Megjegyzés a halmazelmélet Gödel-féle axiómarendszeréhez II.*

HAJNAL ANDRÁS és KALMÁR LÁSZLÓ

5. Az említett metatétel bizonyításának gondolatmenete az, hogy először a legegyszerűbb, az &, ¬ és (Ek) jeleket nem tartalmazó feltételekre bizonyítjuk be a megfelelő osztály létezését, majd megmutatjuk, hogy ha bizonyos feltételekre érvényes, akkor érvényes a belőlük az &, ¬ és (Ek) jelek alkalmazásával keletkező feltételre is. Azonban az (Ek) jel alkalmazásával több szabad változót tartalmazó feltételből kapunk (eggyel, ti. a k halmazváltozóval) kevesebb szabad változót tartalmazó feltételt; ezért a fenti gondolatmenetet csak úgy követhetjük, ha a bebizonyítandó metatételt még általánosabban, x, y és z helyett tetszőleges számú szabad halmazváltozót tartalmazó feltételekre bizonyítjuk be.

Evégett mindenekelőtt a rendezett pár és a rendezett hármas fogalmát kell általánosítanunk több komponens esetére. Ez könnyen

* I. részt lásd: *Mat. Lapok*, 7 (1956), 26—42. oldal. Az alábbi 48. jegyzet az I. rész 41. oldalára való, azonban hibás tördelés miatt ott félbemaradt.

[48] Lásd a 18. jegyzetet. Valóban metatételről van szó, mert azt állítjuk, hogy az olyan osztály létezése, amelynek valamely $\langle x, y, z\rangle$ rendezett hármas akkor és csak akkor eleme, ha a $\Phi(x, y, z, A)$ feltétel teljesül, e feltétel minden egyes (a szövegben pontosan megadott módon való) választása esetén egy-egy tétele a pusztán az A1, A3, A4, valamint a B1—B7 axiómák által axiómatizált diszciplinának.

Arra a közelfekvő kérdésre. miért ezt a metatételt bizonyítjuk be ahelyett a speciális esete helyett, amikor $\Phi(x, y, z, A)$ a (8) feltételt jelenti, könnyen válaszolhatunk: könnyebb ezt a metatételt átlagosan bebizonyítani, mint közvetlenül a kérdéses speciális esetét; de természetesen e metatétel bizonyítása alapján meg lehetne adni a kérdéses speciális eset bizonyítását is, vagyis a B8 axióma halmazelméleti bizonyítását az A1, A3, A4, valamint a B1—B7 axiómák alapján, csak nagyon sokszor kellene ismételni a metatétel bizonyításában szereplő gondolatmenetet. Éppen az ilyen könnyítésben áll a metatételek alkalmazásának jelentősége az axiómatikus vizsgálatokban. Tudomásom szerint BOLYAI JÁNOS Appendixében fordul elő a szakirodalomban először metatétel bizonyítása és alkalmazása axiómatikus vizsgálatban: azé a metatételé, amely szerint minden olyan tétel, amely az euklidesi geometria valamely tételéből úgy jön létre, hogy egyenes helyett mindenütt L-vonalat (paraciklust), sík helyett pedig mindenütt F-felületet (paraszférát) mondunk, a geometria axiómarendszerében a párhuzamosság axiómája nélkül bebizonyítható tételek közé tartozik.

lehetséges[49]:

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle = \langle x_1, \langle x_2, x_3, x_4\rangle\rangle,$$
$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\rangle = \langle x_1, \langle x_2, x_3, x_4, x_5\rangle\rangle,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

általában, ha már a $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ rendezett n-es definiálva van, akkor a $\langle x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\rangle$ rendezett $n+1$-esen az x_1 halmazból és a $\langle x_2, \ldots, x_{n+1}\rangle$ rendezett n-esből képezett rendezett párt értjük:

(9) $$\langle x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\rangle = \langle x_1, \langle x_2, \ldots, x_{n+1}\rangle\rangle.$$

Ez az egyenlet $n=2$ esetén a rendezett hármas fenti definíciójába megy át; hogy $n=1$ esetén is igaz legyen:

$$\langle x_1, x_2\rangle = \langle x_1, \langle x_2\rangle\rangle,$$

a $\langle x\rangle$ „rendezett egyesen" magát az x halmazt célszerű érteni:

$$\langle x\rangle = x.$$

A (9) egyenletet nem tekintjük általános definíciónak, csak olyan eljárásnak, amelynek segítségével minden *adott* n-re definiálhatjuk az $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ rendezett n-est. Valójában csak bizonyos n értékekre lenne szükségünk a rendezett n-es fogalmára ahhoz, hogy a B8 axióma nélkülözhetőségét megmutassuk, éspedig legfeljebb az $n = 1, 2, \ldots, 11$ értékekre (minthogy a (8) feltételben 11 halmazváltozó szerepel: az x, y és z szabad változókon kívül a p, q, r, s, t, u, v, w kötött változók); azonban egyszerűbb általánosan felírni a (9) definíciót, mint külön-külön definiálni a rendezett egyes, hármas, ..., tizenegyes fogalmát[50].

A rendezett n-es fogalma segítségével a következőképpen mondhatjuk ki az előző pontban szereplő metatétel általánosítását.

