Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VIII
Fonctions caractéristiques. Modèles fonctionnels

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

En hommage de M. Miron Nicolesco à son 60. anniversaire

Dans la présente Note on introduira la notion de *fonction caractéristique* pour les contractions T de l'espace de Hilbert, de type le plus général. Par l'intermédiaire de ces fonctions on construira des modèles fonctionnels pour les contractions et on résoudra complètement un problème de structure pour les dilatations unitaires des contractions, abordé dans la Note V [1]. Les relations entre les factorisations de la fonction caractéristique et les sous-espaces invariants pour la contraction donnée, annoncées dans [5] et [6], feront l'objet des Notes ultérieures.

On supposera dans toute cette Note que l'espace de Hilbert en question est *séparable*. D'ailleurs, cela ne présente pas de restriction essentielle puisque, évidemment, toute transformation linéaire continue d'un espace de Hilbert non-séparable est la somme orthogonale de transformations linéaires continues d'espaces séparables.

Soit donc T une contraction de $\mathfrak{H}$. On y attache les opérateurs

$$D_T = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad D_{T^*} = (I - TT^*)^{\frac{1}{2}},$$

les sous-espaces

$$\mathfrak{D}_T = \overline{D_T \mathfrak{H}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{D}_{T^*} = \overline{D_{T^*} \mathfrak{H}},$$

et les nombres cardinaux ($\geqq 0$)

$$\mathfrak{d}_T = \dim \mathfrak{D}_T, \quad \mathfrak{d}_{T^*} = \dim \mathfrak{D}_{T^*},$$

qu'on appellera, selon les cas, les „opérateurs de défaut", „sous-espaces de défaut" et „indices de défaut" de T: ils indiquent, en effet, les déviations de T d'être unitaire. Notons la relation

$$TD_T = D_{T^*}T \ ^{1)} \tag{1}$$

dont il s'ensuit, entre autres, que T applique $\mathfrak{D}_T$ dans $\mathfrak{D}_{T^*}$.

Cela étant, la fonction caractéristique de T sera définie, pour λ complexe, $|\lambda| < 1$, par

$$\Theta_T(\lambda) = [-T + \lambda D_{T^*}(I - \lambda T^*)^{-1} D_T] | \mathfrak{D}_T. \tag{2}$$

[1]) Conséquence de la relation évidente $TD_T^2 = D_{T^*}^2 T$.

$\Theta_T(\lambda)$ est donc une fonction dont les valeurs sont des transformations linéaires bornées de $\mathfrak{D}_T$ dans $\mathfrak{D}_{T^*}$; on montrera de plus que

$$\|\Theta_T(\lambda)\| \leqq 1. \tag{3}$$

Pour les contractions T „quasi-unitaires" (c'est-à-dire telles que $\mathfrak{d}_T = \mathfrak{d}_{T^*} < \infty$), cette definition se réduit à celle donnée par LIVŠITZ, POTAPOV, ŠMULYAN et POLATZKY [6—11]; ces auteurs envisagent aussi le cas où T n'est pas une contraction (auquel cas on définit D_T et D_{T^*} par les racines carrées des transformations $|I - T^*T|$ et $|I - TT^*|$); ils obtiennent dans certains cas particuliers aussi des formules de factorisation. Des définitions voisines portent sur les opérateurs A dont la partie imaginaire $(A - A^*)/2i$ est de rang fini, *voir* l'article [12] de BRODSKY et LIVŠITZ. Mais la voie par laquelle nous arrivons à la définition (2) est entièrement nouvelle: elle nous est ouverte par la théorie des dilatations unitaires des contractions. C'est aussi par cette théorie que nous obtenons les modèles fonctionnels pour T.

Les résultats de cette Note ont été annoncés dans [4] et [5].

