekintve őket, lehet olyan logikai értékeket adni, hogy $(\mathbf{A}_1 \mathbin{\&} \mathbf{A}_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathbf{A}_m)$ értéke $\uparrow$ legyen; különben $\overline{(\mathbf{A}_1 \mathbin{\&} \mathbf{A}_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathbf{A}_m)}$ értéke mindig $\uparrow$ lenne, tehát ez a formula is bebizonyítható tétel lenne az $\mathfrak{A}$ axiómarendszerben, ellentétben azzal a feltevéssel, hogy $\mathfrak{A}$ ellentmondástalan. Más szóval, a K_m halmazon lehet olyan $\Phi(x, y)$ predikátumot definiálni, hogy $(\mathbf{A}_1 \mathbin{\&} \mathbf{A}_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathbf{A}_m)$ értéke $\uparrow$ lesz, ha benne $F(x, y)$ helyébe $\Phi(x, y)$-t teszünk; ebből pedig következik, hogy ekkor $(\mathbf{A}_1 \mathbin{\&} \mathbf{A}_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathbf{A}_{m-1})$ és $\mathbf{A}_m$ értéke is $\uparrow$ lesz.

[19] L. pl. *L. Kalmár*, Über die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 7 (1935), 222—242., különösen 239—242. l. Magát ezt a tulajdonságot lényegében *Frege* vette észre először.

[20] Ugyanis a definíció szerint $(\mathbf{A}_1 \mathbin{\&} \mathbf{A}_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathbf{A}_m) = ((\mathbf{A}_1 \mathbin{\&} \mathbf{A}_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathbf{A}_{m-1}) \mathbin{\&} \mathbf{A}_m)$ és az itteni konjunkció a [17] lábjegyzet szerint ugyanaz, mint a fent definiált konjunkció.

Konstruáljunk egy gráfot a következőképpen. Minden ilyen $\Phi(x, y)$ predikátumnak feleltessük meg a gráf egy P_{mr} szögpontját ($r = 1, 2, \ldots, s_m$, ahol s_m az ilyen tulajdonságú predikátumok száma; s_m véges, mert K_m véges halmaz és így csak véges számú kétváltozós predikátum definiálható rajta). A P_{mr} és $P_{m+1, r'}$ szögpontokat akkor és csakis akkor kössük össze a gráf egy élével, ha a nekik megfelelő $\Phi(x, y)$ ill. $\Phi'(x, y)$ predikátumok $x, y \in K_m$ esetén megegyeznek (tehát $\Phi'(x, y)$ a $\Phi(x, y)$ »kiterjesztése«); más szögpontokat ne kössünk össze. Világos, hogy akkor minden $P_{m+1, r'}$ szögpontot ($m = 1, 2, \ldots$; $r' = 1, 2, \ldots, s_{m+1}$) összekötöttük legalább egy P_{mr} szögponttal. Ennélfogva a konstruált gráf teljesíti *Kőnig Dénes* végtelenségi lemmájának[21] feltételeit; ennélfogva van a gráfnak legalább egy $P_{1r_1} P_{2r_2} P_{3r_3} \ldots$ végtelen útja, úgy, hogy P_{mr_m}-et a gráf éle köti össze $P_{m+1, r_{m+1}}$-gyel ($m = 1, 2, \ldots$). Ha a P_{mr_m}-nek megfelelő, K_m-en definiált, predikátumot $\Phi_m(x, y)$-nal jelöljük, akkor tehát, minden m-re, $\Phi_m(x, y)$ megegyezik $\Phi_{m+1}(x, y)$-nal, és így, ha $m' > m$, $\Phi_{m'}(x, y)$-nal is, amennyiben $x, y \in K_m$.

Definiáljunk most K_ω-n egy $\Phi_\omega(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ predikátumot a következőképpen: legyen $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in K_\omega$ esetén $\Phi_\omega(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \Phi_m(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$, ahol m a legkisebb olyan pozitív egész szám, hogy $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in K_m$. Akkor tehát $\Phi_\omega(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \Phi_m(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ mindig áll, ha $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in K_m$. Be fogom bizonyítani, hogy $\mathbf{A}$ igaz lesz, ha $I = K_\omega$ és $F(x, y)$ helyébe $\Phi_\omega(x, y)$-t tesszük. Valóban, legyen $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ a K_ω három tetszőleges eleme; akkor $\mathbf{M}(F; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, f_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3), \ldots, f_n(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3))$ egyike az $\mathbf{A}_m$ valódi axiómáknak. De akkor nyilván

$$\mathbf{M}(\Phi_\omega; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, f_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3), \ldots, f_n(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)) =$$
$$= \mathbf{M}(\Phi_m; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, f_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3), \ldots, f_n(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)) = \uparrow,$$

hiszen $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, f_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3), \ldots, f_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \in K_m$. Eszerint az $\mathbf{A}$ formula valóban kielégíthető.

9. Ezekután meg fogok adni egy $\mathbf{B}$ formulát, amely akkor és csakis akkor elégíthető ki a végesben, ha az $\mathfrak{A}$ axiómarendszer ellentmondásos. Először tegyük fel, hogy $\mathfrak{A}$ ellentmondásos, akkor van $\mathfrak{A}$ formuláinak olyan $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \ldots, \mathbf{G}_m$ véges sorozata, amelynek minden $\mathbf{G}_\mu$ tagja vagy $\mathfrak{A}$-nak axiómája, vagy van olyan $\mu', \mu'' < \mu$, hogy $\mathbf{G}_{\mu''} = (\mathbf{G}_{\mu'} \rightarrow \mathbf{G}_\mu)$, továbbá van olyan $\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, m$, hogy $\mathbf{G}_{\mu'} = \overline{\mathbf{G}}_\mu$. Valóban, ilyen sorozatot kapunk, ha $\mathfrak{A}$ egy olyan $\mathbf{G}$ tételének bizonyítása után, amelyre nézve $\overline{\mathbf{G}}$ is bebizonyítható tétel $\mathfrak{A}$-ban, $\overline{\mathbf{G}}$ egy bizonyítását írjuk. Azt is feltehetjük, hogy $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \ldots, \mathbf{G}_m$ csupa különböző formulák, hiszen minden olyan tagját elhagyhatjuk a sorozatnak, amely már előbbi helyen előfordult.

[21] *D. König*, Sur les correspondences multivoques des ensembles, *Fundamenta Math.*, *8* (1926), 114—134., különösen 120—122. l.; Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche, *Acta Scientiarum Math.*, *3* (1927), 121—130., különösen 121—122. l.; *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (Leipzig, 1936), 81—82. l.

Tekintsük azt a J halmazt, amelynek elemei a $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \ldots, \mathbf{G}_m$ formulák, valamint ezek valódi részformulái és részkifejezései.[22] Definiáljuk J-n a $\Psi_4, \ldots, \Psi_n, \Omega, \Gamma, \Lambda, \Sigma, \Theta$ és Ξ predikátumokat a következőképpen:

$\Psi_\nu(x_1, x_2, x_3, y)$ akkor és csak akkor $\uparrow$, ha x_1, x_2, x_3 kifejezések és $y = f_\nu(x_1, x_2, x_3)$ $(\nu = 4, \ldots, n)$;

$\Omega(x_1, x_2, y)$ akkor és csak akkor $\uparrow$, ha x_1, x_2 kifejezések és $y = F(x_1, x_2)$;

$\Gamma(x_1, x_2, y)$ akkor és csak akkor $\uparrow$, ha x_1, x_2 formulák és $y = (x_1 \rightarrow x_2)$;

$\Lambda(x, y)$ akkor és csak akkor $\uparrow$, ha x formula és $y = \overline{x}$;

$\Sigma(x, y)$ akkor és csak akkor $\uparrow$, ha x valódi részkifejezése vagy valódi részformulája y-nak;

$\Theta(x)$ akkor és csak akkor $\uparrow$, ha x előfordul a $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \ldots, \mathbf{G}_m$ sorozatban;

$\Xi(x, y)$ akkor és csak akkor $\uparrow$, ha x megelőzi y-t a $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \ldots, \mathbf{G}_m$ sorozatban (azaz $x = \mathbf{G}_\mu$, $y = \mathbf{G}_{\mu'}$, $\mu < \mu'$).