Legyen $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ olyan, az $x_1, \ldots, x_n$ halmazokra és az A osztályra vonatkozó feltétel, amely felírható olyan formula alakjában, amely bizonyos, $x_i \in x_j$ és $x_i \in A$ alakú állításokból, ahol

[49] Áttekinthetőség kedvéért indexes latin kisbetűket is használunk halmazváltozók gyanánt; viszont az i, j, m és n betűkkel ezentúl csak (adott) pozitív egész számokat jelölünk.

[50] Természetesen a halmazelmélet axiómatikus felépítése során előbb-utóbb definiáljuk a tetszőleges pozitív egész szám (mint tetszőleges véges, nem üres halmaz számossága) fogalmát és definíciója alapján bebizonyítjuk a rekurzív definíció jogosságát; ettől kezdve a rendezett n-es definícióját — megfelelő fogalmazásban — általános, halmazelméleti definíciónak tekinthetjük. Azonban ahhoz, hogy a halmazelmélet axiómatikus felépítésében e pontig eljussunk, szükség van e fogalom bizonyos — véges számú — speciális esetére (mondjuk $n = 20$-ig); ezért a (9) egyenlet — nem általános definíciónak, hanem a szükséges n-ekre vonatkozó egyes definíciók rövid összefoglalásának tekintve — megkönnyíti a halmazelmélet axiómatikus felépítését is.

x_i és x_j nemcsak az $x_1, \ldots, x_n$ halmazváltozók lehetnek, hanem további, a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltételben kötött halmazváltozók is, az $\&$, $\neg$ és (Ex_m) jelek ismételt alkalmazásával keletkezik, ahol x_m helyett ismét tetszőleges, az $x_1, \ldots, x_n$ szabad változóktól különböző h a l m a z-változó állhat. Nem kötjük ki, hogy az $x_1, \ldots, x_n$ és A változók mindegyike valóban előforduljon e formulában, csak azt, hogy ezeken kívül más szabad változó ne forduljon elő benne; azt sem írjuk elő, hogy $x_1, \ldots, x_n$ milyen sorrendben jelöljék az ebben a formulában szereplő (és esetleg még további) szabad halmazváltozókat. Akkor az a tétel, hogy bármely A osztályhoz van olyan osztály, amelynek valamely $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ rendezett n-es akkor és csak akkor eleme, ha komponensei teljesítik a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltételt, bebizonyítható az A1, A3 *és* A4, *valamint a* B1—B7 *axiómák alapján*[51].

Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltételt kifejező formulában (röviden: a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ formulában) nem szerepel $x_i \in x_i$ alakú „alkatrész" (az olyan formulát, amely a kimondott metatételben szereplő feltételek mellett annak a további feltételnek is eleget tesz, hogy nincs $x_i \in x_i$ alakú alkatrésze, rövidség kedvéért *szabályos formulának* nevezzük). Valóban, $x_i \in x_i$ helyett azt mondhatjuk, hogy van x_i-nek olyan x eleme, amely x_i-vel egyenlő, vagyis

$$(Ex)(x \in x_i \,\&\, x = x_i)$$

(ahol x tetszőleges, x_i-től különböző halmazváltozó); $x = x_i$ helyett pedig azt, hogy $\neg x \neq x_i$ (nem igaz, hogy $x \neq x_i$), s az itt szereplő $x \neq x_i$ állítás helyett, mint fentebb, azt írhatjuk, hogy

$$(Ew) \neg (\neg (w \in x \,\&\, \neg w \in x_i) \,\&\, \neg (w \in x_i \,\&\, \neg w \in x))$$

[51] Ez a metatétel — azon kívül, hogy Gödelnél a B8 axióma is szerepel a bizonyításhoz megengedett axiómák között (sőt megengedi axiómarendszerének valamennyi axiómáját, a kiválasztás axiómájának kivételével) — abban különbözik Gödel M1 metatételétől (lásd Gödel [1], 8. oldal), amelyet Gödel a halmazelmélet axiómatikus felépítésének meggyorsítására használ, hogy Gödel A helyett több osztályváltozót megenged (amit mi is megtehetnénk), továbbá $x_i \in x_j$ és $x_i \in A_j$ alakú állításokon kívül $A_i \in x_j$ és $A_i \in A_j$ alakú állításokat is megenged a szóbanforgó formula „alkatrészei" gyanánt. Bizonyítása azzal kezdődik, hogy ezeket az újabb alkatrészeket ki lehet küszöbölni, mert az A2 axióma folytán $A_i \in x_j$ ill. $A_i \in A_j$ csak akkor állhat, ha A_i halmaz, tehát akkor és csak akkor áll, ha van olyan x halmaz, hogy $x = A_i$ és $x \in x_j$ ill. $x \in A_j$; ennélfogva $A_i \in x_j$ helyett azt írhatjuk, hogy $(Ex)(x = A_i \,\&\, x \in x_j)$, $A_i \in A_j$ helyett pedig azt, hogy $(Ex)(x = A_i \,\&\, x \in A_j)$. Az így bejövő egyenlőség-jelet úgy küszöbölhetjük ki, mint az $x_i \in x_i$ alakú alkatrészek kiküszöbölése kapcsán a szövegben.