1. Préliminaires

1. Soit $\mathfrak{A}$ un espace de Hilbert (séparable); nous désignons par $L^2(\mathfrak{A})$ la classe des fonctions $v(t)$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$, à valeurs dans $\mathfrak{A}$, mesurables (fortement ou faiblement, ce qui revient au même puisque $\mathfrak{A}$ est séparable) et telles que

$$\|v\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|v(t)\|_{\mathfrak{A}}^2 \, dt < \infty.$$

Par cette définition de la norme $\|v\|$, $L^2(\mathfrak{A})$ devient un espace de Hilbert (séparable); bien entendu, on ne distingue pas deux fonctions dans $L^2(\mathfrak{A})$ si elles sont égales presque partout. Toute fonction $v(t) \in L^2(\mathfrak{A})$ admet un développement en série de Fourier $\sum_{-\infty}^{\infty} e^{int} a_n$ où

$$a_n \in \mathfrak{A}, \quad \sum_{-\infty}^{\infty} \|a_n\|_{\mathfrak{A}}^2 = \|v\|^2;$$

cette série converge vers $v(t)$ en moyenne, c'est-à-dire que

$$\int_0^{2\pi} \left\| v(t) - \sum_{-m}^{n} e^{ikt} a_k \right\|_{\mathfrak{A}}^2 dt \to 0 \qquad (m, n \to \infty).$$

Tout cela se démontre comme dans le cas des fonctions numériques.

Un sous-espace important de $L^2(\mathfrak{A})$ est celui qui est constitué des fonctions dont les coefficients de Fourier a_n s'annulent pour $n < 0$; désignons ce sous-espace par $L^2_+(\mathfrak{A})$. A une fonction

$$v(t) = \sum_0^{\infty} e^{int} a_n \in L^2_+(\mathfrak{A})$$

on peut faire correspondre la fonction de la variable complexe λ:

$$u(\lambda) = \sum_0^\infty \lambda^n a_n,$$

analytique dans le cercle unité; en effet, cette série converge pour tout λ $(|\lambda|<1)$, car

$$\left\| \sum_m^n \lambda^k a_k \right\| \leqq \sum_m^n |\lambda|^k \|a_k\| \leqq \left(\sum_0^\infty \|a_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_m^\infty |\lambda|^{2k} \right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \text{ lorsque } n > m \to \infty;$$

de plus cette convergence est uniforme dans tout domaine $|\lambda| \leqq |\lambda|_0 < 1$. On peut regagner $v(t)$ de $u(\lambda)$ comme *limite radiale en moyenne;* en effet, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|v(t) - u(re^{it})\|_{\mathfrak{A}}^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\| \sum_0^\infty (1-r^n) e^{int} a_n \right\|_{\mathfrak{A}}^2 dt = \sum_0^\infty (1-r^n)^2 \|a_n\|_{\mathfrak{A}}^2 \to 0$$

lorsque $r \to 1-0$.

De plus, la limite

$$u(e^{it}) = \lim_{r \to 1-0} u(re^{it}) \tag{1.1}$$

existe même au sens *fort* (dans $\mathfrak{A}$), presque partout, et est égale presque partout à $v(t)$ (*théorème de Fatou généralisé*). En effet, en continuant $v(t)$ à une fonction périodique de période 2π, les fonctions $u_0(\lambda) = u(\lambda) - a_0$, $v_0(t) = v(t) - a_0$, seront reliées par la formule de Poisson

$$u_0(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t-s) v_0(s) \, ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{d}{ds} P_r(s) \left(\int_{t-s}^{t+s} v_0(\sigma) \, d\sigma \right) ds,$$

d'où il s'ensuit, tout comme dans le cas des fonctions numériques[2]), que $u_0(re^{it})$ tend vers $v_0(t)$ fortement $(r \to 1-0)$ en tout point t où

$$\frac{1}{2s} \int_{t-s}^{t+s} v_0(\sigma) \, d\sigma \to v_0(t) \qquad \text{fortement } (s \to 0),$$

donc presque partout[2 bis]).