Akkor a következő, formalizálva leírt,[23] állítások logikai értéke mind $\uparrow$ $(\nu = 4, \ldots, n$; a szabad változók mindenütt J tetszőleges elemei lehetnek):

$$\Psi_\nu(x_1, x_2, x_3, y) \rightarrow \Sigma(x_1, y)\ \Sigma(x_2, y)\ \Sigma(x_3, y) \tag{7}$$

(valóban, ha $y = f_\nu(x_1, x_2, x_3)$, akkor x_1, x_2, x_3 az y valódi részkifejezései, tehát ekkor az implikáció mindkét tagja[24] $\uparrow$, tehát az implikáció értéke $\uparrow$; ha

[22] Egy formula vagy kifejezés valódi részformulái, ill. valódi részkifejezései azok a formulák, ill. kifejezések, amelyekből felépül. A valódi részformula, ill. valódi részkifejezés fogalmát rekurzive (pl. a formulában vagy kifejezésben szereplő jelek száma szerinti rekurzióval) így lehet definiálni: az a-nak nincs valódi részkifejezése; egy $f_\nu(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ alakú kifejezésnek $(\nu = 4, \ldots, n)$ valódi részkifejezései $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ és valódi részkifejezéseik; egy $F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ alakú formula valódi részkifejezései $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ és valódi részkifejezéseik, valódi részformulája nincs; egy $\overline{\mathbf{G}}$ alakú formula valódi részkifejezései $\mathbf{G}$ valódi részkifejezései, valódi részformulái $\mathbf{G}$ és ennek valódi részformulái; egy $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$ alakú formula valódi részkifejezései $\mathbf{G}$ és $\mathbf{H}$ valódi részkifejezései, valódi részformulái $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ és ezek valódi részformulái. Ha a »valódi« jelzőt nem tesszük hozzá, akkor magát a kifejezést is hozzászámítjuk a részkifejezésekhez, ill. magát a formulát is a részformulákhoz; egy formula részkifejezései azok, amelyek valódi részkifejezései. »Részformula« és »részkifejezés« helyett sokszor röviden »rész«-t mondunk.

[23] A formalizálás a fent definiált logikai műveletek és kvantorok segítségével történik; közben a zárójeleket a szokásos módon elhagyjuk, ahol ez nem okoz félreértést; a konjunkció jelét legtöbbször elhagyjuk, vagy ponttal helyettesítjük; analóg tagok konjunkcióját Π jellel rövidítjük; a negáció jelét csak a predikátum jelének első betűje fölé tesszük; továbbá alkalmazzuk a fent definiált $\Delta(x, y)$ predikátumot is.

[24] $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$-ban $\mathbf{G}$-t az implikáció *előtagjának*, $\mathbf{H}$-t *utótagjának* nevezzük; együtt az implikáció *tagjai*. Hasonlóan beszélünk majd konjunkció és diszjunkció tagjairól is; a többtagú diszjunkciót természetesen hasonlóan definiáljuk, mint a többtagú konjunkciót.

$y \neq f_\nu(x_1, x_2, x_3)$, akkor az implikáció előtagja $\downarrow$, tehát az implikáció értéke ekkor is $\uparrow$);

(8) $$\Omega(x_1, x_2, y) \rightarrow \Sigma(x_1, y)\, \Sigma(x_2, y)$$

(valóban,[25] ha $y = F(x_1, x_2)$, akkor x_1, x_2, x_3 az y valódi részei);

(9) $$\Gamma(x_1, x_2, y) \rightarrow \Sigma(x_1, y)\, \Sigma(x_2, y)$$

(valóban, ha $y = (x_1 \rightarrow x_2)$, akkor x_1 és x_2 az y valódi részei);

(10) $$\Lambda(x, y) \rightarrow \Sigma(x, y)$$

(valóban, ha $y = \overline{x}$, akkor x az y valódi része);

(11) $$\overline{\Sigma}(x, x)$$

(valóban, J egy eleme sem lehet valódi része önmagának);

(12) $$\Sigma(x, y)\, \Sigma(y, z) \rightarrow \Sigma(x, z)$$

valóban, ha x valódi része y-nak, y pedig z-nek, akkor x valódi része z-nek);

(13) $$\Psi_\nu(x_1, x_2, x_3, z)\, \Psi_\nu(y_1, y_2, y_3, z) \rightarrow \Delta(x_1, y_1)\, \Delta(x_2, y_2)\, \Delta(x_3, y_3)$$

(valóban, ha $z = f_\nu(x_1\, x_2, x_3) = f_\nu(y_1, y_2, y_3)$, akkor $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3$);

(14) $$\Omega(x_1, x_2, z)\, \Omega(y_1, y_2, z) \rightarrow \Delta(x_1, y_1)\, \Delta(x_2, y_2)$$

(valóban, ha $z = F(x_1, x_2) = F(y_1, y_2)$, akkor $x_1 = y_1$ és $x_2 = y_2$);

(15) $$\Gamma(x_1, x_2, z)\, \Gamma(y_1, y_2, z) \rightarrow \Delta(x_1, y_1)\, \Delta(x_2, y_2)$$

(valóban, ha $z = (x_1 \rightarrow x_2) = (y_1 \rightarrow y_2)$, akkor $x_1 = y_1$ és $x_2 = y_2$);

(16) $$\Lambda(x, z)\, \Lambda(y, z) \rightarrow \Delta(x, y)$$

(valóban, ha $z = \overline{x} = \overline{y}$, akkor $x = y$);

(17) $$\Psi_\nu(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow \prod_{\substack{\nu'=4 \\ \nu' \neq \nu}}^{n} \overline{\Psi}_{\nu'}(y_1, y_2, y_3, x_4) \prod_{\mu=1}^{4} (\overline{\Omega}(y_1, y_2, x_\mu) \cdot$$
$$\cdot \overline{\Lambda}(y_1, y_2, x_\mu)\, \overline{\Lambda}(y, x_\mu))$$

(valóban, ha $x_4 = f_\nu(x_1, x_2, x_3)$, akkor x_4 nem lehet $f_\nu(y_1, y_2, y_3)$ alakú, ahol $\nu' \neq \nu$; továbbá, minthogy x_1, x_2, x_3, x_4 kifejezések, egyikük sem lehet $F(y_1, y_2)$, $(y_1 \rightarrow y_2)$, vagy $\overline{y}$ alakú);

[25] Mostantól kezdve csak ilyen rövid alakban adom meg az indokolást (arra az esetre szorítkozva, amikor az implikáció előtagja $\uparrow$). Teljes alakja hasonló volna, mint a (7) képlet utáni indokolásé. Az indokolásban a következő tényekre támaszkodunk: egy konjunkció $\uparrow$, ha minden tagja $\uparrow$; egy diszkonjunkció $\uparrow$, ha legalább egy tagja $\uparrow$; egy implikáció $\uparrow$, ha mindkét tagja $\uparrow$, vagy ha előtagja $\downarrow$; és az (Ex) kvantor definíciójára.

(18) $$\Omega(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \prod_{\mu=1}^{2} \overline{\Omega}(y_1, y_2, x_\mu) \prod_{\mu=1}^{3} (\overline{\Gamma}(y_1, y_2, x_\mu)\ \overline{\Lambda}(y, x_\mu))$$

(valóban, ha $x_3 = F(x_1, x_2)$, akkor x_1, x_2 kifejezések, tehát egyikük sem lehet $F(y_1, y_2)$, $(y_1 \rightarrow y_2)$ vagy $\overline{y}$ alakú; és az utóbbi kétféle alakú x_3 sem lehet);

(19) $$\Gamma(x_1, x_2, z) \rightarrow \prod_{\mu=1}^{2} ((Ey_1)(Ey_2)\,\Omega(y_1, y_2, x_\mu) \vee (Ey_1)(Ey_2)\,\Gamma(y_1, y_2, x_\mu) \vee \vee (Ey)\,\Lambda(y, x_\mu))\ \overline{\Lambda}(x, z)$$

(valóban, ha $z = (x_1 \rightarrow x_2)$, akkor x_1 és x_2 formulák, tehát vagy $F(y_1, y_2)$, vagy $(y_1 \rightarrow y_2)$, vagy $\overline{y}$ alakúak, ahol y_1, y_2, ill. y az x_1 és x_2 valódi részei, tehát x_1-gyel és x_2-vel együtt J-hez tartoznak; továbbá, akkor z nem lehet $\overline{x}$ alakú);

(20) $$\Lambda(x, z) \rightarrow ((Ey_1)(Ey_2)\,\Omega(y_1, y_2, x) \vee (Ey_1)(Ey_2)\,\Gamma(y_1, y_2, x) \vee (Ey)\,\Lambda(y, x))$$

(valóban, ha $z = \overline{x}$, akkor x formula, tehát vagy $F(y_1, y_2)$, vagy $(y_1 \rightarrow y_2)$, vagy $\overline{y}$ alakú, ahol y_1, y_2, ill. y az x valódi része, tehát x-szel együtt J-hez tartozik);

(21) $$\Theta(x)\,\Theta(y) \rightarrow (\Delta(x, y) \vee \Xi(x, y) \vee \Xi(y, x))$$

(valóban, ha $x = \mathbf{G}_\mu$, $y = \mathbf{G}_{\mu'}$, μ, $\mu' = 1, 2 \ldots, m$, akkor vagy $\mu = \mu'$, vagy $\mu < \mu'$, vagy $\mu' < \mu$);

(22) $$\overline{\Xi}(x, x)$$

(valóban, $x = \mathbf{G}_\mu = \mathbf{G}_{\mu'}$, μ, $\mu' = 1, 2, \ldots, m$, akkor $\mu < \mu'$ nem állhat, mert $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \ldots, \mathbf{G}_m$ a feltevés szerint különbözők);

(23) $$\Xi(x, y)\,\Xi(y, z) \rightarrow \Xi(x, z)$$

valóban, ha $x = \mathbf{G}_\mu$, $y = \mathbf{G}_{\mu'}$, $z = \mathbf{G}_{\mu''}$, $\mu, \mu', \mu'', = 1, 2, \ldots m$, $\mu < \mu$ és $\mu' < \mu''$, akkor $\mu < \mu''$);

(24) $$(Ex)(Ey)\,(\Theta(x)\,\Theta(y)\,\Lambda(x, y))$$

(valóban, a feltevés szerint van olyan $\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, m$, hogy $\mathbf{G}_{\mu'} = \overline{\mathbf{G}}_\mu$; ha $x = \mathbf{G}_\mu$, $y = \mathbf{G}_{\mu'}$, akkor x és y olyan elemei J-nek, hogy $\Theta(x) = \Theta(y) = \Lambda(x, y) = \uparrow$).