Ha $n = 1$, akkor metatételünk épp azt mondja ki, hogy az a tétel, hogy van olyan osztály, amelynek azok és csak azok az x halmazok (vagyis $\langle x \rangle$

(ahol w ismét tetszőleges, x-től és x_i-től különböző halmazváltozó). Ily módon az $x_i \in x_i$ alkatrész helyébe azt írhatjuk, hogy

$$(Ex)(x \in x_i \& \neg (Ew) \neg (\neg (w \in x \& \neg w \in x_i) \& \neg (w \in x_i \& \neg w \in x)));$$

ezt minden esetleges $x_i \in x_i$ alakú alkatrésszel megtéve, szabályos formulához jutunk[52].

Nevezzük a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ formulában szereplő $\&$, $\neg$ és (Ex_m) jelek összes számát (ahol x_m tetszőleges halmazváltozót jelenthet) a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ formula *rendjének*. Pl. $x_i \in x_j$ és $x_i \in A$ nulladrendű formulák (és minden nulladrendű formula vagy $x_i \in x_j$, vagy $x_i \in A$ alakú); $\neg x_1 \in x_2$, $x_1 \in x_2 \& x_2 \in x_3$ és $(Ex)(x \in x_1)$ elsőrendű, $\neg (x_1 \in x_2 \& x_2 \in x_1)$, $x_1 \in x_2 \& x_2 \in x_3 \& x_3 \in x_4$ és $(Ex)(x_1 \in x \& \& x \in x_2)$ másodrendű formulák. A (8) formula 134-edrendű.

A bebizonyítandó metatétel érvényességét először a 0-adrendű szabályos formulákra mutatjuk meg; majd megmutatjuk, hogy ha minden olyan szabályos formulára igaz, amelynek rendje kisebb, mint valamely m pozitív egész szám, akkor igaz az m-edrendű szabályos formulákra is. Ezzel minden szabályos formulára meg lesz mutatva, hogy igaz[53].

rendezett egyesek) elemei, amelyeknek megvan a T tulajdonságuk, bármely T tulajdonság esetén bebizonyítható az A1, A3 és A4, valamint a B1—B7 axiómák alapján, amennyiben egy x halmaz tulajdonságán olyan, x-en és esetleges (adottnak képzelendő) A osztályon (vagy több ilyen osztályon) kívül más szabad változót nem tartalmazó formula alakjában felírható feltételt értünk, amely a mondott módon keletkezik $x_i \in x_j$ és $x_i \in A$ (vagy $x_i \in A_j$) alakú alkatrészekből. Így értettük a 3. pont elején a tulajdonság-fogalom szabatos elhatárolását. A (definit) tulajdonság fogalmának ilyenfajta szabatos elhatárolása (a Zermelo-féle axiómarendszer keretein belül) Skolemtől származik; lásd Skolem [1], Zermelo [2], Skolem [2].

Természetesen ahelyett, hogy Gödel M1 metatételét bizonyítjuk be a B8 (és az A2, valamint a D) axióma felhasználása nélkül a szükséges speciális esetben, megtehettük volna azt, hogy Gödel M3 metatételét (lásd Gödel [1], 14. oldal) bizonyítsuk be így, megfelelő módon specializálva; ezt ugyanis a (8) formula helyett közvetlenül az $\langle x, z, y\rangle \in A$ feltételre is alkalmazhattuk volna. Ez azonban azt jelentette volna, hogy az $\langle x, z, y\rangle \in A$ feltételnek a (8) alakra hozása helyett általánosabban kellett volna bizonyos alakú feltételeket ilyenszerű formula alakjában kifejezni. Ez nem könnyítette volna meg a bizonyítás követését. (Gödelnek természetesen szüksége van az M3 metatételre is a halmazelmélet axiómatikus felépítésének meggyorsítása végett.)

[52] Gödel az $x_i \in x_i$ alakú alkatrészek kiküszöbölése helyett a D axiómát (a fundáltság axiómáját) használja, amelyből könnyen adódik, hogy nincs olyan x halmaz, amely teljesítené az $x \in x$ feltételt. — A (8) formula, mint azonnal látható, szabályos, úgy, hogy a B8 axióma nélkülözhetőségének bebizonyításához nem is volna szükséges nem-szabályos formulákra kimondani a fenti metatételt.

[53] A teljes indukcióval való bizonyítás megengedett (bár még nem mutattuk meg, hogy a teljes indukcióval való bizonyítás jogosultsága következik a halmazelmélet axiómáiból), mert nem halmazelméleti tétel, hanem metatétel bizonyítására használjuk. Ugyanis a kimondott metatétel éppen azt jelenti, hogy

6. Ahhoz, hogy a bebizonyítandó metatétel érvényességét 0-adrendű szabályos formulákra megmutassuk, szükségünk lesz néhány segédtételre.

1. segédtétel. *Ha* $n \geqq 3$, *akkor*[54]

$$\langle x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \rangle = \langle x_1, x_2, \langle x_3, \ldots, x_n \rangle \rangle.$$

Bizonyítás. A (9) definíció folytán

$$\langle x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \rangle = \langle x_1, \langle x_2, x_3, \ldots, x_n \rangle \rangle =$$
$$= \langle x_1, \langle x_2, \langle x_3, \ldots, x_n \rangle \rangle \rangle,$$

ez pedig, a rendezett hármas fogalmának definíciója folytán, nem más, mint a $\langle x_1, x_2, \langle x_3, \ldots, x_n \rangle \rangle$ rendezett hármas.

