NAGYENERGIÁJU RÉSZECSKÉKKEL BESUGÁRZOTT SZILÁRD TESTEK RÁCSSÉRÜLÉSEINEK STATISZTIKUS ELMÉLETE

Irta: Pál Lénárd és Németh Géza*

Neutronfizikai Osztály

Összefoglalás

Exakt valószinüségszámitási módszerekkel meghatároztuk nagyenergiáju részecskékkel besugárzott szilárd testben keletkező rácssérülések számának eloszlásfüggvényét. Az eloszlásfüggvény generátorfüggvényéből leszármaztattuk a rácssérülések számának átlagát és szórását meghatározó egyenleteket. Ezeket az egyenleteket megoldottuk azon feltevés mellett, hogy a primer bombázó részecskék neutronok és hogy a kiszakitott atomok, valamint a rácspontokban rezgő atomok közötti ütközéseket ideális szilárdságu golyók között lejátszódó ütközéseknek tekinthetjük. Azt találtuk, hogy a rácshibák számának szórása hasadási neutronokkal történő besugárzás esetén nagyobb, mint a Poisson-eloszlás szórásá. Ha a besugárzásnak alávetett minta vastagsága a neutronok átlagos szabad uthosszához képest kicsiny, akkor a relativ szórásra a

$$\frac{D(t)}{N_1(t)} \sim \sqrt{\left(\frac{2,1667}{Q_S\, b} + \frac{D_r^2(t)}{S_1\ (t)}\right)\frac{1}{S_1(t)}} + O\left(\frac{E_d}{E_f}\right)$$

összefüggés adódik, ahol Q_S a besugárzás hatásának alávetett anyag makroszkópikus szórási hatáskeresztmetszete, b az anyagminta vastagsága, $S_1(t)$ a t ideig tartó besugárzás alatt a minta egységnyi felületén áthaladt neutronok átlagos száma, mig D_r^2 a szórás négyzete, E_d a kiszakitási energia eV-okban és $E_f = 0,5.10^6\,eV$. $N_1(t)$ pedig a minta egységnyi felületén át, t ideig tartó besugárzás hatására kiszakitott atomok átlagos számát jelenti.

1. Bevezetés

Nagyenergiáju részecskékkel /pl. gyors neutronokkal/ besugárzott szilárd testben a kristályrács egyes atomjai kiszakadnak egyensulyi helyzetükből és hosszabb vagy rövidebb ut megtétele

---

* Az 1958.évi genfi II.Nemzetközi Atomenergia Konferencián elfogadott előadás.

után - amelynek során esetleg ujabb atomokat szakitanak ki - a kristályrács valamelyik "nem törvényes" helyén mint beékelt atomok helyezkednek el. A kristályrácsban ilyen módon lyukak és beékelt atomok keletkeznek. A kiszakitott atomok mozgásuk során részben ionizáció, részben rugalmatlan (rácsrezgések gerjesztése), részben pedig rugalmas ütközések révén veszitik el energiájukat. A kristályrácsnak ilyen módon átadott energia nagyobbik része forditódik rácsrezgések gerjesztésére és csak kisebbik része atomok kiszakitására.

A besugárzás hatására előálló rácssérülés kvantitativ jellemzésére kivánatos volna kellő gondossággal kiszámitani a kiszakitott atomok számának átlagát és lehetőség szerint a szórását is. Bár a sérült rácshelyek átlagos számának kisérleti meghatározására megbizható módszerek nem állnak rendelkezésre, mégis biztonsággal állithatjuk, hogy az eddigi elméleti becslések és kisérleti eredmények között jelentős eltérés van. Az elméleti meggondolásokból a kiszakitott atomok számának átlagára öt-hatszorosa adódik annak az értéknek, ami a kisérleti adatok alapján valószinünek látszik. Feltehető, hogy ennek az eltérésnek valódi okát a kiszakitás elemi folyamatai között kell keresnünk, mégis szükségesnek látszik általános elméleti módszer kidolgozása az összetett folyamat valószinüségszámitási tárgyalására.

Az eddig ismeretes számitási módszerek [1], [2], [3] nem adnak lehetőséget a besugárzás hatására előálló rácssérülések valószinüségszámitási tárgyalására. A következetes (legalábbis egy adott modellre vonatkozóan) számitási módszerre márcsak azért is szükség van, hogy megbecsülhessük az azonos körülmények között besugárzott vizsgálati mintákban a kiszakitott atomok számának szórását és igy elválaszthassuk a folyamat valószinüségi jellegéből adódó ingadozásokat a tényleges fizikai változásoktól.

Az általunk kidolgozott módszer [4] segitségével a kiszakitott atomok számának eloszlásfüggvényét határozhatjuk meg, illetve az eloszlásfüggvény generátorfüggvényéből az eloszlást jellemző félinvariánsokat (átlagérték, szórás stb.) számithatjuk ki. Módszerünk figyelembeveszi a kiszakitás elemi aktusának valószinüségi jellegét is és igy az a törekvés, ami A.E.Fein [5] számitásaiban e jelleg figyelembevételére irányul, az általunk követett meggondolásokban következetesen érvényesül.