Pour la fonction $u(\lambda)$ qui dérive de la fonction $v(t) \in L_+^2(\mathfrak{A})$ on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|u(re^{it})\|_{\mathfrak{A}}^2 \, dt = \sum_0^\infty r^{2n} \|a_n\|_{\mathfrak{A}}^2 \leqq \sum_0^\infty \|a_n\|_{\mathfrak{A}}^2 \qquad (0 < r < 1).$$

2) *Cf.* [15], p. 35.
2 bis) *Cf.* [14], 88.

Appelons $H^2(\mathfrak{A})$ la classe de toutes les fonctions

$$u(\lambda) = \sum_0^\infty \lambda^k a_k,$$

à valeurs dans $\mathfrak{A}$, analytiques pour $|\lambda|<1$ et pour lesquelles l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|u(re^{it})\|_{\mathfrak{A}}^2\,dt \qquad (0<r<1)$$

reste bornée par une quantité indépendante de r. Cette intégrale étant égale à $\sum_0^\infty r^{2n}\|a_n\|_{\mathfrak{A}}^2$, la condition posée est équivalente à la condition

$$\sum_0^\infty \|a_n\|_{\mathfrak{A}}^2 < \infty.$$

Ainsi, toute fonction $u(\lambda)\in H^2(\mathfrak{A})$ provient d'une fonction $v(t)\in L_+^2(\mathfrak{A})$, notamment de la fonction $v(t)=\sum_0^\infty e^{int}a_n$.

En vertu de ces considérations, la limite radiale (1. 1) existe au sens fort (dans $\mathfrak{A}$) presque partout et aussi en moyenne, pour toute fonction $u(\lambda)\in H^2(\mathfrak{A})$; la limite radiale $u(e^{it})$ appartient à $L_+^2(\mathfrak{A})$; de plus toute fonction $v(t)\in L_+^2(\mathfrak{A})$ provient de cette façon, presque partout. Comme $u(\lambda)$ et $u(e^{it})$ se déterminent mutuellement, il convient d'identifier les classes $L_+^2(\mathfrak{A})$ et $H^2(\mathfrak{A})$, en munissant de cette façon $H^2(\mathfrak{A})$ de la structure d'espace de Hilbert de $L_+^2(\mathfrak{A})$ et de la considérant comme un sous-espace de $L^2(\mathfrak{A})$.

2. Envisageons une fonction $\Theta(\lambda)$, à valeurs transformations linéaires bornées d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}_*$ et définie par une série entière

(1. 2) $$\Theta(\lambda) = \sum_0^\infty \lambda^n A_n$$

dont les coefficients sont des transformations linéaires bornées de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{H}_*$, la série étant supposée convergente pour $|\lambda|<1$ au sens de de la convergence forte des opérateurs. Supposons de plus

(1. 3) $$\|\Theta(\lambda)\| \leqq C \text{ (borne indépendante de } \lambda,\ |\lambda|<1).$$

Pareille fonction $\{\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_*, \Theta(\lambda)\}$ sera appelée une *fonction analytique bornée* ($|\lambda|<1$).

La condition (1. 3) entraîne

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\Theta(re^{it})h\|_{\mathfrak{H}_*}^2\,dt \leqq C^2\|h\|_{\mathfrak{H}}^2 \qquad (0<r<1)$$

et par conséquent

(1. 4) $$\sum_0^\infty \|A_n h\|_{\mathfrak{H}_*}^2 \leqq C^2\|h\|_{\mathfrak{H}}^2$$

pour tout $h \in \mathfrak{H}$. Il s'ensuit, en vertu du n° 1, que la limite

$$\lim_{r \to 1-0} \Theta(re^{it})h \tag{1. 5}$$

existe au sens fort (dans $\mathfrak{H}_*$) partout, sauf peut-être les points d'un ensemble E_h de mesure 0. Faisant h parcourir un ensemble dénombrable, dense dans $\mathfrak{H}$, et en réunissant les ensembles E_h correspondants, il résulte un ensemble E de mesure 0. Grâce à (1. 3), la limite (1. 5) existe pour tout t n'appartenant pas à E, quel que soit $h \in \mathfrak{H}$.