2. segédtétel[55]. *A* B5 *és* B6 *axiómákból következik, hogy bármely A osztályhoz van olyan B és C osztály, hogy, tetszőleges x és y halmazok esetén,*

$\langle y, x \rangle \in B$ *akkor és csak akkor áll, ha* $x \in A$,

$\langle x, y \rangle \in C$ *akkor és csak akkor áll, ha* $x \in A$.

Bizonyítás. A B osztály létezését éppen a B5 axióma mondja ki; a C osztály létezése ebből a B6 axióma alapján következik.

3. segédtétel[56]. *A* B5, B6 *és* B7 *axiómákból következik, hogy bármely A osztályhoz van olyan F, G és H osztály, hogy,*

a benne foglalt állítás minden egyes adott $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ formulára igaz; már pedig adott $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ formula rendje adott nemnegatív egész szám és ahhoz, hogy adott m nemnegatív egész számra állíthassuk, hogy a metatétel az m-edrendű szabályos formulákra igaz, nincs szükségünk a teljes indukcióval való bizonyítás jogossága axiómatikus bizonyítására, hanem elég azt a meggondolást m-szer ismételnünk, hogy minthogy a metatétel igaz a 0-adrendű, tehát az 1-nél kisebb rendű szabályos formulákra, azért igaz az elsőrendűekre is, minthogy igaz a 0-ad és elsőrendű, tehát a 2-nél kisebb rendű szabályos formulákra, azért igaz a másodrendűekre is és így tovább. Pl. ahhoz, hogy a (8) formulára bebizonyítsuk a metatételt, 134-szer kellene azt a meggondolást ismételnünk, amelyet a metatétel általános bizonyításában mondunk el; de teljes indukciót egyszer sem kellene végeznünk.

[54] A ... jel az x_i és x_j változók között (ahol $j \geqq i$) mindig azt jelenti, hogy közéjük növekvő index sorrendjében, vesszőkkel elválasztva, mindazok az x_m változók írandók, ahol $i < m < j$ (ha $j = i + 1$, vagy $j = i$, akkor egy sem; az utóbbi esetben x_i és x_j egyike elhagyandó).

[55] Lásd a 2.3 tételt Gödel [1]-ben a 9. oldalon.

[56] Lásd a 2.31, 2.32 és 2.33 tételt Gödel [1]-ben a 9. oldalon; azonban Gödel a G osztály létezésének bebizonyításához a B8 axiómát is használja. A B8 axióma nélkülözhetőségének bizonyításához döntő a 3. segédtétel jelen alakja.

tetszőleges x, y és z halmazok esetén,

$\langle z, x, y\rangle \in F$ *akkor és csak akkor áll, ha* $\langle x, y\rangle \in A$,
$\langle x, z, y\rangle \in G$ *akkor és csak akkor áll, ha* $\langle x, y\rangle \in A$,
$\langle x, y, z\rangle \in H$ *akkor és csak akkor áll, ha* $\langle x, y\rangle \in A$.

Bizonyítás. F osztály gyanánt választhatjuk a 2. segédtételben szereplő B osztályt, hiszen $\langle z, x, y\rangle = \langle z, \langle x, y\rangle\rangle \in B$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x, y\rangle \in A$. A B7 axióma folytán ehhez a B osztályhoz van olyan K osztály, hogy, tetszőleges x, y és z halmazok esetén, $\langle x, y, z\rangle \in K$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle y, z, x\rangle \in B$, s a K osztályhoz olyan L osztály, hogy $\langle x, y, z\rangle \in L$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle y, z, x\rangle \in K$. Akkor H osztály gyanánt választhatjuk ezt az L osztályt, hiszen $\langle x, y, z\rangle \in L$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle y, z, x\rangle \in K$, ez pedig akkor és csak akkor áll, ha $\langle z, x, y\rangle \in B$, vagyis, ha $\langle x, y\rangle \in A$. Végül a G osztály létezése így adódik. A B6 axióma folytán van olyan M osztály, hogy, tetszőleges x és y halmazok esetén, $\langle x, y\rangle \in M$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle y, x\rangle \in A$; s ehhez az M osztályhoz a 3. segédtételnek az F osztály létezésére vonatkozó, már bebizonyított része szerint van olyan N osztály, hogy, tetszőleges x, y és z halmazok esetén, $\langle z, x, y\rangle \in N$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x, y\rangle \in M$. Ehhez az N osztályhoz a B7 axióma folytán van olyan P osztály, hogy, tetszőleges x, y, z halmazok esetén, $\langle x, y, z\rangle \in P$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle y, z, x\rangle \in N$. Akkor G osztály gyanánt választhatjuk ezt a P osztályt, hiszen $\langle x, z, y\rangle \in P$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle z, y, x\rangle \in N$, ez pedig akkor és csak akkor áll, ha $\langle y, x\rangle \in M$, vagyis, ha $\langle x, y\rangle \in A$.