A továbbiakban felépitjük a rácssérülések következetes valószinüségszámitási elméletét és rámutatunk a korábbi módszerekhez való kapcsolatára.

2. Az alapegyenletek levezetése

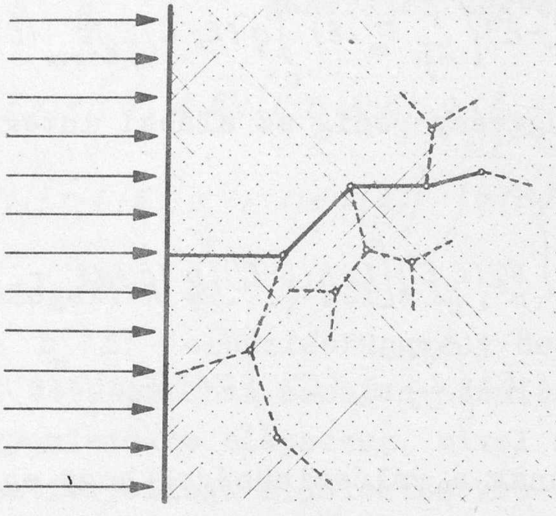
Jelöljük V_{E_0} -lal egy E_0 energiáju bombázó részecske által közvetve, vagy közvetlenül kiszakitott atomok tényleges számát. Határozzuk meg annak a valószinüségét, hogy $V_{E_0} = n$ azaz határozzuk meg a

$$\mathcal{P}(V_{E_0} = n) = P_n(E_0) \tag{2.1}$$

eloszlásfüggvényt. A $P_n(E_0)$ eloszlásfüggvény meghatározásához induljunk ki a következő feltevésekből. Tekintsük a besugárzás hatásának alávetett anyagot a tér egyik felében végtelen kiterjedésünek. A tér üres felét és a besugárzandó anyagot határolja az (x,y) végtelen sik (lásd az 1.ábrán). A tárgyalás egyszerüsitése érdekében tegyük fel, hogy a bombázó részecskék által kiszakitott atomok közül egyesek, vagy maguk a bombázó részecskék, nem juthatnak ki a besugárzandó anyagból az üres térbe. Természetesen véges méretü testekre is érvényesek meggondolásaink, mivel a kiszakitott atomok kicsiny közepes szabad uthossza miatt meglehetősen kis térfogatra koncentrálódik az általuk kiváltott hatás. A rácshibák térbeli eloszlására természetesen nem vonhatunk le következtetéseket. A $P_n(E_0)$ eloszlásfüggvény csupán arra ad felvilágositást, mekkora valószinüséggel hoz létre egy E_0 energiáju bombázó részecske n kiszakitott atomot a besugárzás hatásának alávetett minta egész térfogatában.

Számitásaink során nem vesszük figyelembe a kiszakitott atomok diffuzió utján történő beépülését szabad rácshelyekre (rekombináció), csupán a kiszakitó atomnak az általa kiszakitott atom helyére történő esetleges befogását vesszük számitásba. Igy várható, hogy a kiszakitott atomok átlagos számának általunk meghatározott értéke nagyobb lesz a valódinál. Egyszerüség kedvéért tételezzük fel azt is, hogy a besugárzandó anyag csupán egyfajta atomot tartalmaz.

Jelöljük $w_p(E_o,E)\,dE$ -vel annak a valószinüségét, hogy a bombázó részecske E_o energiája egyetlen ütközés révén az $(E, E+dE)$ intervallumba eső értékre csökken. Egyelőre semmiféle kikötést nem



1.ábra

teszünk arra vonatkozóan, hogy ez az energiacsökkenés milyen módon következik be. A bombázó részecske által eltalált atom E_o-E energiát nyer az ütközés során. Ez az energia forditódhat pl. ionizációra, rácsrezgések gerjesztésére, de kedvező esetben előidézheti a kérdéses atomnak a kristályrácsból való kiszakadását is. Jelöljük $K(E_o-E)$ -vel annak a valószinüségét, hogy a kiszakadás tényleg bekövetkezik, ha egy atom a bombázó részecskétől E_o-E energiát nyer. Legyen továbbá $q(E_o-E, E')\,dE'$ annak a valószinüsége, hogy a kiszakitott atom kinetikus energiája az $(E', E'+dE')$ intervallumba esik, azon feltevés mellett, hogy a kiszakitás előtt E_o-E energiát nyert ütköző partnerétől. Az E' energiáju kiszakitott atom természetesen további atomokat szakithat ki. Legyen $\varrho_{E'}$ azon kiszakitott atomok száma, amelyeket a bombázó részecske által közvetlenül kiszakitott atom mozgása során utódaival együtt létrehoz. Jelöljük $p_m(E')$-vel annak a valószinüségét, hogy $\varrho_{E'}=m$, azaz legyen

$$\mathcal{P}(\varrho_{E'}=m) = p_m(E') \tag{2,2}$$

Könnyen belátható, hogy a $P_n(E_o)$ eloszlásfüggvény az előzőkben bevezetett valószinüségek segitségével a következőképpen épithető fel:

$$P_n(E_o)=\int_0^{E_o} w_p(E_o,E)\left[1-K(E_o-E)\right]P_n(E)dE+$$
$$+\int_0^{E} w_p(E_o,E)K(E_o-E)\left\{\sum_{m=0}^{n}P_m(E)\int_0^{E_o-E}q(E_o-E,E')p_{n-m}(E'')dE''\right\}dE \qquad (2.3)$$