Még egy formalizált állításra lesz szükségünk, amelyik azt fejezi ki, hogy a $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \ldots, \mathbf{G}_m$ sorozat mindegyik formulája vagy axióma, vagy leválasztással keletkezik a sorozatban őt megelőző formulákból. Minthogy az, hogy mik a valódi axiómák, $\mathbf{M}$ szerkezetétől függ, valahogyan jellemeznünk kell ezt a szerkezetet. Evégett jegyezzük meg, hogy $\mathbf{M}$ részformuláinak van olyan $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \ldots, \mathbf{M}_r$ sorozata, hogy mindegyik $\mathbf{M}_\varrho = \mathbf{M}_\varrho(F; x_1, \ldots, x_n)$ vagy az $F(x_\mu, x_\nu)$ formulák egyike (μ, $\nu = 1, 2, \ldots, n$), vagy két, e sorozatban őt megelőző formulából implikációval keletkezik, azaz $\mathbf{M}_\varrho = (\mathbf{M}_{\varrho'} \rightarrow \mathbf{M}_{\varrho''})$, $\varrho', \varrho'' < \varrho$, vagy valamelyik, e sorozatban őt megelőző formulából negációval keletkezik, azaz $\mathbf{M}_\varrho = \overline{\mathbf{M}}_{\varrho'}$, $\varrho' < \varrho$; végül maga $\mathbf{M} = \mathbf{M}_r$. Jelöljük $\varrho_{11}, \varrho_{12}, \ldots, \varrho_{1i}$-vel

$\varrho\,(=1, 2, \ldots, r)$ azon értékeit, amelyekre M_ϱ az $F(x_\mu, x_\nu)$ formulák egyike, mégpedig legyen

$$\mathsf{M}_{\varrho_{1\varkappa}} = F(x_{\mu_\varkappa}, x_{\nu_\varkappa})\ (\varkappa = 1, 2, \ldots, i;\ \mu_\varkappa, \nu_\varkappa = 1, 2, \ldots, n);$$

jelöljük $\varrho_{21}, \varrho_{22}, \ldots, \varrho_{2j}$-vel ϱ azon értékeit, amelyekre M_ϱ két kisebb indexű $\mathsf{M}_{\varrho'}, \mathsf{M}_{\varrho''}$ implikációja, mégpedig legyen

$$\mathsf{M}_{\varrho_{2\varkappa}} = (\mathsf{M}_{\varrho_{4\varkappa}} \to \mathsf{M}_{\varrho_{5\varkappa}})\ (\varkappa = 1, 2, \ldots, j;\ \varrho_{4\varkappa}, \varrho_{5\varkappa} = 1, 2, \ldots, \varrho_{2\varkappa} - 1);$$

végül jelöljük $\varrho_{31}, \varrho_{32}, \ldots, \varrho_{3k}$-val ϱ azon értékeit, amelyekre M_ϱ egy kisebb indexű $\mathsf{M}_{\varrho'}$ negációja, mégpedig legyen

$$\mathsf{M}_{\varrho_{3\varkappa}} = \overline{\mathsf{M}_{\varrho_{6\varkappa}}}\ (\varkappa = 1, 2 \ldots, k;\ \varrho_{6\varkappa} = 1, 2, \ldots, \varrho_{3\varkappa} - 1).$$

(Nyilvánvaló, hogy $\varrho = 1, 2, \ldots, r$ esetén ϱ vagy a $\varrho_{1\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, i)$, vagy a $\varrho_{2\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, j)$, vagy a $\varrho_{3\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ egyike.) Akkor a szóbanforgó formalizált állítás a következő:

$$\begin{aligned}
(25)\quad & \Theta(x) \to ((Ep_1)(Ep_2)(Ep_{12})(\Gamma(p_1, p_2, p_{12})\,\Gamma(p_2, p_{12}, x)) \vee \\
& \vee (Ep_1)(Ep_2)(Ep_3)(Ep_{12})(Ep_{13})(Ep_{23})(Ep_{123})(Ep_{1213})(\Gamma(p_1, p_2, p_{12}) \cdot \\
& \cdot \Gamma(p_1, p_3, p_{13})\,\Gamma(p_2, p_3, p_{23})\,\Gamma(p_1, p_{23}, p_{123})\,\Gamma(p_{12}, p_{13}, p_{1213}) \cdot \\
& \qquad \cdot \Gamma(p_{123}, p_{1213}, x)) \vee \\
& \vee (Ep_1)(Ep_2)(Ep_{12})(Ep_1')(Ep_2')(Ep_{21}')(\Gamma(p_1, p_2, p_{12})\,\Lambda(p_1, p_1') \cdot \\
& \qquad \cdot \Lambda(p_2, p_2')\,\Gamma(p_2', p_1', p_{21}')\,\Gamma(p_{21}', p_{12}, x)) \vee \\
& \vee (Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_n)(Ez_1)(Ez_2)\ldots(Ez_r)\Big(\prod_{\nu=4}^{n} \Psi_\nu(y_1, y_2, y_3, y_\nu) \cdot \\
& \cdot \prod_{\varkappa=1}^{i} \Omega(y_{\mu_\varkappa}, y_{\nu_\varkappa}, z_{\varrho_{1\varkappa}}) \prod_{\varkappa=1}^{j} \Gamma(z_{\varrho_{4\varkappa}}, z_{\varrho_{5\varkappa}}, z_{\varrho_{2\varkappa}}) \prod_{\varkappa=1}^{k} \Lambda(z_{\varrho_{6\varkappa}}, z_{\varrho_{3\varkappa}})\,\Delta(x, z_r)\Big) \vee \\
& \vee (Ey)(Ez)(\Theta(y)\,\Theta(z)\,\Xi(y, x)\,\Xi(z, x)\,\Gamma(y, x, z))).
\end{aligned}$$

Ennek az állításnak is $\uparrow$ a logikai értéke. Valóban, ha x a $\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2, \ldots, \mathsf{G}_m$ formulák egyike, akkor

(a) vagy $x = (\mathsf{H} \to (\mathsf{G} \to \mathsf{H}))$; ez esetben $p_1 = \mathsf{G}$, $p_2 = \mathsf{H}$, $p_{12} = (\mathsf{G} \to \mathsf{H})$ az x-nek részformulái, tehát J-nek elemei; és ezekre $\Gamma(p_1, p_2, p_{12}) = \Gamma(p_2, p_{12}, x) = \uparrow$;

(b) vagy $x = ((\mathsf{G} \to (\mathsf{H} \to \mathsf{K})) \to ((\mathsf{G} \to \mathsf{H}) \to (\mathsf{G} \to \mathsf{K})))$; ez esetben $p_1 = \mathsf{G}, p_2 = \mathsf{H}, p_3 = \mathsf{K}, p_{12} = (\mathsf{G} \to \mathsf{H}), p_{13} = (\mathsf{G} \to \mathsf{K}),\ p_{23} = (\mathsf{H} \to \mathsf{K}),\ p_{123} = (\mathsf{G} \to (\mathsf{H} \to \mathsf{K})),\ p_{1213} = ((\mathsf{G} \to \mathsf{H}) \to (\mathsf{G} \to \mathsf{H}))$ részformulái x-nek, tehát J-nek elemei; és ezekre $\Gamma(p_1, p_2, p_{12}) = \Gamma(p_1, p_3, p_{13}) = \Gamma(p_2, p_3, p_{23}) = \Gamma(p_1, p_{23}, p_{123}) = \Gamma(p_{12}, p_{13}, p_{1213}) = \Gamma(p_{123}, p_{1213}, x) = \uparrow$;