E segédtételek alapján a következőképpen bizonyíthatjuk be a kimondott metatételt 0-adrendű szabályos formulák esetére. Az ilyen $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ formula, mint mondtuk, csak $x_i \in A$, vagy $x_i \in x_j$ alakú lehet, ahol i, ill. i és j az $1, \ldots, n$ természetes számok közül való (mert az x_i változó az $x_i \in A$ formulának, s az x_i és x_j változók az $x_i \in x_j$ formulának szabad változói), továbbá az utóbbi esetben $i \neq j$ (mert a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ formula szabályos). Ha tehát $x_i \in x_j$ mellett az $x_j \in x_i$ formulát is figyelembevesszük $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ gyanánt, akkor feltehetjük, hogy $i < j$.

Ha $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ az $x_i \in A$ formula, akkor $n = 1$ esetben i csak 1 lehet és maga az A osztály olyan, amelynek az $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle x_1\rangle = x_1 = x_i$ halmaz akkor és csak akkor eleme, ha $x_i \in A$, azaz ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. Legyen tehát $n > 1$ és tegyük fel egyelőre, hogy $i < n$. Akkor az A osztályhoz a 2. segédtétel szerint van olyan C osztaly, hogy $\langle x, y\rangle \in C$ akkor és csak akkor áll, ha $x \in A$, speciálisan $\langle x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\rangle = \langle x_i, \langle x_{i+1}, \ldots, x_n\rangle\rangle \in C$

akkor és csak akkor áll, ha $x_i \in A$. Ha $i = n$, akkor maga A ilyen osztály, ugyanis ekkor $\langle x_i, \ldots, x_n \rangle = \langle x_i \rangle = x_i$. Ha $i = 1$, akkor a C osztály máris olyan, hogy $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in C$ akkor és csak akkor áll, ha $x_i \in A$, vagyis, ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. Legyen tehát $i > 1$. A 2. segédtétel szerint ehhez a C osztályhoz van olyan B_1 osztály, ahhoz ismét olyan B_2 osztály, és így tovább, hogy $\langle y, x \rangle \in B_1$ akkor és csak akkor áll, ha $x \in C$, $\langle y, x \rangle \in B_2$ akkor és csak akkor áll, ha $x \in B_1$, és így tovább. Speciálisan $\langle x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n \rangle = \langle x_{i-1}, \langle x_i, \ldots, x_n \rangle \rangle \in B_1$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x_i, \ldots, x_n \rangle \in C$, vagyis ha $x_i \in A$; $\langle x_{i-2}, x_{i-1}, \ldots, x_n \rangle = \langle x_{i-2}, \langle x_{i-1}, \ldots, x_n \rangle \rangle \in B_2$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x_{i-1}, \ldots, x_n \rangle \in B_1$, vagyis ismét akkor és csak akkor, ha $x_i \in A$; és így tovább, végül B_{i-1} olyan osztály, amelyre $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in B_{i-1}$ akkor és csak akkor áll, ha $x_i \in A$, vagyis, ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. Ennek a B_{i-1} ($i = 1$ esetén C) osztálynak létezését a 2. segédtétel, tehát a B5 és B6 axiómák alapján bizonyítottuk be.

Legyen mármost $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ az $x_i \in x_j$ vagy az $x_j \in x_i$ formula, ahol $1 \leqq i < j \leqq n$. A B1 axióma folytán van olyan E osztály, hogy $\langle x, y \rangle \in E$ akkor és csak akkor áll, ha $x \in y$, ehhez pedig a B6 axióma folytán olyan Q osztály, hogy $\langle x, y \rangle \in Q$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle y, x \rangle \in E$, vagyis, ha $y \in x$. Ennélfogva abban az esetben, ha $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ az $x_i \in x_j$ formula, $\langle x_i, x_j \rangle \in E$ akkor és csak akkor áll, ha $x_i \in x_j$, vagyis ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül; abban az esetben pedig, ha $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ az $x_j \in x_i$ formula, $\langle x_i, x_j \rangle \in Q$ akkor és csak akkor áll, ha $x_j \in x_i$, vagyis, ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. Jelöljük R-rel az első esetben az E, a második esetben a Q osztályt; akkor $\langle x_i, x_j \rangle \in R$ mindkét esetben akkor és csak akkor áll, ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. Ha $n = 2$, akkor $1 \leqq i < j \leqq n = 2$ miatt $i = 1$ és $j = 2$; tehát akkor R máris olyan osztály, hogy $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle = \langle x_i, x_j \rangle \in R$ akkor és csakis akkor áll, ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül.

Legyen tehát $n > 2$ és tegyük fel egyelőre, hogy $j < n$. Akkor az R osztályhoz a 3. segédtétel szerint van olyan H osztály, hogy $\langle x, y, z \rangle \in H$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x, y \rangle \in R$, speciálisan, az 1. segédtétel folytán, $\langle x_i, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n \rangle = \langle x_i, x_j, \langle x_{j+1}, \ldots, x_n \rangle \rangle \in H$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x_i, x_j \rangle \in R$, vagyis ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. Ha $j = n$, akkor $\langle x_i, x_j, \ldots, x_n \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$, tehát akkor R maga választható ilyen H osztály gyanánt.