A $p_m(E)$ eloszlásfüggvény pedig az alábbi integrálegyenlet megoldásaként adódik:*

$$p_m(E)=\int_0^{E} w_s(E,E')\left[1-K(E-E')\right]p_m(E')dE'+$$
$$+\int_0^{E} w_s(E-E')K(E-E')\left\{\sum_{m'=0}^{m}p_{m'}(E')\int_0^{E-E'}q(E-E',E'')p(E'')dE''\right\}dE', \qquad (2.4)$$

ahol $w_s(E,E')dE'$ annak a valószinüsége, hogy egy kiszakitott atom energiája egy másik atommal elszenvedett ütközés során az $(E', E'+dE')$ intervallumba eső értékre csökken, azon feltevés mellett, hogy az ütközés előtt energiája E volt. Mivel nem kivánunk foglalkozni a kiszakitott atomok térbeli eloszlásával, nem vesszük figyelembe a kiszakitás anizotrópiáját.

A (2.3) és a (2.4) alatti egyenleteket a

$$G(E_o,x)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{nx}P_n(E_o), \qquad g(E,x)=\sum_{m=0}^{\infty}e^{mx}p_m(E) \qquad (2.5)$$

generátorfüggvények bevezetésével a következőképpen irhatjuk fel:

$$G(E_o,x)=\int_0^{E_o} w_p(E_o,E)G(E,x)\left\{1-K(E_o-E)+K(E_o-E)\int_0^{E_o-E}q(E_o-E,E')g(E',x)dE'\right\}dE \qquad (2.6)$$

és

$$g(E,x)=\int_0^{E} w_s(E,E')g(E',x)\left\{1-K(E-E')+K(E-E')\int_0^{E-E'}q(E-E',E'')g(E'',x)dE''\right\}dE'. \qquad (2.7)$$

A kiszakitott atomok számát csökkenti az a lehetőség, hogy a kiszakitást végző atomok bizonyos valószinüséggel befogódhatnak az általuk kiszakitott atomok helyére. Ezért a (2.4) illetve (2.7) alatti egyenletek nem tekinthetők egészen pontos egyenleteknek.

---

* $p_m(E)=\delta_{1m}$, ha E kisebb annál a legkisebb határenergiánál, amelynél csak nagyobb energiamennyiség átadásakor következhet be kiszakadás.

Jelöljük $l(E')$ -vel annak a valószinüségét, hogy a kiszakitást végző atom, amelynek energiája a kiszakitás után E', a szabaddá vált rácshelyen befogódik. Legyen $p_m^o(E)$ annak a valószinüsége, hogy egy E energiáju atom mozgása során a befogás lehetőségének figyelembevételével m kiszakitást hoz létre. Egyszerüen belátható, hogy a $g_o(E,x)=\sum_{m=0}^{\infty} e^{mx} p_m^o(E)$ generátorfüggvény a

$$g_o(E,x)=\int_0^E w_s(E,E')\left[1-K(E-E')\right]g_o(E',x)\,dE'+$$
$$+\int_0^E w_s(E,E')K(E-E')\left\{\left[1-l(E')\right]g_o(E',x)+l(E')\right\}\int_0^{E-E'} q(E-E',E'')g_o(E'',x)\,dE''dE' \qquad (2.7')$$

egyenletnek tesz eleget. A (2.7')-ből a w_s, K, q és l függvények ismeretében a $p_m^o(E)$ eloszlásfüggvény összes fontos jellemzője kiszámitható. Továbbiakban azonban számitásainkat a (2.6) és (2.7) alatti egyenletekre alapozzuk, mivel az $l(E')$ függvényre csak erősen kvalitatív jellegü kijelentéseket tehetünk.

Tegyük fel, hogy a besugárzás hatásának alávetett minta minden felület-darabját azonos intenzitásu és energia-spektrumu sugárzás éri. Jelöljük $R(t,E_1,\dots,E_k)\,dE_1\dots dE_k$ -vel annak a valószinüségét, hogy t ideig tartó besugárzás alatt a szilárd anyag egységnyi felületén k az $(E_1,E_1+E_1),\dots,(E_k,E_k+dE_k)$ intervallumokba eső bombázó részecske hatol át. Ha most $L_n(t)$ -vel jelöljük annak a valószinüségét, hogy egységnyi felületen át t ideig tartó besugárzás hatására n kiszakitott atom keletkezzék, akkor felirhatjuk, hogy

$$L_n(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}R(t,E_1,\dots,E_k)\sum_{n_1+\dots+n_k=n}P_{n_1}(E_1)\cdots P_{n_k}(E_k)\,dE_1\dots dE_k. \qquad (2.8)$$

Az általánosság különösebb megsértése nélkül feltehetjük, hogy

$$R(t,E_1,\dots,E_k)=R_k(t)\prod_{i=1}^{k}h(E_i). \qquad (2.8')$$

Vezessük be a $H(t,x)\sum_{k=0}^{\infty}e^{kx}R_k(t)$ és az $F(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{nx}L_n(t)$ generátorfüggvényeket. Segitségükkel az

$$F(t,x)=H\left\{t,\ \ln\int_0^{\infty}h(E_o)G(E_o,x)\,dE_o\right\} \qquad (2.9)$$

összefüggéshez jutunk, amiből könnyen származtathatjuk a minket érdeklő összes mennyiséget.