(c) vagy $x = ((\overline{\mathsf{H}} \to \overline{\mathsf{G}}) \to (\mathsf{G} \to \mathsf{H}))$; ez esetben $p_1 = \mathsf{G}, p_2 = \mathsf{H}$, $p_{12} = (\mathsf{G} \to \mathsf{H})$, $p_1' = \overline{\mathsf{G}}$, $p_2' = \overline{\mathsf{H}}$, $p_{21}' = (\overline{\mathsf{H}} \to \overline{\mathsf{G}})$ részformulái x-nek, tehát J-nek elemei; és ezekre $\Gamma(p_1, p_2, p_{12}) = \Lambda(p_1, p_1') = \Lambda(p_2, p_2') = \Gamma(p_2', p_1', p_{21}') = \Gamma(p_{21}', p_{21}, x) = \uparrow$;

(d) vagy $x = \mathbf{M}(F; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, f_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3), \ldots, f_n(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3))$; ez esetben $y_1 = \mathbf{k}_1, y_2 = \mathbf{k}_2, y_3 = \mathbf{k}_3, y_4 = f_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3), \ldots, y_n = f_n(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ részkifejezései, $z_\varrho = \mathbf{M}_\varrho(F; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, f_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \ldots, f_n(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3))$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$ pedig részformulái $x = z_r$-nek, tehát J-nek elemei ; és ezekre $y_\nu = f_\nu(y_1, y_2, y_3)$ $(\nu = 4, \ldots, n)$, $z_{\varrho_{1\varkappa}} = F(y_{\mu_\varkappa}, y_{\nu_\varkappa})$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, i)$, $z_{\varrho_{2\varkappa}} = (z_{\varrho_{4\varkappa}} \to z_{\varrho_{5\varkappa}})$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, j)$, $z_{\varrho_{3\varkappa}} = \overline{z_{\varrho_{6\varkappa}}}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$; tehát $\Psi_\nu(y_1, y_2, y_3, y_\nu) = \uparrow$, ha $\nu = 4, \ldots, n$; $\Omega(y_{\mu_\varkappa}, y_{\nu_\varkappa}, z_{\varrho_{1\varkappa}}) = \uparrow$, ha $\varkappa = 1, 2, \ldots, i$; $\Gamma(z_{\varrho_{4\varkappa}}, z_{\varrho_{5\varkappa}}, z_{\varrho_{2\varkappa}}) = \uparrow$, ha $\varkappa = 1, 2, \ldots, j$; $\Lambda(z_{\varrho_{6\varkappa}}, z_{\varrho_{3\varkappa}}) = \uparrow$, ha $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$; és $\Delta(x, z_r) = \uparrow$;

(e) vagy van olyan $\mu', \mu'' < \mu$, hogy $\mathbf{G}_{\mu''} = (\mathbf{G}_{\mu'} \to x)$; ez esetben $y = \mathbf{G}_{\mu'}$, $z = \mathbf{G}_{\mu''}$ a J elemei és $\Theta(y) = \Theta(z) = \Xi(y, x) = \Xi(z, x) = \Gamma(y, x, z) = \uparrow$.

Ezek szerint az (a) esetben a (25) formulában szereplő diszjunkció első tagjának, a (b) esetben a második, a (c) esetben a harmadik, a (d) esetben a negyedik, az (e) esetben pedig az ötödik tagjának értéke $\uparrow$, úgy, hogy ha x a $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \ldots, \mathbf{G}_m$ formulák egyike, akkor az implikáció utótagja is $\uparrow$.

Képezzük a (7)—(25) állítások konjunkcióját ((7)-ben, (13)-ban és (17)-ben $\nu = 4, \ldots, n$-re), kössük le a szabad változókat a kapott állítás elejére tett és az egész állításra vonatkozó (x_1) (x_2) (x_3) (x_4) (x) (y_1) (y_2) (y_3) (y) (z) kvantorokkal, és pótoljuk a $\Psi_4(x, y, z, u), \ldots, \Psi_n(x, y, z, u)$, $\Omega(x, y, z)$, $\Gamma(x, y, z)$, $\Lambda(x, y)$, $\Sigma(x, y)$, $\Theta(x)$ és $\Xi(x, y)$ predikátumokat különböző predikátumváltozókkal. Így egy **B** formulát kapunk. Az eddigiek szerint **B** kielégíthető a véges J halmazon, ha $\mathfrak{A}$ ellentmondásos, vagyis, ha **A** nem elégíthető ki.

10. Meg fogjuk mutatni, hogy viszont is, ha **B** kielégíthető egy véges halmazon, akkor $\mathfrak{A}$ ellentmondásos, vagyis **A** nem elégíthető ki.

Tegyük tehát fel, hogy **B** kielégíthető egy véges (nem üres) J' halmazon. Akkor, a J'-n definiált $\Psi_4(x, y, z, u), \ldots, \Psi_n(x, y, z, u)$, $\Omega(x, y, z)$, $\Gamma(x, y, z)$, $\Lambda(x, y)$, $\Sigma(x, y)$, $\Theta(x)$ és $\Xi(x, y)$ predikátumok alkalmas választása esetén (7)—(25) értéke $\uparrow$ lesz (a bennük előforduló kvantorokat persze úgy értve, hogy J' játssza a kvantorok definíciójában szereplő I halmaz szerepét).

Jelöljük $\nu = 4, \ldots, n$ esetén J'_{Ψ_ν}-vel J' azon z elemeinek halmazát, amelyekre van olyan $x_1, x_2, x_3 \in J'$, hogy $\Psi_\nu(x_1, x_2, x_3, z) = \uparrow$. (13) miatt ezeket az x_1, x_2, x_3 elemeket z egyértelműen meghatározza ; legyen $x_1 = \psi_1(z)$, $x_2 = \psi_2(z)$, $x_3 = \psi_3(z)$. E jelölésben nem tettük ki, hogy melyik ν-ről van szó ; ez nem okozhat félreértést, hiszen (17) miatt, ha z valamelyik J'_{Ψ_ν}-nek eleme, a ν-t is egyértelműen meghatározza a z. Eszerint $J'_{\Psi_4}, \ldots, J'_{\Psi_n}$ páronkint idegen halmazok és a $\psi_1(z), \psi_2(z), \psi_3(z)$ matematikai függvények az egész $J'_\Psi = J'_{\Psi_4} + \ldots + J'_{\Psi_n}$ halmazon értelmezve vannak. (7) miatt $z \in J'_\Psi$ esetén $\Sigma(\psi_1(z), z) = \Sigma(\psi_2(z), z) = \Sigma(\psi_3(z), z) = \uparrow$.

Hasonlóan, jelöljük J'_Ω-val J' azon z elemeinek halmazát, amelyekre van olyan $x_1, x_2 \in J'$, hogy $\Omega(x_1, x_2, z) = \uparrow$. Ezt az x_1 és x_2 elemet (14) miatt z egyértelműen meghatározza; legyen $x_1 = \omega_1(z)$, $x_2 = \omega_2(z)$. Akkor az $\omega_1(z)$, $\omega_2(z)$ matematikai függvények a J'_Ω halmazon értelmezve vannak; (8) miatt $z \in J'_\Omega$ esetén $\Sigma(\omega_1(z), z) = \Sigma(\omega_2(z), z) = \uparrow$.

Jelöljük J'_Γ-val J' azon z elemeinek halmazát, amelyekre van olyan $x_1, x_2 \in J'$, hogy $\Gamma(x_1, x_2, z) = \uparrow$. Ezt az x_1 s x_2 elemet (15) miatt z egyértelműen meghatározza; legyen $x_1 = \gamma_1(z), x_2 = \gamma_2(z)$. Akkor a $\gamma_1(z)$, $\gamma_2(z)$ matematikai függvények a J'_Γ halmazon értelmezve vannak; (9) miatt $z \in J'_\Gamma$ esetén $\Sigma(\gamma_1(z), z) = \Sigma(\gamma_2(z), z) = \uparrow$.

Végül jelöljük J'_Λ-val J' azon z elemeinek halmazát, amelyre van olyan $x \in J'$, hogy $\Lambda(x, z) = \uparrow$. Ezt az x-et (16) miatt z egyértelműen meghatározza; legyen $x = \lambda(z)$. Akkor a $\lambda(z)$ matematikai függvény a J'_Λ halmazon értelmezve van; (10) miatt $z \in J'_\Lambda$ esetén $\Sigma(\lambda(z), z) = \uparrow$.

(17), (18) és (19) miatt J'_Ψ, J'_Ω, J'_Γ, J'_Λ páronkint idegen halmazok. Legyen $J'_F = J'_\Omega + J'_\Gamma + J'_\Lambda$, $J'_K = J' - J'_F$ (az F és K indexek a »formula« ill. a »kifejezés« szóra céloznak). (17), (18), (19) és (20) miatt $z \in J'_\Psi$ esetén $\psi_1(z), \psi_2(z), \psi_3(z) \in J'_K$, $z \in J'_\Omega$ esetén $\omega_1(z), \omega_2(z) \in J'_K$, $z \in J'_\Gamma$ esetén $\gamma_1(z), \gamma_2(z) \in J'_F$, $z \in J'_\Lambda$ esetén $\gamma(z) \in J'_F$.