Tegyük fel mármost egyelőre, hogy $j > i + 1$; akkor ugyancsak a 3. segédtétel szerint a H osztályhoz van olyan G_1 osztály, hogy $\langle x, z, y \rangle \in G_1$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x, y \rangle \in H$, továbbá a G_1 osztályhoz van olyan G_2 osztály; hogy $\langle x, z, y \rangle \in G_2$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x, y\rangle \in G_1$, és így tovább. Speciálisan, az 1. segédtétel folytán, $\langle x_i, x_{j-1}, x_j, \ldots, x_n\rangle = \langle x_i, x_{j-1}, \langle x_j, \ldots, x_n\rangle\rangle \in G_1$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x_i, \langle x_j, \ldots, x_n\rangle\rangle \in H$, vagyis, ha $\langle x_i, x_j, \ldots, x_n\rangle \in H$; $\langle x_i, x_{j-2}, x_{j-1}, \ldots, x_n\rangle = \langle x_i, x_{j-2}, \langle x_{j-1}, \ldots, x_n\rangle\rangle \in G_2$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x_i, \langle x_{j-1}, \ldots, x_n\rangle\rangle \in G_1$, vagyis ha $\langle x_i, x_{j-1}, \ldots, x_n\rangle \in G_1$, tehát ismét akkor és csak akkor, ha $\langle x_i, x_j, \ldots, x_n\rangle \in H$; és így tovább, végül G_{j-i-1} olyan osztály, amelyre $\langle x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\rangle \in G_{j-i-1}$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x_i, x_j, \ldots, x_n\rangle \in H$, vagyis akkor és csak akkor, ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. Ha $j > i+1$ nem teljesül, hanem $j = i+1$, akkor maga a H osztály olyan, hogy $\langle x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\rangle = \langle x_i, x_j, \ldots, x_n\rangle \in H$ akkor és csak akkor áll, ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. Jelöljük G-vel $j > i+1$ esetén a G_{j-i-1} osztályt, $j = i+1$ esetén pedig a H osztályt; akkor tehát $\langle x_i, \ldots, x_n\rangle \in G$ akkor és csak akkor áll, ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül.

Ha mármost $i = 1$, akkor tehát G olyan osztály, amelyre $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle x_i, \ldots, x_n\rangle \in G$ akkor és csak akkor áll, ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül; ha pedig $i > 1$, akkor a G osztállyal ugyanúgy járunk el, mint fentebb a C osztállyal: a 2. segédtétel szerint van a G osztályhoz olyan B_1 osztály, hogy $\langle y, x\rangle \in B_1$ akkor és csak akkor áll, ha $x \in G$, majd ehhez olyan B_2 osztály, hogy $\langle y, x\rangle \in B_2$ akkor és csak akkor áll, ha $x \in B_1$, és így tovább. Speciálisan $\langle x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n\rangle = \langle x_{i-1}, \langle x_i, \ldots, x_n\rangle\rangle \in B_1$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x_i, \ldots, x_n\rangle \in G$; $\langle x_{i-2}, x_{i-1}, \ldots, x_n\rangle = \langle x_{i-2}, \langle x_{i-1}, \ldots, x_n\rangle\rangle \in B_2$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x_{i-1}, \ldots, x_n\rangle \in B_1$, vagyis akkor és csak akkor, ha $\langle x_i, \ldots, x_n\rangle \in G$; és így tovább, végül $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in B_{i-1}$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x_i, \ldots, x_n\rangle \in G$, vagyis akkor és csak akkor, ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. Ennek a B_{i-1} ($i = 1$ esetén G) osztálynak létezését a B1 axióma és a 2. és 3. segédtétel, tehát a B1, B5, B6 és B7 axiómák alapján láttuk be; így a kimondott metatétel érvényességét tetszőleges 0-adrendű szabályos formulára és tetszőleges adott n-re bebizonyítottuk.

7. Még csak annak megmutatása van hátra, hogy ha a kimondott metatétel minden olyan szabályos formulára igaz, amelynek rendje kisebb, mint valamely m pozitív egész szám, akkor igaz az m-edrendű szabályos formulákra is. Ez ugyanúgy történhetik, mint Gödelnél[57].

Valóban, $m > 1$ esetén minden m-edrendű $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ szabályos formula vagy $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, A) \& \Phi_2(x_1, \ldots, x_n, A)$ alakú,

[57] Lásd Gödel [1], 10—11. oldal.