3. A kiszakitott atomok átlagos számának és szórásának meghatározása

a/ A (2.9)-ből a kiszakitott atomok átlagos számát a

$$\left[\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\right]_{x=0} = N_1(t) \tag{3.1}$$

Vezessük be a következő jelöléseket

$$\left[\frac{\partial H(t,x)}{\partial x}\right]_{x=0} = S_1(t)\,, \qquad \left[\frac{\partial G(E_o,x)}{\partial x}\right]_{x=0} = M_1(E_o) \tag{3.1'}$$

Az $S_1(t)$ mennyiség megadja a t ideig tartó besugárzás alatt a szilárd test egységnyi felületén áthaladt bombázó részecskék átlagos számát, mig $M_1(E_o)$ egy E_o energiáju bombázó részecske által létrehozott rácshibák számának átlagát jelöli. Végül is az egységnyi felületen át történő, t ideig tartó besugárzás alatt kiszakitott atomok számát az

$$N_1(t) = S_1(t)\int_0^\infty h(E_o)M_1(E_o)dE_o \tag{3.2}$$

kifejezés segitségével határozhatjuk meg, ahol $M_1(E_o)$ az

$$M_1(E_o) = \int_0^{E_o} w_p(E_o,E)\left\{M_1(E) + K(E_o-E)\int_0^{E_o-E} q(E_o-E,E')m_1(E')dE'\right\}dE \tag{3.3}$$

egyenletből számitható. A (3.3) alatti egyenletben szereplő $m_1(E)$ függvényt a (2.7) generátorfüggvényből az $m_1(E) = \left[\frac{\partial g(E,x)}{\partial x}\right]_{x=0}$ szabály szerint származtathatjuk. Meghatározására az alábbi egyenlet szolgál:

$$m_1(E) = \int_0^E w_S(E,E')\left\{m_1(E') + K(E-E')\int_0^{E-E'} q(E-E',E'')m_1(E'')dE''\right\}dE\,. \tag{3.4}$$

b/ A (2.9) egyenletből minden nehézség nélkül meghatározhatjuk a kiszakitott atomok számának szórását, amit az eloszlásfüggvény ismerete nélkül közvetlenül körülményes volna kiszámitani. Jelöljük $D^2(t)$-vel az egységnyi felületen át történő, t ideig tartó besugárzás alatt kiszakitott atomok számának szórásnégyzetét. $D^2(t)$ nyilván a következő összefüggés alapján adható meg:

$$D^2(t) = \left[\frac{\partial^2 \ln F(t,x)}{\partial x^2}\right]_{x=0}. \tag{3.5}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$M_2(E_o) = \left[\frac{\partial^2 G(E_o,x)}{\partial x^2}\right]_{x=0}\,, \qquad S_2(t) = \left[\frac{\partial^2 H(t,x)}{\partial x^2}\right]_{x=0}\,, \tag{3.6}$$

továbbá

$$D_d^2 = \int_0^\infty h(E_o) M_2(E_o)\, dE_o - \left\{ \int_0^\infty h(E_o) M_1(E_o)\, dE_o \right\}^2 \tag{3.7}$$

és

$$D_r^2 = S_2(t) - S_1^2(t). \tag{3.7'}$$

A (3.5)-ből azt kapjuk, hogy

$$D^2(t) = S_1(t) D_d^2 + D_r^2 \left\{ \int_0^\infty h(E_o) M_1(E_o)\, dE_o \right\}^2. \tag{3.8}$$

A (3.8) meghatározásához ki kell számitani az $M_1(E_o)$, $M_2(E_o)$ momentumokat és ismerni kell a $h(E_o)$, $S_1(t)$, $S_2(t)$ függvényeket. Könnyen belátható, hogy $M_2(E_o)$ az

$$\begin{aligned} M_2(E_o) = & \int_0^{E_o} w_p(E_o,E) \left\{ M_2(E) + K(E_o-E) \int_0^{E_o-E} q(E_o-E,E') m_2(E')\, dE' \right\} dE + \\ & + 2 \int_0^{E_o} w_p(E_o,E) K(E_o-E) M_1(E) \int_0^{E_o-E} q(E_o-E,E') m_1(E')\, dE'\, dE \end{aligned} \tag{3.9}$$

egyenletnek tesz eleget. $m_2(E)$ -re a (2.7)-ből a következő egyenlet adódik:

$$\begin{aligned} m_2(E) = & \int_0^{E} w_S(E,E') \left\{ m_2(E') + K(E-E') \int_0^{E-E'} q(E-E',E'') m_2(E'')\, dE'' \right\} dE' + \\ & + 2 \int_0^{E} w_S(E,E') K(E-E') m_1(E') \int_0^{E-E'} q(E-E',E'') m_1(E'')\, dE''\, dE'. \end{aligned} \tag{3.10}$$

A tulajdonképpeni feladat a (3.3) és a (3.4), valamint a (3.9) és a (3.1o) alatti egyenletek megoldása. Ehhez mindenekelőtt ismernünk kell a w_S, w_p és q sürüségfüggvényeket, valamint a K kiszakitási valószinüséget. Ezeknek a függvényeknek a meghatározása a kvantumelmélet feladata. Sajnos a folyamat bonyolultsága miatt ezen a téren számottevő eredmény nincsen. Amint látni fogjuk, bizonyos egyszerü esetekben meghatározhatjuk ezeket a függvényeket és a számitásokat elvégezhetjük.