(24)-ből következik, hogy J'_Λ nem üres halmaz és így J'_F sem. Megmutatjuk, hogy J'_K sem üres. Ehhez a következő lemmára van szükségünk, amelynek különben is jó hasznát vesszük a továbbiakban.

J'-nek nincs olyan nem üres J'' részhalmaza, amelyen definiálható lenne olyan $\delta(z)$ matematikai függvény, amelyre J'' minden z elemére $\delta(z) \in J''$ és $\Sigma(\delta(z), z) = \uparrow$ állna.

Valóban, ha volna J'-nek ilyen nem üres J'' részhalmaza, akkor legyen u_1 a J'' valamely eleme és, ha $u_l \in J''$ már definiálva van, legyen $u_{l+1} = \delta(u_l)$ $(l = 1, 2, \ldots)$. Akkor $u_l \in J''$ és $\Sigma(u_{l+1}, u_l) = \uparrow$, ha $l = 1, 2, \ldots$ Ezért, (12) folytán, $p, q = 1, 2, \ldots$ és $p > q$ esetén $\Sigma(u_p, u_q) = \uparrow$. Így, (11) folytán, $p, q = 1, 2, \ldots$ és $p \neq q$ esetén $u_p \neq u_q$; vagyis $u_1, u_2, \ldots$ mind különbözők volnának, ami nem lehet, mert J' véges halmaz.

A lemmából következik, hogy J'_Ω nem üres halmaz. Különben $J'_F = J'_\Gamma + J'_\Lambda$ volna; tehát

$$\delta(z) = \begin{cases} \gamma_1(z), \text{ ha } z \in J'_\Gamma, \\ \lambda(z), \text{ ha } z \in J'_\Lambda \end{cases}$$

az egész J'_F halmazon definiálva volna és $z \in J'_F$ esetén $\delta(z) \in J'_F$ és $\Sigma(\delta(z), z) = \uparrow$ állna, ami a lemma szerint nem lehetséges. Ebből az is következik, hogy J'_K nem üres; valóban, ha z a J'_Ω akármelyik eleme, akkor pl. $\omega_1(z) \in J'_K$.

(17) miatt J'_Ψ részhalmaza J'_K-nek. Megmutatom, hogy J'_Ψ *valódi* részhalmaza J'_K-nak. Valóban, ha $J'_\Psi = J'_K$ volna, akkor $\delta(z) = \psi_1(z)$ az egész

J'_K halmazon értelmezve volna és $z \in J'_K$ esetén $\delta(z) \in J'_K$ és $\Sigma(\delta(z), z) = \uparrow$ állna, ami a lemma szerint nem lehetséges.

Rendeljük hozzá J'_K egyes elemeihez az $\mathfrak{A}$ axiómarendszer egy-egy kifejezését, J'_F egyes elemeihez $\mathfrak{A}$ egy-egy formuláját a következőképpen (utólag majd megmutatom, hogy így J'_K, ill. J'_F *minden* eleméhez hozzárendeltünk egy kifejezést, ill. formulát). Ha $z \in J'_K - J'_\psi$, akkor rendeljük z-hez az a kifejezést. Ha $z \in J'_{\psi_\nu}$, $\nu = 4, \ldots, n$, és $\psi_1(z)$-hez a $\mathbf{k}_1$, $\psi_2(z)$-hez a $\mathbf{k}_2$, $\psi_3(z)$-hez a $\mathbf{k}_3$ kifejezést rendeltük hozzá, akkor rendeljük z-hez az $f_\nu(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ kifejezést. Ha $z \in J'_\Omega$ és $\omega_1(z)$-hez a $\mathbf{k}_1$, $\omega_2(z)$-hez a $\mathbf{k}_2$ kifejezést rendeltük hozzá, akkor rendeljük z-hez az $F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ formulát. Ha $z \in J'_\Gamma$ és $\gamma_1(z)$-hez a $\mathbf{H}_1$, $\gamma_2(z)$-hez a $\mathbf{H}_2$ formulát rendeltük hozzá, akkor rendeljük z-hez a $(\mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_2)$ formulát. Ha végül $z \in J'_\Lambda$ és $\lambda(z)$-hez a $\mathbf{H}$ formulát rendeltük hozzá, akkor rendeljük z-hez a $\overline{\mathbf{H}}$ formulát.

Ily módon J'_K minden eleméhez hozzárendeltük $\mathfrak{A}$ egy kifejezését. Valóban, legyen J''_K a J'_K azon elemeinek halmaza, amelyekhez nem rendeltük hozzá $\mathfrak{A}$ egy kifejezését sem. Ha $z \in J''_K$, akkor $z \in J'_\psi$ (mert $J'_K - J'_\psi$ elemeihez hozzárendeltük $\mathfrak{A}$ egy kifejezését, t. i. a-t) ; és $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, $\psi_3(z)$ valamelyike szintén eleme J''_K-nak (különben mindegyikhez hozzárendeltük volna $\mathfrak{A}$ egy kifejezését és így z-hez is). Legyen $z \in J''_K$ esetén $\delta(z)$ az első a $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, $\psi_3(z)$ közül, amely eleme J''_K-nak. Akkor $z)$ értelmezve van a J''_K halmazon, továbbá $z \in J''_K$ esetén $\delta(z) \in J''_K$ és $\Sigma(\quad z), z) = \uparrow$. Tehát a lemma szerint J''_K üres ; vagyis valóban J'_K minden eleméhez hozzárendeltük $\mathfrak{A}$ egy kifejezését.

Hasonlóan megmutathatjuk, hogy J'_F minden eleméhez hozzárendeltük $\mathfrak{A}$ egy formuláját. Legyen ugyanis J''_F a J'_F halmaz azon elemeinek halmaza, amelyekhez nem rendeltük hozzá $\mathfrak{A}$ egy formuláját sem. Ha $z \in J''_F$, akkor $z \in J'_\Gamma + J'_\Lambda$ (hiszen $z \in J'_\Omega$ esetén $\omega_1(z)$, $\omega_2(z) \in J'_K$, tehát, mint láttuk, $\omega_1(z)$-hez és $\omega_2(z)$-hez hozzárendeltük $\mathfrak{A}$ egy kifejezését és így z-hez is hozzárendeltük $\mathfrak{A}$ egy formuláját). Továbbá, ha $z \in J''_F$ és $z \in J'_\Gamma$, akkor $\gamma_1(z)$ és $\gamma_2(z)$ egyike, ha pedig $z \in J'_F$ és $z \in J'_\Lambda$, akkor $\lambda(z)$ szintén eleme J''_F-nek (különben $\gamma_1(z)$-hez is, $\gamma_2(z)$-hez is, ill. $\lambda(z)$-hez, hozzárendeltük volna $\mathfrak{A}$ egy formuláját és így z-hez is). Tehát, ha $z \in J''_F$, $z \in J'_\Gamma$ esetén $\delta(z)$ a $\gamma_1(z)$ és $\gamma_2(z)$ közül az első, amely eleme J''_F-nek, $z \in J''_F$, $z \in J'_\Lambda$ esetén pedig $\delta(z) = \lambda(z)$, akkor $\delta(z)$ az egész J''_F halmazon definiálva van, továbbá $z \in J''_F$ esetén $\delta(z) \in J''_F$ és $\Sigma(\delta(z), z) = \uparrow$. Tehát a lemma szerint J''_F is üres ; vagyis J'_F minden eleméhez hozzárendeltük $\mathfrak{A}$ egy formuláját.

Ezek szerint a hozzárendelés fenti módját így is ki lehet mondani : Ha $\Psi_\nu(x_1, x_2, x_3, z) = \uparrow$ $(\nu = 4, \ldots, n)$, akkor x_1-hez, x_2-höz és x_3-hoz rendre bizonyos $\mathbf{k}_1$ $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$ kifejezéseket rendeltünk hozzá, z-hez pedig az $f_\nu(\mathbf{k}_1 \; \mathbf{k}_2 \; \mathbf{k}_3)$, kifejezést. Ha $\Omega(x_1, x_2, z) = \uparrow$, akkor x_1-hez és x_2-höz rendre bizonyos $\mathbf{k}_1$ $\mathbf{k}_2$ kifejezéseket rendeltünk hozzá, z-hez pedig az $F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ formulát. Ha

$\Gamma(x_1, x_2, z) = \uparrow$, akkor x_1-hez és x_2-höz rendre bizonyos $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ formulákat rendeltünk hozzá, z-hez pedig a $(\mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_2)$ formulát. Ha $\Lambda(x, z) = \uparrow$, akkor x-hez bizonyos $\mathbf{H}$ formulát rendeltük hozzá, z-hez pedig a $\overline{\mathbf{H}}$ formulát. Ha $\Psi_\nu(x_1, x_2, x_3, z)$ $(\nu = 4, \ldots, n)$, $\Omega(x_1, x_2, z)$, $\Gamma(x_1, x_2, z)$, $\Lambda(x, z)$ mind $\downarrow$ (J' bármely x_1, x_2, x_3, ill. x_1, x_2, ill. x elemére), akkor z-hez az a kifejezést rendeltük hozzá.