ahol $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, A)$ és $\Phi_2(x_1, \ldots, x_n, A)$ m-nél alacsonyabbrendű szabályos formulák, vagy $\neg \Psi(x_1, \ldots, x_n, A)$ alakú, ahol $\Psi(x_1, \ldots, x_n, A)$ m-nél alacsonyabbrendű (ti. $m-1$-edrendű) szabályos formula, vagy pedig $(Ex)\Omega(x, x_1, \ldots, x_n, A)$ alakú, ahol x valamely, $x_1, \ldots, x_n$-től különböző halmazváltozó, $\Omega(x, x_1, \ldots, x_n, A)$ pedig m-nél alacsonyabbrendű (ti. ismét $m-1$-edrendű) szabályos formula. Itt a $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, A)$, $\Phi_2(x_1, \ldots, x_n, A)$ és $\Psi(x_1, \ldots, x_n, A)$ formulákban nem fordul elő más szabad változó, mint $x_1, \ldots, x_n$ és A (ezek sem mind kell, hogy előforduljanak benne, $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, A)$-ban és $\Phi_2(x_1, \ldots, x_n, A)$-ban akkor sem, ha $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$-ban mind előfordul); továbbá az $\Omega(x, x_1, \ldots, x_n, A)$ formulában nem fordul elő más szabad változó, mint $x, x_1, \ldots, x_n$ és A (az x változót mindig előre írhatjuk az $\Omega(x, x_1, \ldots, x_n, A)$ jelölésben, függetlenül attól, hogy az $x, x_1, \ldots, x_n$ és A változók mely helyeken, milyen sorrendben fordulnak elő az $\Omega(x, x_1, \ldots, x_n, A)$ formulában). Mármost a feltevés szerint a kimondott metatétel igaz a $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, A)$ és a $\Phi_2(x_1, \ldots, x_n, A)$, a $\Psi(x_1, \ldots, x_n, A)$, ill. az $\Omega(x, x_1, \ldots, x_n, A)$ formulára; és azt kell megmutatnunk, hogy a $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, A) \mathbin{\&} \Phi_2(x_1, \ldots, x_n, A)$, a $\neg \Psi(x_1, \ldots, x_n, A)$ ill. az $(Ex)\Omega(x, x_1, \ldots, x_n, A)$ formulára is igaz.

Valóban, az, hogy a kimondott metatétel igaz a $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, A)$ és $\Phi_2(x_1, \ldots, x_n, A)$ formulákra, azt jelenti, hogy bármely A osztályhoz van olyan B_1 és B_2 osztály, hogy $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in B_1$ ill. $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in B_2$ akkor és csak akkor áll, ha a $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, A)$ ill. a $\Phi_2(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. A B2 axióma szerint a B_1 és B_2 osztályokhoz van olyan B osztály, hogy $x \in B$ akkor és csak akkor áll, ha $x \in B_1$ és $x \in B_2$; speciálisan $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in B$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in B_1$ és $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in B_2$, vagyis, ha $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, A) \mathbin{\&} \Phi_2(x_1, \ldots, x_n, A)$ teljesül. Ezzel a kimondott metatételt a $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, A) \mathbin{\&} \Phi_2(x_1, \ldots, x_n, A)$ formulára is bebizonyítottuk.

Az, hogy a kimondott metatétel igaz a $\Psi(x_1, \ldots, x_n, A)$ formulára, azt jelenti, hogy bármely A osztályhoz van olyan C osztály, hogy $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in C$ akkor és csak akkor áll, ha a $\Psi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. A B3 axióma szerint a C osztályhoz van olyan C' osztály, hogy $x \in C'$ akkor és csak akkor áll, ha $x \notin C$. Speciálisan $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in C'$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \notin C$, vagyis, ha a $\Psi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel nem teljesül; más szóval akkor és csak akkor, ha a $\neg \Psi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. Ezzel a kimondott metatételt a $\neg \Psi(x_1, \ldots, x_n, A)$ formulára is bebizonyítottuk.

Végül az, hogy a kimondott metatétel igaz az $\Omega(x, x_1, \ldots, x_n, A)$ formulára (és a benne előforduló esetleges szabad változók $x, x_1,$

$\ldots, x_n, A$ sorrendjére), azt jelenti, hogy bármely A osztályhoz van olyan D osztály, hogy $\langle x, x_1, \ldots, x_n \rangle \in D$ akkor és csak akkor áll, ha az $\Omega(x, x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. A B4 axióma szerint a D osztályhoz van olyan D' osztály, hogy $x \in D'$ akkor és csak akkor áll, ha van olyan y halmaz, hogy $\langle y, x \rangle \in D$. Speciálisan $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in D'$ akkor és csak akkor áll, ha van olyan x halmaz, hogy $\langle x, \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \rangle = \langle x, x_1, \ldots, x_n \rangle \in D$, vagyis olyan, hogy az $\Omega(x, x_1, \ldots, x_n)$ feltétel teljesül; más szóval akkor és csak akkor, ha az $(Ex)\,\Omega(x, x_1, \ldots, x_n)$ feltétel teljesül. Ezzel a kimondott metatételt az $(Ex)\,\Omega(x, x_1, \ldots, x_n)$ formulára is és így általánosan bebizonyítottuk[58]; ezzel azt is megmutattuk, hogy a B8 axióma az A1, A3 és A4, valamint a B1—B7 axiómák alapján bebizonyítható.

IRODALOM

P. Bernays [1], A system of axiomatic set theory — Part I, *The Journal of Symbolic Logic,* **2** (1937), 65—77.

[2], A system of axiomatic set theory — Part II, *ugyanott,* **6** (1941), 1—17.

[3], A system of axiomatic set theory — Part III, *ugyanott,* **7** (1942), 65—89.

[4], A system of axiomatic set theory — Part IV, *ugyanott,* **7** (1942), 133—145.

[5], A system of axiomatic set theory — Part V, *ugyanott,* **8** (1943), 89—106.