4. A neutronokkal besugárzott szilárd testekben keletkező rácshibák számának átlaga és szórása

Ha a primer bombázó részecskék neutronok, akkor (legalábbis nem tul nagy energiák mellett)

$$w_p(E_0,E) = \begin{cases} (1-\alpha)^{-1}E_0^{-1}, & ha \quad E_0 \geq E \geq \alpha E_0 \\ 0, & ha \quad \alpha E_0 > E, \end{cases} \tag{4.1}$$

ahol

$$\alpha = \left(\frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1}\right)^2 \tag{4.2}$$

A (4.2) alatti kifejezésben M_2 a nyugvónak tekintett atom és M_1 pedig a bombázó neutron tömege. A neutronok által kiszakitott atomok ujabb atomokat szakithatnak ki.

Ismeretes, hogy ionizált atomok közötti ütközéseket bizonyos energiaérték alatt az atomok elektronhéjának árnyékoló hatása miatt ideális szilárdságu golyók ütközéseként kezelhetjük. A továbbiakban feltesszük, hogy a primer bombázó részecskék által kiszakitott atomok közötti ütközéseket ilyen tipusu ütközéseknek tekinthetjük. Az azonos atomok ütközésekor lejátszódó energiaátadásra ekkor a következő összefüggés érvényes:

$$w_s(E,E') = E^{-1} \quad (E \geq E' \geq 0). \tag{4.3}$$

Az egyszerüség kedvéért tételezzük fel, hogy az ütközések mindig kiszakitásra vezetnek, ha az ütközés előtt mozdulatlannak tekinthető atomnak átadott energia felülmulja az E_d kiszakitási határenergiát. Ebben az esetben könnyen belátható, hogy

$$K(E) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad E \geq E_d \\ 0, & \text{ha} \quad E < E_d \end{cases} \tag{4.4}$$

és

$$q(E,E') = \delta(E - E' - E_d). \tag{4.5}$$

a/ Számitsuk ki most az

$$N_1(t) = S_1(t) \int_0^\infty h(E_0) . M_1(E_0)\, dE_0 \tag{4.6}$$

átlagértéket a felsorolt feltételek figyelembevételével. Mindenekelőtt irjuk fel az $M_1(E_0)$ függvényt meghatározó egyenletet. A (4.1), (4.3), (4.4) és a (4.5) alapján a (3.3) és (3.4) alatti egyenletek kisebb átalakitás után a következő alakba irhatók:

$$(1-\alpha)E_0 M_1(E_0) = \int_{\alpha E_0}^{E_0} M_1(E)\,dE + \int_0^{(1-\alpha)E_0-E_d} m_1(E)\,dE \tag{4.7}$$

$$M_1(E_0) = 0, \quad \text{ha} \quad 0 \leq E_0 \leq \frac{E_d}{1-\alpha}$$

és

$$E\,m_1(E) = \int_0^E m_1(E')\,dE' + \int_0^{E-E_d'} m_1(E')\,dE'. \tag{4.8}$$

$$m_1(E) = 1, \quad \text{ha} \quad 0 \leq E \leq E_d$$

A (4.8) pontosan megegyezik a Seitz és Harrison [1], valamint Snyder és Neufeld [2] által levezetett egyenlettel. A (4.7) viszont eltér Snyder és Neufeld cikkében szereplő (6.2) alatti egyenlettől. Ha azonban feltesszük, hogy a bombázó neutron a besugárzás hatásának alávetett anyagban csak egyetlen ütközést szenved, akkor a (4.7) alatti egyenlet egyszerübbé válik. Az igy módositott egyenlet már pontosan megegyezik Snyder és Neufeld idézett egyenletével. E feltevés alapján azonban modositani kell a (4.6) alatti egyenletet, mivel a mintán áthaladó neutronok nagy valószinüséggel csak egyetlen egyszer ütköznek. (A minta végtelen vastagságunak tekinthető a kiszakitott atomok átlagos szabad uthosszához képest, de igen vékony a bombázó neutronok átlagos szabad uthosszához viszonyitva.) Jelöljük $Q_S(E_0)$-lal az E_0 energiáju neutronok makroszkópikus szórási hatáskeresztmetszetét a besugárzás hatásának kitett, b vastagságu anyagban. A (4.6) helyett a következő kifejezés irandó:

$$\mathcal{N}_1(t) = S_1(t)\int_0^\infty h(E_0)\mathcal{M}_1(E_0)\,dE_0, \tag{4.8'}$$

ahol $\mathcal{M}_1(E_0)$ az

$$\mathcal{M}_1(E_0) = \frac{Q_S(E_0)\,b}{(1-\alpha)E_0}\int_0^{(1-\alpha)E_0-E_d} m_1(E)\,dE \tag{4.8''}$$

egyenlet megoldása.