(21), (22) és (23) folytán (amelyekből $\Xi(x, y) \rightarrow \Xi(y, x) = \uparrow$ is következik, ha $x, y \in J'$,) J'-nek azok az x elemei, amelyekre $\Theta(x) = \uparrow$ (és (24) miatt van ilyen elem), a $\Xi(x, y)$ reláció által lineárisan rendezett (és természetesen véges) halmazt alkotnak. Legyenek e halmaz elemei, rendezésük sorrendjében, $g_1, g_2, \ldots, g_m$, úgy, hogy $\mu, \mu' = 1, 2 \ldots, m$ esetén $\Xi(g_\mu, g_{\mu'})$ akkor és csak akkor $\uparrow$, ha $\mu < \mu'$. Jelöljük $\mathbf{G}_\mu$-vel $\mathfrak{A}$-nak azt a kifejezését, vagy formuláját, amely g_μ-höz van hozzárendelve $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$.

(25) folytán $\mu = 1, 2, \ldots, m$ esetén a következő lehetőségek egyike áll:

(a) Van olyan $p_1, p_2, p_{12} \in J'$, hogy $\Gamma(p_1, p_2, p_{12}) = \Gamma(p_2, p_{12}\ g_\mu) = \uparrow$. Ekkor p_1-hez és p_2-höz $\mathfrak{A}$-nak bizonyos $\mathbf{G}$, ill. $\mathbf{H}$ formulái vannak hozzárendelve, p_{12}-höz pedig a $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$ formula, végül g_μ-höz a $(\mathbf{H} \rightarrow (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}))$ formula. Ekkor tehát $\mathbf{G}_\mu = (\mathbf{H} \rightarrow (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}))$.

(b) Van olyan $p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}\ p_{23}, p_{123}, p_{1213} \in J'$, hogy $\Gamma(p_1, p_2, p_{12}) = \Gamma(p_1, p_3, p_{13}) = \Gamma(p_2, p_3, p_{23}) = \Gamma(p_1, p_{23}, p_{123}) = \Gamma(p_{12}, p_{13}, p_{1213}) = \Gamma(p_{123}, p_{1213}, g_\mu) = \uparrow$. Ekkor p_1-hez és p_2-höz $\mathfrak{A}$-nak bizonyos $\mathbf{G}$, ill. $\mathbf{H}$ formulái vannak hozzárendelve, p_{12}-höz pedig a $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$ formula; p_3-hoz is a $\mathfrak{A}$-nak valamely $\mathbf{K}$ formulája van hozzárendelve, p_{13}-hoz a $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{K})$ p_{23}-hoz pedig a $(\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{K})$ formula; továbbá p_{123}-hoz a $(\mathbf{G} \rightarrow (\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{K}))$, p_{1213}-hoz a $((\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}) \rightarrow (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{K}))$, végül g_μ-höz a $\mathbf{G}_\mu = ((\mathbf{G} \rightarrow (\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{K})) \rightarrow ((\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}) \rightarrow (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{K})))$ formula.

(c) Van olyan $p_1, p_2, p_{12}, p'_1\ p'_2\ p'_{21} \in J'$, hogy $\Gamma(p_1\ p_2, p_{12}) = \Lambda(p_1, p'_1) = \Lambda(p_2, p'_2) = \Gamma(p'_2, p'_1\ p'_{21}) = \Gamma(p'_{21}, p_{12}, g_\mu) = \uparrow$. Ekkor p_1-hez és p_2-höz $\mathfrak{A}$-nak bizonyos $\mathbf{G}$, ill. $\mathbf{H}$ formulái vannak hozzárendelve, továbbá p_{12}-höz a $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$, p'_1-höz a $\overline{\mathbf{G}}$, p'_2-höz a $\overline{\mathbf{H}}$, p'_{21}-hoz a $(\overline{\mathbf{H}} \rightarrow \overline{\mathbf{G}})$, végül g_μ-höz a $\mathbf{G}_\mu = ((\overline{\mathbf{H}} \rightarrow \overline{\mathbf{G}}) \rightarrow (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}))$ formula. Az (a), (b), (c) esetekben tehát $\mathbf{G}_\mu$ logikai axióma.

(d) Van olyan $y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_r \in J'$, hogy $\nu = 4, \ldots, n$-re $\Psi_\nu(y_1, y_2, y_3, y_\nu) = \uparrow$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, i$-re $\Omega(y_{\mu_\varkappa}, y_{\nu_\varkappa}, z_{\varrho_{1\varkappa}}) = \uparrow$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, j$-re $\Gamma(z_{\varrho_{4\varkappa}}, z_{\varrho_{5\varkappa}}, z_{\varrho_{2\varkappa}}) = \uparrow$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$-ra $\Lambda(z_{\varrho_{6\varkappa}}, z_{\varrho_{3\varkappa}}) = \uparrow$, végül $\Delta(g_\mu, z_r) = \uparrow$. Ekkor y_1-hez, y_2-höz és y_3-hoz $\mathfrak{A}$-nak rendre bizonyos $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$ kifejezései vannak hozzárendelve, $\nu = 4, \ldots, n$ esetén pedig y_ν-höz a $\mathbf{k}_\nu = f_\nu(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ kifejezés van hozzárendelve. Továbbá $\varrho = 1, 2, \ldots, r$ esetén z_ϱ-hoz $\mathfrak{A}$-nak valamely $\mathbf{H}_\varrho$ formulája van hozzárendelve; ugyanis z_ϱ vagy a $z_{\varrho_{1\varkappa}}$-k $(k = 1, 2, \ldots, i)$, vagy a $z_{\varrho_{2\varkappa}}$-k $(\varkappa = 1, 2, \ldots, j)$, vagy a $z_{\varrho_{3\varkappa}}$-k $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ egyike. Mégpedig, ha $\varrho = \varrho_{1\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, i)$, akkor $\mathbf{H}_\varrho = F(\mathbf{k}_{\mu_\varkappa},$

$\mathbf{k}_{\nu_\varkappa}$), ha $\varrho = \varrho_{2\varkappa}$ $(\varkappa = 1, \ldots, j)$, akkor $\mathbf{H}_\varrho = (\mathbf{H}_{\varrho_{4\varkappa}} \to \mathbf{H}_{\varrho_{5\varkappa}})$, ha pedig $\varrho = \varrho_{3\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$, akkor $\mathbf{H}_\varrho = \overline{\mathbf{H}_{\varrho_{6\varkappa}}}$. Ebből ϱ szerinti teljes indukcióval adódik, hogy

(26) $$\mathbf{H}_\varrho = \mathbf{M}_\varrho(F;\, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n),$$

ha $\varrho = 1, 2, \ldots, r$. Valóban, ez áll $\varrho = \varrho_{1\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, i)$ esetén, hiszen akkor

$$\mathbf{H}_\varrho = F(\mathbf{k}_{\mu_\varkappa}, \mathbf{k}_{\nu_\varkappa}) = \mathbf{M}_{\varrho_{1\varkappa}}(F;\, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n) = \mathbf{M}_\varrho(F;\, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n).$$

Ha feltesszük, hogy (26) áll minden ϱ-nál kisebb ϱ'-re, akkor ϱ'-re is áll. Valóban, ha $\varrho = \varrho_{2\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, j)$, akkor

$$\mathbf{H}_\varrho = (\mathbf{H}_{\varrho_{4\varkappa}} \to \mathbf{H}_{\varrho_{5\varkappa}}),$$

ahol $\varrho_{4\varkappa} < \varrho$ és $\varrho_{5\varkappa} < \varrho$; tehát, ha (26) ϱ helyett $\varrho_{4\varkappa}$-ra és $\varrho_{5\varkappa}$-ra áll, akkor

$$\mathbf{H}_\varrho = (\mathbf{M}_{\varrho_{4\varkappa}}(F;\, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n) \to \mathbf{M}_{\varrho_{5\varkappa}}(F;\, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n)) =$$
$$= \mathbf{M}_{\varrho_{2\varkappa}}(F;\, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n) = \mathbf{M}_\varrho(F;\, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n).$$

Ha pedig $\varrho = \varrho_{3\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$, akkor

$$\mathbf{H}_\varrho = \overline{\mathbf{H}_{\varrho_{6\varkappa}}},$$

ahol $\varrho_{6\varkappa} < \varrho$; tehát, ha (26) ϱ helyett $\varrho_{6\varkappa}$-ra áll, akkor

$$\mathbf{H}_\varrho = \overline{\mathbf{M}_{\varrho_{6\varkappa}}(F;\, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n)} = \mathbf{M}_{\varrho_{3\varkappa}}(F;\, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n) =$$
$$= \mathbf{M}_\varrho(F;\, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n).$$

Végül, $\Delta(g_\mu, z_r) = \uparrow$ miatt, g_μ-höz ugyanaz a formula van hozzárendelve, mint z_r-hez, vagyis

$$\mathbf{G}_\mu = \mathbf{H}_r = \mathbf{M}_r(F;\, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n) = \mathbf{M}_r(F;\, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, f_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3), \ldots,$$
$$f_n(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3));$$

tehát a (d) esetben $\mathbf{G}_\mu$ valódi axióma.