[6], A system of axiomatic set theory — Part VI, *ugyanott,* **13** (1948), 65—79.

[7], A system of axiomatic set theory — Part VII, *ugyanott,* **19** (1954), 81—96.

C. Burali-Forti [1], Una questione sui numeri transfiniti, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,* **11** (1897), 154—164.

A. Fraenkel [1], Axiomatische Begründung der transfiniten Kardinalzahlen, *Mathematische Zeitschrift,* **13** (1922), 153—188.

[2], Zu den Grundlagen der Cantor—Zermeloschen Mengenlehre, *Mathematische Annalen,* **86** (1922), 230—237.

[3], Der Begriff „definit“ und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms, *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften,* phys.-math. Klasse, 1922, 253—257.

[58] Figyeljük meg, hogy a B, C' ill. D' osztály létezésének bebizonyításához, a B_1 és B_2, C ill. D osztályok létezésén kívül, csak a B2, B3 ill. B4 axiómát használtuk fel. A B1, B5, B6 és B7 axiómákat akkor használtuk fel, amikor a 0-adrendű szabályos formulák esetét intéztük el. Az A1, A3 és A4 axiómákat lépten-nyomon felhasználtuk anélkül, hogy hivatkoztunk volna rájuk, amikor rendezett n-esekkel dolgoztunk. Valóban, az $\{x, y\}$ rendezetlen pár és vele együtt az $\langle x, y \rangle$ rendezett pár, az $\langle x, y, z \rangle$ rendezett hármas stb. létezése és egyértelműsége tetszőleges x, y ill. x, y, z stb. halmazok esetén az A1, A3 és A4 axiómákból következett.

[4], Die Axiome der Mengenlehre, *Scripta Universitatis atque Bibliothecae Hierosolymitanarum*, math. et phys., 1 (1923), no. 6.
[5], *Einleitung in die Mengenlehre*, Berlin, 2. kiadás. 1923; 3. kiadás, 1928.
[6], Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, *Mathematische Zeitschrift*, **22** (1925), 250—273.
[7], *Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre*, Leipzig és Berlin, 1927.

K. Gödel [1], The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory, *Annals of Mathematics Studies*, **3** (1940).

Kálmár L. [1], *A matematika alapjai* (egyetemi jegyzet), I. kötet: halmazelmélet, Budapest (Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat), 1953.

C. Kuratowski [1], Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles, *Fundamenta Mathematicae*, **2** (1921), 161—171.

A. A. Markov (А. А. Марков) [1], О зависимости аксиомы B6 от других аксиом Bernays'a—Gödel'я, Известия Академии Наук СССР, сер. мат., **12** (1948), 569—570.

J. v. Neumann [1], Zur Einführung der transfiniten Zahlen, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, **1** (1922-23), 199—208.
[2], Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **154** (1925), 219—240.
[3], Über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre, *Mathematische Annalen*, **99** (1928), 373—391.
[4], Die Axiomatisierung der Mengenlehre, *Mathematische Zeitschrift*, **27** (1928), 669—752.

B. Russell [1], *The principles of mathematics*, 1. kötet, London, 2. kiadás, 1937.

Th. Skolem [1], Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, *Wissenschaftliche Vorträge, gehalten auf dem fünften Kongreß der skandinavischen Mathematiker* (Helsingfors, 1922, megjelent 1923-ban), 217—232.
[2], Einige Bemerkungen zu der Abhandlung von E. Zermelo: „Über die Definitheit in der Axiomatik", *Fundamenta Mathematicae*, **15** (1930), 337—341.

E. Zermelo [1], Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, *Mathematische Annalen*, **65** (1908), 261—281.
[2], Über den Begriff der Definitheit in der Axiomatik, *Fundamenta Mathematicae*, **14** (1929), 339—344.

ЗАМЕЧАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО СИСТЕМЫ АКСИОМ ГЁДЕЛЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Андраш Хайнал и Ласло Кальмар

В статье доказывается, что метатеорема M1 Гёделя (The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory, *Annals of Mathematics Studies* **3** (1940), стр. 8; русский перевод: Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств, Успехи Математических Наук, 3 (1948), стр. 96—149) может быть доказана без использования аксиомы B8 Гёделя. Так как аксиома B8 является частным случаем метатеоремы M1, то отсюда следует, что аксиома B8 может быть опущена совсем. Доказательство основывается на рассуждении чисто комбинаторического характера. Английский вариант настоящей работы будет в скором времени опувликовано в журнале *Publicationes Mathematicae* (Дебрецен).

EINE BEMERKUNG ZUM GÖDELSCHEN AXIOMENSYSTEM DER MENGENLEHRE

Von András Hajnal und László Kalmár (Szeged)

Es wird beweisen, daß der Metasatz M1 von Gödel (The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory, *Annals of Mathematics Studies*, 3 (1940), S. 8) sich ohne das Gödelsche Axiom B8 beweisen läßt. Da Axiom B8 ein Spezialfall des Metasatzes M1 ist, so folgt hieraus, das Axiom B8 überhaupt entbehrlich ist. Das Kern des Beweises ist eine rein kombinatorische Überlegung. Eine englische Version der Arbeit wird demnächst in den *Publicationes Mathematicae* (Debrecen) erscheinen.