b/ A szórásnégyzetre bevezetett (3.8) alatti kifejezés különösen egyszerü alaku, ha feltételezzük, hogy $S_2(t)-S_1^2(t)=S_1(t)$. Ekkor

$$D^2(t)=S_1(t)\int_0^\infty h(E_o)M_2(E_o)dE_o, \qquad (4.9)$$

illetve a relativ szórásnégyzet

$$\frac{D^2(t)}{N_1(t)}=\frac{\int_0^\infty h(E_o)M_2(E_o)dE}{\int_0^\infty h(E_o)M_1(E_o)dE_o} \qquad (4.10)$$

A tulajdonképpeni feladat $M_2(E_o)$ meghatározása. Irjuk át a (3.9) és a (3.1o) egyenleteket a (4,1), (4.3), (4.4) és a (4.5) összefüggések figyelembevételével. Rövid számitás után azt kapjuk, hogy

$$(1-\alpha)E_o M_2(E_o)=\int_{\alpha E_o}^{E_o} M_2(E)dE+\int_0^{(1-\alpha)E_o-E_d} m_2(E)dE+2\int_0^{(1-\alpha)E_o-E_d} m_1(E)M_1(E_o-E_d-E)dE, \qquad (4.11)$$

$$M_2(E_o)=0\ ,\quad ha\quad 0\leq E_o\leq\frac{E_d}{1-\alpha}$$

és

$$E m_2(E)=\int_0^E m_2(E')dE'+\int_0^{E-E_d} m_2(E')dE'+2\int_0^{E-E_d} m_1(E-E_d-E')m_1(E')dE', \qquad (4.12)$$

$$m_2(E)=1,\quad ha\quad 0\leq E\leq E_d\,.$$

Ha ismét feltesszük, hogy a b vastagságu anyagban a bombázó neutronok mindössze egyetlen ütközést szenvednek, akkor a (4.11) az

$$\mathcal{M}_2(E_o)=\frac{Q_S(E_o)\,b}{(1-\alpha)E_o}\int_0^{(1-\alpha)E_o-E_d} m_2(E)\,dE) \qquad (4.12')$$

egyenlettel helyettesithető. A szórásnégyzetet pedig a (4.9) helyett a

$$\mathcal{D}^2(t)=S_1(t)\int_0^\infty h(E_o)\mathcal{M}_2(E_o)\,dE_o \qquad (4.13)$$

formula segitségével számithatjuk. (Általánosságban a (3.8)-ból a megfelelő kifejezést ugy kapjuk meg, hogy $M_1(E_o)$-t és $M_2(E_o)$-t $\mathcal{M}_1(E_o)$ -lal és $\mathcal{M}_2(E_o)$ -lal helyettesitjük.)

c/ A (4.6) és (4.1o) alatti kifejezések hasznositásához ki kell számitanunk a $g(E,x)$ generátorfüggvény első, illetve második momentumát. Célszerünek látszik ezért megvizsgálni a (4.1), (4.3), (4.4) és (4.5) feltételek figyelembevételével származtatható

$$E\,g(E,x) = \int_0^E g(E',x)\,dE' - \int_0^{E-E_d} g(E',x)\left[1-g(E-E_d-E')\right]dE' \qquad (4.14)$$

egyenletet és megkeresni megoldását. Legyen

$$U(z,x) = \int_0^\infty e^{-zE} g(E,x)\,dE\,. \qquad (4.15)$$

Rövid számolás után azt találjuk, hogy

$$U(z,x) = z^{-1}\left\{1-(1-e^{-x})\,e^{E_1(zE_d)}\right\}^{-1}, \qquad (4.16)$$

ahol $E_1(zE_d) = \int_{zE_d}^\infty e^{-y}/y\,dy$

Ebből minden nehézség nélkül megkaphatjuk a $p_m(E)$ eloszlásfüggvényt* is, azonban számunkra fontosabb az $m_1(E)$ és $m_2(E)$ momentumok meghatározása. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mu_1(z) = \int_0^\infty e^{-zE} m_1(E)\,dE \quad \text{és} \quad \mu_2(z) = \int_0^\infty e^{-zE} m_2(E)\,dE \qquad (4.16')$$

A (4.16) alatti kifejezésből a

$$\mu_1(z) = \left[\frac{\partial U(z,x)}{\partial x}\right]_{x=0} \quad \text{és} \quad \mu_2(z) = \left[\frac{\partial^2 U(z,x)}{\partial x^2}\right]_{x=0}$$

összefüggések alapján felirhatjuk, hogy

$$\mu_1(z) = \frac{1}{z}\exp\left\{E_1(zE_d)\right\} \qquad (4.17)$$

és

$$\mu_2(z) = 2z\,\mu_1^2(z) - \mu_1(z). \qquad (4.18)$$

A (4.17) és (4.18) felhasználásával előállithatjuk $m_1(E)$ és $m_2(E)$ aszimptotikus kifejezését $E \gg E_d$ értékekre. Egyszerü meggondolásokkal az

$$m_1(E) = e^{-C}\left(\frac{E}{E_d}+1\right)+\cdots \qquad (4.19)$$

és

$$m_2(E) \sim e^{-2C}\frac{E^2}{E_d^2} + e^{-C}\left(4e^{-C}-1\right)\frac{E}{E_d} + e^{-C}\left(3e^{-C}-1\right)+\ldots \qquad (4.20)$$