(e) Van olyan $y, z \in J'$, hogy $\Theta(y) = \Theta(z) = \Xi(y, g_\mu) = \Xi(z, g_\mu) = \Gamma(y, g_\mu, z) = \uparrow$. Ekkor $y = g_{\mu'}$, $z = g_{\mu''}$, ahol $\mu', \mu'' < \mu$; így tehát $\Gamma(g_{\mu'}, g_\mu, g_{\mu''}) = \uparrow$. Ennélfogva $\mathbf{G}_{\mu'}$ és $\mathbf{G}_\mu$, amelyek $g_{\mu'}$-höz, ill. g_μ-höz vannak hozzárendelve, formulák és $\mathbf{G}_{\mu''} = (\mathbf{G}_{\mu'} \to \mathbf{G}_\mu)$; vagyis az (e) esetben $\mathbf{G}$ leválasztással keletkezik $\mathbf{G}_{\mu'}$-ből és $\mathbf{G}_{\mu''}$-ből.

Így $\mathbf{G}_\mu$ mindig $\mathfrak{A}$-nak formulája, mégpedig vagy axiómája, vagy a $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2, \ldots, \mathbf{G}_m$ sorozatban őt megelőző formulákból leválasztással jön létre; más szóval, $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \ldots, \mathbf{G}_m$ bizonyítás az $\mathfrak{A}$ axiómarendszerben.

(24) miatt vannak J'-nek olyan x és y elemei, hogy $\Theta(x) = \Theta(y) = \Delta(x, y) = \uparrow$; tehát $x = g_\mu$, $y = g_{\mu'}$, ahol $\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, m$. Így $\Delta(g_\mu, g_{\mu'}) = \uparrow$, vagyis $\mathbf{G}_{\mu'} = \overline{\mathbf{G}}_\mu$; tehát $\mathfrak{A}$ valóban ellentmondásos. Ezzel a kimondott tételt bebizonyítottuk.

A $\mathbf{B}$ formulában szerepel a $\Delta(x, y)$ predikátum. Ezt azonban ki lehet belőle küszöbölni[26] ; vagyis **B**-hez egy másik **B**′ formulát lehet konstruálni, amelyik akkor és csakis akkor elégíthető ki a végesben, ha **B** kielégíthető a végesben[27].

11. Könnyű látni, hogy a **B** formula **A**-tól rekurzív módon függ (a [6] lábjegyzetben idézett dolgozatokban definiált értelemben). Így, ha volna olyan rekurzív algoritmus, amelynek segítségével bármely adott formuláról el lehetne dönteni, hogy kielégíthető-e a végesben, akkor volna olyan rekurzív algoritmus is, amellyel bármely adott formuláról el lehetne dönteni, kielégíthető-e egyáltalában, vagy nem. Ez az utóbbi algoritmus abban állna, hogy az előző algoritmust az adott **A** formulához a fenti, rekurzív módon hozzárendelt **B** formulára alkalmazzuk. Ilyen algoritmus azonban *Church* idézett tétele szerint nem lehetséges ; így tehát *olyan rekurzív algoritmus sem lehetséges, amellyel bármely adott formuláról el lehetne dönteni, kielégíthető-e a végesben.* Ebből következik az is, hogy *nincs olyan rekurzív algoritmus, amelynek segítségével bármely adott formuláról el lehetne dönteni, azonosan igaz-e a végesben* ; ugyanis, mint már említettem, egy formula akkor és csak akkor elégíthető ki a végesben, ha negációja nem azonosan igaz a végesben. Ez éppen *Trahtyenbrot* említett tétele.

Jegyezzük meg még *Trahtyenbrot* e tételének néhány érdekes következményét. Mindenekelőtt következik belőle, hogy *a végesben azonosan igaz formulák C_ω halmaza nem lehet rekurzív módon megszámlálható.*[28] Valóban, az a már említett algoritmus, amelynek segítségével bármely adott véges n számosságra el lehet dönteni bármely adott formuláról, azonosan igaz-e az n számosságban, mutatja, hogy az n számosságban azonosan igaz formulák C_n halmaza és így komplementer halmaza, $\overline{C_n}$ is, rekurzív halmazok és n-től is rekurzív módon függnek. Ebből következik, hogy $\overline{C_n}$ nemcsak hogy rekurzív módon megszámlálható, hanem ráadásul még úgy is, hogy a megszámlálásban a $\overline{C_n}$ halmaz m-edik eleme rekurzív módon függjön n-től és m-től. Ennélfogva az összes $\overline{C_n}$ halmazok $\Sigma\,\overline{C_n}$ összege rekurzív módon megszámlálható halmaz. Minthogy C_ω az összes C_n halmazok metszete (hiszen az, hogy egy formula a végesben azonosan igaz, épp azt jelenti, hogy $n = 1, 2, \ldots$ esetén azonosan igaz az n számosságban), ezért $\Sigma\,\overline{C_n}$ nem egyéb, mint C_ω komplementer halmaza, $\overline{C_\omega}$. Tehát $\overline{C_\omega}$ rekurzív módon megszámlálható halmaz. Ha C_ω is rekurzív módon megszámlálható lenne, akkor egy *Kleene*-féle meggondolás[29] mutatná, hogy C_ω rekurzív halmaz lenne, ellentétben *Trahtyenbrot* tételével.

[26] L. *Gödel*, a [9] lábjegyzetben idézett dolgozat, 356—357. l., vagy *L. Kalmár*, Eine Bemerkung zur Entscheidungstheorie, *Acta Scientiarum Math.*, *4* (1929), 248—252. l.

[27] Valóban, mint a [26] lábjegyzetben idézett dolgozatomban megjegyeztem (251. l.) a legkisebb számosság, amelyben **B** kielégíthető, ugyanakkora, mint a legkisebb számosság, amelyben **B**′ kielégíthető.

[28] A rekurzív halmaz és a rekurzív módon megszámlálható halmaz fogalmát illetően *Kleene*nek a [6] lábjegyzetben idézett dolgozatára utalok.

[29] L. a [6] lábjegyzetben idézett dolgozatában a XVI. tétel bizonyítását (741. l.) ; l. még *E. L. Post*, Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems, *Bulletin of the American Math. Society*, *50* (1944), 284—316., különösen 290. l.

Ennek további következménye, hogy *a végesben azonosan igaz formulák C_ω halmaza nem lehet rekurzív módon axiomatizálható ;* azaz nincs olyan axiómarendszer, amelynek véges számú axiómája van, vagy axiómái rekurzív módon megszámlálható halmazt alkotnak, amelyben véges számú rekurzív következtetési mód[30] van megengedve, és amelyben a végesben azonosan igaz formulák és csak azok volnának bebizonyítható tételek. Valóban, egy *Rosser*-től származó lemma[31] szerint ilyen »rekurzív« axiómarendszerben bebizonyítható tételek halmaza rekurzív módon megszámlálható.

Ezt a negatív eredményt szembe lehet állítani azzal, hogy egyrészt a megszámlálhatóban azonosan igaz (tehát *Löwenheim* említett tétele szerint mindenütt azonosan igaz) formulák $C_{\aleph_0}$ halmaza is rekurzív módon axiomatizálható (a [9] lábjegyzetben említett *Gödel*-féle teljességi tétel folytán), másrészt, *Wajsberg* egy tétele[32] szerint, az n számosságban azonosan igaz formulák C_n halmaza is minden véges n számosság esetén rekurzív módon axiomatizálható. Ez annál meglepőbb, mert a C_ω formulahalmaz »deduktíve zárt«, akárcsak a $C_1, C_2, \ldots$ és a $C_{\aleph_0}$ halmazok, vagyis a logikai függvénykalkulus axiómarendszerének következtetésmódjait C_ω-hoz tartozó formulákra alkalmazva, megint C_ω-hoz tartozó formulákat kapunk.