Donc la limite radiale

$$\Theta(e^{it}) = \lim_{r \to 1-0} \Theta(re^{it}) \tag{1. 6}$$

existe presque partout, au sens de la convergence forte des opérateurs. De plus, toujours en vertu du n° précédent, $\Theta(re^{it})h$ converge en moyenne $L^2(\mathfrak{H}_*)$ vers $\Theta(e^{it})h$ lorsque $r \to 1-0$, cette limite ayant, comme élément de $L^2(\mathfrak{H}_*)$, le développement de Fourier

$$\Theta(e^{it})h = \sum_0^\infty e^{int} A_n h, \tag{1. 7}$$

convergent en moyenne.

Dans ce qui suit, nous aurons à faire surtout avec des fonctions analytiques bornées pour lesquelles $\|\Theta(\lambda)\| \leqq 1$ $(|\lambda| < 1)$. Nous les appellerons *fonctions analytiques contractives.*

2. Fonctions caractéristiques

1. Pour une contraction T de l'espace $\mathfrak{H}$, nous avons déjà défini la fonction caractéristique $\Theta_T(\lambda)$ par (2), donc par

$$\Theta_T(\lambda) = [-T + \lambda D_{T^*}(I - \lambda T^*)^{-1} D_T] \,|\, \mathfrak{D}_T = \left[-T + \sum_1^\infty \lambda^n D_{T^*} T^{*n-1} D_T\right] \Big| \,\mathfrak{D}_T; \tag{2. 1}$$

on regardera $\Theta_T(\lambda)$ toujours comme une transformation de $\mathfrak{D}_T$ dans $\mathfrak{D}_{T^*}$, même si ses valeurs $\Theta_T(\lambda)f$ $(f \in \mathfrak{D}_T)$ ne sont pas denses dans $\mathfrak{D}_{T^*}$. En remplaçant T par T^*, les espaces $\mathfrak{D}_T$ et $\mathfrak{D}_{T^*}$ changent de rôle et on aura évidemment

$$\Theta_{T^*}(\lambda) = \Theta_T(\bar{\lambda})^*. \tag{2. 2}$$

Faisant usage de la relation (1) nous obtenons

$$\begin{aligned}\Theta_T(\lambda) D_T &= D_{T^*}[-T + \lambda(I - \lambda T^*)^{-1}(I - T^*T)] = \\ &= D_{T^*}(I - \lambda T^*)^{-1}[-(I - \lambda T^*)T + \lambda(I - T^*T)],\end{aligned}$$

donc

$$\Theta_T(\lambda) D_T = D_{T^*}(I - \lambda T^*)^{-1}(\lambda I - T). \tag{2. 3}$$

Comme D_T est une transformation autoadjointe, on aura

$$\begin{aligned}A(\lambda) &\overset{\text{def}}{=} I - T^*T - D_T \Theta_T(\lambda)^* \Theta_T(\lambda) D_T = \\ &= I - T^*T - (\bar{\lambda} I - T^*)(I - \bar{\lambda} T)^{-1}(I - TT^*)(I - \lambda T^*)^{-1}(\lambda I - T).\end{aligned}$$

Or, en vertu des développements

$$(I-\lambda T^*)^{-1}(\lambda I-T) = -T+\sum_1^\infty \lambda^n T^{*n-1}(I-T^*T),$$

$$(\lambda I-T)(I-\lambda T^*)^{-1} = -T+\sum_1^\infty \lambda^n(I-TT^*)T^{*n-1}$$

la relation suivante subsiste:

$$(I-TT^*)(I-\lambda T^*)^{-1}(\lambda I-T) = -T+TT^*T+\sum_1^\infty \lambda^n(I-TT^*)T^{*n-1}(I-T^*T) =$$

$$= (\lambda I-T)(I-\lambda T^*)^{-1}(I-T^*T),$$

d'où

$$A(\lambda) = [I-(\bar\lambda I-T^*)(I-\bar\lambda T)^{-1}(\lambda I-T)(I-\lambda T^*)^{-1}](I-T^*T) =$$