---

* Ha $E \gg E_d$, akkor aránylag egyszerü eljárással a $p_m(E) \sim$ $\sim (1-e^{C})^{m-1}\,e^{C-E/E_d}\;L_{m-1}\left(\frac{1}{1-e^{-C}}\,\frac{E}{E_d}\right)$ összefüggéshez jutunk, ahol C = 0,577 és $L_{m-1}(y)$ a Laguerre polinom.

asszimptotikus kifejezéseket kapjuk. A (4.19) és (4.2o) formulában szereplő C állandó az un. Euler-féle állandó (C = 0,577). A $d^2(E) = m_2(E) - m_1^2(E)$ szórásnégyzetre azt találjuk, hogy

$$d^2(E) \sim (2e^{-C} - 1)e^{-C}\left(\frac{E}{E_d} + 1\right) + \dots \qquad (4.20')$$

Leibfried [6] nem pontosan erre az eredményre jutott, mivel nem veszi következetesen figyelembe egyenletei összeállitásánál az E_d kiszakitási határenergia szerepét. Leibfried formulája és a (4.2o') közötti különbség a főtagban is jelentkezik, bár értéke nem jelentős. Leibfriednél a főtag 0,15 $m_1(E)$, mig a (4.2o') szerint 0,123 $m_1(E)$.

Az $m_1(E)$ és $m_2(E)$ birtokában a (4.7) és (4.11) felhasználásával kiszámithatjuk az $M_1(E_0)$és $M_2(E_0)$ momentumokat.

A (4.7) alatti egyenletből $E_0/E_d = e^{u_0}$ és $M_1(E_d e^{u_0}) = F(u_0)$ helyettesitéssel a $V(z) = \int_0^\infty e^{-u_0 z} F(u_0)\,du_0$ Laplace-transzformáltra a

$$V(z) = V_0(z) V_1(z) \qquad (4.21)$$

összefüggés származtatható, ahol

$$V_0(z) = \frac{(1-\alpha)^{z+1}}{(1-\alpha)(z+1) - 1 + \alpha^{z+1}} \qquad (4.22)$$

és

$$V_1(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u + E_1(u)}\,du \qquad (4.23)$$

Ahhoz, hogy $F(u_0)$ nagy u_0 értékekhez tartozó alakját meghatározhassuk, ismernünk kell a $V(z)$ függvény mindazon polusait, amelyek valós része nem negativ. A $V(z)$ egyik tényezője, a $V_0(z)$, a neutronok lassitásának elméletéből jól ismert. A $V_1(z)$ nem negativ valós részü pólusait Németh Géza határozta meg. A $V_0(z)$-re és a $V_1(z)$-re vonatkozó ismereteink birtokában a

$$V(z) = \frac{e^{-C}}{z-1} - \frac{1-e^{-C}}{\xi z} + V_2(z) \qquad (4.23')$$

előállitásához jutunk, ahol $V_2(z)$ a $\mathrm{Re}\, z > -1$ tartományban holomorf függvény. A (4.23')-ból $M_1(E_0)$ -ra a következő asszimptotikus formulát kapjuk:

$$M_1(E_0) \sim e^{-C} \frac{E_0}{E_d} - \frac{1-e^{-C}}{\xi} + \dots \qquad (4.24)$$

A (4.11)-ből a (4.7)-re alkalmazott eljárás megismétlésével $M_2(E_o)$-ra a következő asszimptotikus formulát származtathatjuk:

$$M_2(E_o) \sim e^{-2c}\left(\frac{E_o}{E_d}\right)^2 + \left[2\left(e^{-c} - \frac{1-e^{-c}}{\xi}\right) - 1\right] e^{-c} \frac{E_o}{E_d} + \cdots \qquad (4.25)$$

A szórásnégyzet főtagja pedig

$$D^2(E_o) \sim (2e^{-c} - 1)\, e^{-c} \frac{E_o}{E_d} + \cdots\cdots \qquad (4.26)$$

alakban irható fel. Láthatjuk, hogy a primer bombázó neutron ütközéseinek számitásbavétele a rácshibák számának relativ szórásnégyzetét (legalábbis annak nagy E_o értékekhez tartozó főtagját) nem befolyásolja.