Speciális esetként jegyezzük meg, hogy *ha a logikai függvénykalkulus axiómarendszeréhez véges számú, a végesben azonosan igaz formulát, vagy a végesben azonosan igaz formulák egy rekurzív módon megszámlálható halmazának elemeit, adjungáljuk axiómák gyanánt, akkor mindig van olyan, a végesben azonosan igaz formula, amely nem bizonyítható be a kapott axiómarendszerben.*[33] Valóban, minthogy az ily módon kapott axiómarendszerben (a végesben azonosan igaz formulák halmazának deduktív zártsága miatt) csak a végesben azonosan igaz formulák lehetnek bebizonyíthatók, tehát, ha ezek mind bebizonyíthatók lennének, akkor a végesben azonosan igaz formulák halmaza rekurzív módon axiomatizálható lenne.

Ez a negatív eredmény azért meglepő, mert, *Wajsberg* egy tétele szerint (l. a [32] lábjegyzetben idézett dolgozatot); ha a logikai függvénykalkulus axiómarendszeréhez egy tetszőleges olyan formulát adjungálunk axióma gyanánt, amely az n számosságban azonosan igaz, de az $n+1$ számosságban nem, akkor olyan axiómarendszert kapunk, amelyben minden, az n számosságban

[30] E fogalmat illetően l. *B. Rosser*, Existensions of some theorems of Gödel and Church, *The journal of symbolic logic*, *1* (1936), 87—91. l., különösen a 88. lapon a definíciót. (Ha e definíciót *formulákra* akarjuk alkalmazni, akkor x, y, z-n a megfelelő formulák sorszámát kell érteni a formulák *Gödel*-féle megszámlálásában.)

[31] L. a [30] lábjegyzetben idézett dolgozatban a II. lemmát a 88—89. lapon.

[32] *M. Wajsberg*, Untersuchungen über den Funktionenkalkül für endliche Individuenbereiche, *Math. Annalen*, *108* (1933), 218—228. l.

[33] Ennek a következménynek azt a speciális esetét, hogy ha a logikai függvénykalkulus axiómarendszeréhez hozzáveszünk egy tetszőleges, a végesben azonosan igaz formulát axióma gyanánt, akkor mindig van olyan, a végesben azonosan igaz formula, amely nem bizonyítható be a kapott axiómarendszerben, *Trahtyenbrot* is kimondja (idézett dolgozat, 571. lap alján).

azonosan igaz formula bebizonyítható. Úgy tűnnék fel első pillanatban, hogy *Wajsberg* e tétele magától értetődik, hiszen egy ilyen axióma azt fejezi ki, hogy az I »individuumtartománynak«, amelyen a matematikai változók átfutnak, legfeljebb n eleme van. De ha *Wajsberg* tétele magától értetődő lenne, akkor ugyanígy magától értetődnék az is, hogy a logikai függvénykalkulus axiómarendszeréhez egy olyan, a végesben azonosan igaz formulát adjungálva axióma gyanánt, amely végtelen halmazokon már nem azonosan igaz,[34] olyan axiómarendszert kapunk, amelyben minden, a végesben azonosan igaz formula bebizonyítható; hiszen egy ilyen axióma azt fejezi ki, hogy az individuumtartománynak véges számú eleme van. Azonban, mint láttuk, az így kapott axiómarendszerek egyikében sem lesz minden, a végesben azonosan igaz formula bebizonyítható, tehát a fenti állítás nemcsak, hogy nem magától értetődő, de nem is igaz. Ez nemcsak azt mutatja, hogy *Wajsberg* tétele mélyen fekszik, hanem azt is, hogy az I halmaz végessége olyan feltétel, amelyet nemcsak véges számú, de még rekurzív módon megszámlálhatóan végtelen sok axiómával sem lehet teljesen leírni; vagy másképp kifejezve, véges számú, vagy akár rekurzív módon megszámlálhatóan végtelen sok, formulával felírható végességi feltételhez mindig van olyan végességi feltétel, amely azokból nem dedukálható a logikai függvénykalkulus axiómarendszerében.[35]

Megjegyezzük végül, hogy *azoknak a formuláknak* $C_\omega - C_{\aleph_0}$ *halmaza, amelyek a végesben azonosan igazak, de nem minden halmazon azonosan igazak* (tehát, *Löwenheim* idézett tétele szerint, a megszámlálhatóban nem azonosan igazak), *nem számlálható meg rekurzív módon.* Különben C_ω, mint ezen $C_\omega - C_{\aleph_0}$ halmaznak és a rekurzív módon axiomatizálható, tehát rekurzív módon megszámlálható $C_{\aleph_0}$ halmaznak összege, szintén rekurzív módon megszámlálható lenne.

[34] Ilyen formula pl. $(x)\overline{A}(x, x)\ \&\ (x)(Ey)(z)(A(x, y)(A(z, x) \rightarrow A(z, y)))$; l. *D. Hilbert* és *P. Bernays*, Grundlagen der Mathematik, 1. kötet (Berlin, 1934), 124. l.; vagy a [35] lábjegyzetben említett formulák.

[35] Pl. *Hilbert* és *Bernays* egy sejtése szerint (l. a [34] lábjegyzetben idézett mű, 124. l., [1] lábjegyzet; a sejtés bizonyítását l. *G. Hasenjaeger*, Über eine Art von Unvollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe, *Journal of symbolic logic*, *15* (1950), 273—276. l.) a

$$((x)R(x, y)\ \&\ (x)(y)(z)(R(x, y)R(y, z) \rightarrow R(x, z))) \rightarrow (Ex)(y)\overline{R}(x, y)$$

és

$$((Ex)(y)\overline{S}(x, y)\ \&\ (x)(y)(z)(u)(S(x, u)S(y, u)S(v, x) \rightarrow S(v, y))) \rightarrow (Ex)(y)\overline{S}(x, y)$$

formulák közül, — amelyek a végesben azonosan igazak, a végtelen halmazokon nem, — egyik sem bizonyítható be abban az axiómarendszerben, amely a logikai függvénykalkulus axiómarendszeréből keletkezik, ha a másikat axióma gyanánt adjungáljuk hozzá. E két formula tehát két »egymástól független« végességi feltétel.

ПРИВЕДЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗРЕШИМОСТИ К ВОПРОСУ ВЫПОЛНИМОСТИ ЛОГИЧЕСКИХ ФОРМУЛ НА КОНЕЧНЫХ КЛАССАХ

Л. КАЛЬМАР (Сегед)

После объяснения сущности проблемы разрешимости автор доказывает следующую теорему:

Для любой формулы **A** (узкого функционального исчисления) можно построить другую формулу **B** такого рода, что **A** выполнима в том и только в том случае, если нет конечного множества, на котором **B** выполнима.

Значит, проблема разрешимости приводима к проблеме выполнимости формул узкого исчисления предикатов на конечных классах. Это является улучшением теоремы *Löwenheim*-а, которая приводит проблемы разрешимости на случай счетных множеств.

В качестве следствия доказана теорема Трахтенброта о рекурсивный неразрешимости проблемы выполнимости формул узкого исчисления предикатов на конечных классах. Из этого автор доказывает, что множество формул узкого функционального исчисления тождественно истинных на любом конечном классе не является рекурсивно счетным и, поэтому, хотя замкнуто относительно дедукции, рекурсивно не аксиоматизуемо. Дальше множество формул узкого функционального исчисления, тождественно истинных на любом конечном классе, но не тождественно истинных на бесконечных классах, не является рекурсивно счетным.

Статья печатается и на англиском языке под заглавием »Contributions to the reduction theory of the decision problem, fourth paper, reduction to the case of a finite sef of individuals« в журнале »*Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*«.

REDUCTION OF THE DECISION PROBLEM TO THE SATISFIABILITY QUESTION OF LOGICAL FORMULAE ON A FINITE SET

By LÁSZLÓ KALMÁR (Szeged)

After explaining for mathematicians not acquainted with mathematical logic, what is the decision problem and why it is interesting, the author proves the following theorem.

To any given (first order) *formula* **A** *it is possible to construct another* (first order) *formula* **B** *such that* **A** *is satisfiable if and only if there is no finite set on which* **B** *can be satisfied.*

Hence the decision problem can be reduced to the question of satisfiability in the finite of first order formulae. This is a sharpening of *Löwenheim*'s theorem reducing the decision problem to the case of an enumerable set of individuals.

As a corollary, the theorem of *Trachtenbrot* stating the recursive unsolvability of the satisfiability question of first order formulae in the finite is proved. As a corollary of this theorem, the author proves that the class of the first order formulae which are identically true in every finite class is not recursively enumerable, hence, though deductively closed, not recursively axiomatisable. Also the class of the first order formulae which are identically true in every finite class but not in the infinite classes, is not recursively enumerable.

The paper will be published in English under the title »Contributions to the reduction theory of the decision problem, fourth paper, reduction to the case of a finite set of individuals«, in the *Acta Math. Academiae Scientiarum Hungaricae.*