$$= [(I-\lambda T^*)(I-\bar\lambda T)-(\bar\lambda I-T^*)(\lambda I-T)](I-\bar\lambda T)^{-1}(I-\lambda T^*)^{-1}(I-T^*T) =$$

$$= (1-|\lambda|^2)(I-T^*T)(I-\bar\lambda T)^{-1}(I-\lambda T^*)^{-1}(I-T^*T).$$

On a donc pour $h\in\mathfrak{H}$ quelconque:

$$\|D_Th\|^2-\|\Theta_T(\lambda)D_Th\|^2 = \big(A(\lambda)h, h\big) = (1-|\lambda|^2)\|(I-\lambda T^*)^{-1}(I-T^*T)h\|^2$$

et par conséquent, pour tout élément de la forme $f=D_Th$,

$$\|f\|^2-\|\Theta_T(\lambda)f\|^2 = (1-|\lambda|^2)\|(I-\lambda T^*)^{-1}D_Tf\|^2; \tag{2.4}$$

par raison de continuité, (2.4) reste valable pour tout élément f de $\mathfrak{D}_T=\overline{D_T\mathfrak{H}}$.

Une conséquence immédiate de (2.4) est l'inégalité

$$\|f\|^2-\|\Theta_T(\lambda)f\|^2 \geqq 0 \qquad (f\in\mathfrak{D}_T),$$

ce qui prouve (3), c'est-à-dire que $\Theta_T(\lambda)$ *est, pour toute valeur de* λ, *une contraction de* $\mathfrak{D}_T$ *dans* $\mathfrak{D}_{T^*}$.

Pour $\lambda=0$ (2.4) prend la forme

$$\|f\|^2-\|\Theta_T(0)f\|^2 = \|D_Tf\|^2 \qquad (f\in\mathfrak{D}_T).$$

Notons que $D_Tf=0$ entraîne que f est orthogonal à tout élément de la forme D_Th $(h\in\mathfrak{H})$, donc orthogonal à $\mathfrak{D}_T$; comme $f\in\mathfrak{D}_T$ cela n'est possible que si $f=0$. Donc on a

$$\|\Theta_T(0)f\|<\|f\| \text{ pour tout } f\in\mathfrak{D}_T,\ f\neq 0.$$

Il est utile de faire la suivante

Définition. Une fonction analytique contractive $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ sera appelée *pure*, lorsqu'on a $\|\Theta(0)e\|<\|e\|$ pour tout $e\in\mathfrak{E}$, $e\neq 0$.

D'après ce que nous venons de démontrer, *la fonction caractéristique*

$$\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_T(\lambda)\}$$

est une fonction analytique contractive pure.

En vertu des Préliminaires, la limite radiale

$$\Theta_T(e^{it}) = \lim_{r\to 1-0} \Theta_T(re^{it})$$

existe presque partout au sens de la convergence forte des opérateurs. Pour f fixé quelconque dans $\mathfrak{D}_T$, $\Theta_T(re^{it})f$ converge, comme élément de $L^2(\mathfrak{D}_{T^*})$, en moyenne vers $\Theta_T(e^{it})f$; $\Theta_T(e^{it})f$ a le développement de Fourier

$$\Theta_T(e^{it})f = -Tf + \sum_1^\infty e^{int} D_{T^*} T^{*n-1} D_T f, \tag{2.5}$$

convergent en moyenne.