Ha a besugárzásnak alávetett minta a bombázó neutronok átlagos szabad uthosszához képest vékonynak tekinthető, akkor nagyon valószinü, hogy minden egyes neutron csupán egyszer ütközik a mintán való áthaladása közben. Ekkor a (4.8") és a (4.12') egyenletek alapján számithatjuk ki az $\mathcal{M}_1(E_o)$ és $\mathcal{M}_2(E_o)$ momentumokat. Rövid számolás után a következő eredményt kapjuk:

$$\mathcal{M}_1(E_o) \sim Q_s b\left[\frac{1-\alpha}{2} e^{-c} \frac{E_o}{E_d} + \cdots\right] \qquad (4.27)$$

$$\mathcal{M}_2(E_o) \sim Q_s b\left[\frac{(1-\alpha)^2}{3} e^{-2c} \frac{E_o^2}{E_d^2} + \frac{1-\alpha}{2}(2e^{-c} - 1) e^{-c} \frac{E_o}{E_d} + \cdots\right] \qquad (4.28)$$

A szórásnégyzetre a

$$\mathcal{D}^2(E_o) \sim Q_s b\, (1-\alpha)^2 e^{-2c} \frac{E_o^2}{E_d^2}\left(\frac{1}{3} - \frac{Q_s b}{4}\right) + \frac{Q_s b}{2}(1-\alpha)(2e^{-c} - 1) e^{-c} \frac{E_o}{E_d} + \cdots \qquad (4.29)$$

formula adódik. Figyelemreméltó, hogy ebben az esetben a relativ szórásnégyzet igen jelentős lehet, hiszen

$$\frac{\mathcal{D}^2(E_o)}{\mathcal{M}_1(E_o)} \sim 2(1-\alpha) e^{-c} \frac{E_o}{E_d}\left(\frac{1}{3} - \frac{Q_s b}{4}\right) + 2e^{-c} - 1 + \cdots \qquad (4.30)$$

Végezetül tegyük fel, hogy a bombázó neutronok energiaspektruma a hasadási neutronok energia-spektrumával egyezik meg, azaz legyen

$$h(E_o) = \frac{1}{E_f \sqrt{2\pi e}}\, e^{-E_o/2E_f}\, sh \sqrt{\frac{E_o}{E_f}}, \qquad (4.31)$$

$$E_f = 0{,}5 \cdot 10^6\, eV .$$

A (3.8) alapján a (4.31) felhasználásával végtelen kiterjedésünek tekinthető mintában a rácssérülések számának relativ szórására a következő kifejezést kapjuk:

$$\frac{D(t)}{N_1(t)} \sim \sqrt{\left(0{,}625 + \frac{D_r^2(t)}{S_1(t)}\right)\frac{1}{S_1(t)}} + O\left(\frac{E_d}{E_f}\right), \qquad (4.32)$$

ahol $O(\frac{E_d}{E_f})$ az $\frac{E_d}{E_f}$ hányados zérusnál magasabb hatványait tartalmazó kifejezés.

Ha a besugárzásnak alávetett mintát a bombázó neutronok átlagos szabad uthosszához képest vékonynak tekintjük, akkor a (3.8) alatti kifejezésben M_1 és M_2 helyett $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ értékeivel kell számolnunk.

Tegyük fel, hogy Q_s nem függ E_o -től. Ebben az esetben a (4.27) és (4.28) alapján azt kapjuk, hogy

$$\frac{\mathcal{D}(t)}{\mathcal{N}_1(t)} \sim \sqrt{\left(\frac{2{,}1667}{Q_s b} + \frac{\mathcal{D}_r^2(t)}{S_1(t)} - 1\right)\frac{1}{S_1(t)}} + O\left(\frac{E_d}{E_f}\right), \qquad (4.33)$$

ahol $O(\frac{E_d}{E_f})$ jelentése mint a (4.32)-ben.

A (4.32) és a (4.33) alatti formulák azt mutatják, hogy a rácshibák számának relativ szórása az $S_1(t)$ növekedésével sokkal lassabban csökken, mint a Poisson-eloszlás relativ szórása.

Fein [5] megkisérelte az elméleti becslések és a kisérleti adatok közötti eltérést csökkenteni. Feltette, hogy az E_d kiszakitási határenergia nem állandó, hanem valamilyen valószinüségi törvény szerint bizonyos határok között változhat.

Jelöljük Fein után $f(E_d)\,dE_d$ -vel annak a valószinüségét, hogy a kiszakitási energia E_d és $E_d + dE_d$ közötti értéket vegyen fel. Fein [5] megmutatta, hogy a kisérleti adatokkal való egyezés érdekében az $f(E_d)$ sürüségfüggvény maximumához olyan nagy E_d értéket kellene rendelni, ami felette valószinütlen.

Véleményünk szerint a jobb egyezés érdekében az általunk levezetett (2.6) és (2.7) alatti egyenletekben szereplő q és K függvények mikrofizikai elméletére kellene a legfőbb figyelmet irányitani és a kisérleti adatok összehasonlitásánál pedig óvatossággal kellene eljárni.

I r o d a l o m

[1] Seitz, F. and Harrison, W.A., Phys. Rev., 98. 153o. (1955)
Seitz, F. and Koehler, J.S., Solid State Physics, (Academic Press Inc., New York, 1956) Vol. 2. pp. 381. ff

[2] Snyder, W.S. and Neufeld, J., Phys. Rev., 97. 1636. (1955)

[3] Snyder, W.S. and Neufeld, J., Phys. Rev., 1o3. 862. (1956)

[4] Pál, L., Energia és Atomtechnika, 1o. 255. (1957)

[5] Fein, A.E., Phys. Rev., 1o9. 1o76. (1958)

[6] Leibfried, G., Nukleonik, 1. 57. (1958)

KFKI Közlemények 6.évf. 4.szám, 1958.