2. Envisageons deux contractions, T_1 dans $\mathfrak{H}_1$ et T_2 dans $\mathfrak{H}_2$, qui sont unitairement-équivalentes: $T_2 = \sigma T_1 \sigma^{-1}$ où σ est une transformation unitaire de $\mathfrak{H}_1$ sur $\mathfrak{H}_2$.[3]) De nos définitions il s'ensuit immédiatement que

$$\mathfrak{D}_{T_2} = \tau \mathfrak{D}_{T_1}, \quad \mathfrak{D}_{T_2^*} = \tau_* \mathfrak{D}_{T^*}, \quad \Theta_{T_2}(\lambda) = \tau_* \Theta_{T_1}(\lambda) \tau^{-1},$$

où τ et τ_* sont les restrictions de σ à $\mathfrak{D}_{T_1}$ et à $\mathfrak{D}_{T_1^*}$.

Il convient de faire la suivante

Définition. On dira que les fonctions analytiques contractives $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ et $\{\mathfrak{E}', \mathfrak{E}'_*, \Theta'(\lambda)\}$ *coïncident*, lorsqu'il existe une transformation unitaire τ de $\mathfrak{E}$ sur $\mathfrak{E}'$ et une transformation unitaire τ_* de $\mathfrak{E}_*$ sur $\mathfrak{E}'_*$, telles qu'on ait $\Theta'(\lambda) = \tau_* \Theta(\lambda) \tau^{-1}$.

Nous venons de voir que pour deux contractions *unitairement équivalentes*, les fonctions caractéristiques *coïncident*. La proposition réciproque n'est pas vraie, du moins dans cette généralité. En effet, si $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^{(u)} \oplus \mathfrak{H}^{(0)}$ est la décomposition de $\mathfrak{H}$, correspondant aux parties unitaire $T^{(u)}$ et complètement non-unitaire $T^{(0)}$ de la contraction T, on a

$$D_T = O \oplus D_{T^{(0)}}, \quad D_{T^*} = O \oplus D_{T^{(0)*}}, \quad \mathfrak{D}_T = \mathfrak{D}_{T^{(0)}}, \quad \mathfrak{D}_{T^*} = \mathfrak{D}_{T^{(0)*}}$$

et par conséquent $\Theta_T(\lambda) = \Theta_{T^{(0)}}(\lambda)$, donc *$T$ et $T^{(0)}$ ont les mêmes fonctions caractéristiques.*

Il suffira donc d'envisager les contractions complètement non-unitaires. On démontrera plus loin (§ 4) que pour celles-ci la proposition ci-dessus a une réciproque complète.

3. C'est un fait immédiat que si T est une contraction, il en est de même de

$$T_a = (T - aI)(I - \bar{a}T)^{-1} \qquad (|a| < 1).$$

Les fonctions caractéristiques de T et T_a sont reliées de la manière suivante:

$$\{\mathfrak{D}_{T_a}, \mathfrak{D}_{T_a^*}, \Theta_{T_a}(\lambda)\} \quad \textit{coïncide avec} \quad \left\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_T\left(\frac{\lambda + a}{1 + \bar{a}\lambda}\right)\right\}. \tag{2.6}$$

[3]) On appellera *unitaire* une transformation isométrique σ d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H}_1$ *sur* un espace de Hilbert $\mathfrak{H}_2$, ces deux espaces pouvant être différents. On a alors $\sigma^* = \sigma^{-1}$.

En effet, on obtient d'abord par des calculs élémentaires

$$(2.7)\qquad I-T_a^*T_a = R^*(I-T^*T)R \quad \text{et} \quad I-T_aT_a^* = R_*^*(I-TT^*)R_*$$

où
$$R = (1-|a|^2)^{\frac{1}{2}}(I-\bar{a}T)^{-1} \quad \text{et} \quad R_* = (1-|a|^2)^{\frac{1}{2}}(I-aT^*)^{-1}.$$

Il en résulte

$$(2.8)\qquad \|D_{T_a}u\|^2 = \|D_TRu\|^2, \quad \|D_{T_a^*}u\|^2 = \|D_{T^*}R_*u\|^2$$

pour tout $u\in\mathfrak{H}$. Comme R et R_* appliquent $\mathfrak{H}$ sur soi-même, les relations (2. 8) montrent qu'il existe une transformation unitaire Z de $\mathfrak{D}_{T_a}$ sur $\mathfrak{D}_T$ et une transformation unitaire Z_* de $\mathfrak{D}_{T_a^*}$ sur $\mathfrak{D}_{T^*}$ telles que

$$(2.9)\qquad ZD_{T_a} = D_TR \quad \text{et} \quad Z_*D_{T_a^*} = D_{T^*}R_*.$$

Faisant usage des formules (2. 3) et (2. 9) on obtient

$$Z_*\Theta_{T_a}(\lambda)Z^*D_T = Z_*\Theta_{T_a}(\lambda)D_{T_a}R^{-1} = Z_*D_{T_a^*}(I-\lambda T_a^*)^{-1}(\lambda I-T_a)R^{-1} =$$
$$= D_{T^*}R_*(I-\lambda T_a^*)(\lambda I-T_a)R^{-1} = D_{T^*}(I-aT^*)^{-1}(I-\lambda T_a^*)^{-1}(\lambda I-T_a)(I-\bar{a}T) =$$
$$= D_{T^*}(I-\mu T^*)^{-1}(\mu I-T), \quad \text{où} \quad \mu = \frac{\lambda+a}{1+\bar{a}\lambda}.$$

On a donc
$$Z_*\Theta_{T_a}(\lambda)Z^*D_T = \Theta_T(\mu)D_T,$$

d'où, comme Z^* et $\Theta_T(\mu)$ sont définies justement dans $\mathfrak{D}_T$, il résulte (2. 6).

3. Modèles fonctionnels d'une contraction donnée

1. Considérons une contraction complètement non-unitaire T d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. Soit U la dilatation unitaire minimum de T, opérant dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{K}\supseteq\mathfrak{H}$.

On sait (*cf.* [1], th. 1) que les sous-espaces

$$(3.1)\qquad \mathfrak{L} = \overline{(U-T)\mathfrak{H}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{L}^* = \overline{(U^*-T^*)\mathfrak{H}}$$

de $\mathfrak{K}$ sont ambulants par rapport à U et que

$$(3.2)\qquad \mathfrak{K} = \Big(\bigoplus_0^\infty U^n\mathfrak{L}\Big)\oplus\mathfrak{H}\oplus\Big(\bigoplus_0^\infty U^{*n}\mathfrak{L}^*\Big).$$

On sait aussi (*cf.* [1], démonstration du th. 3) que

$$(3.3)\qquad \mathfrak{K} = \overline{\mathfrak{M}(\mathfrak{L})+\mathfrak{M}(\mathfrak{L}^*)}.$$

Désignons par Q la projection dans $\mathfrak{K}$ sur $\mathfrak{M}(\mathfrak{L}^*)$. En posant

$$(3.4)\qquad \mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}\ominus\mathfrak{M}(\mathfrak{L}^*),\ ^{4})$$

[4]) D'après [1], théorème 2, on a $\mathfrak{K}_0=\{0\}$ si $T^{*n}\to 0$ $(n\to\infty)$, et dans ce cas seulement.

on a en vertu de (3. 3)

$$\mathfrak{K}_0 = (I-Q)\mathfrak{K} = \overline{(I-Q)\mathfrak{M}(\mathfrak{L})+(I-Q)\mathfrak{M}(\mathfrak{L}^*)} = \overline{(I-Q)\mathfrak{M}(\mathfrak{L})}. \tag{3. 5}$$

Notons que $\mathfrak{M}(\mathfrak{L}^*)$ réduit U et par conséquent

$$UQ = QU. \tag{3. 6}$$

En vertu de (3. 2), $\mathfrak{L} \perp U^n\mathfrak{L}^*$ pour $n=0,-1,-2,\ldots$, donc, pour $f\in\mathfrak{L}$, Qf est égale à la somme des projections de f sur les sous-espaces $U^n\mathfrak{L}^*$ $(n=1,2,\ldots)$, orthogonaux deux-à-deux. En désignant par Q_n la projection dans $\mathfrak{K}$ sur $U^n\mathfrak{L}_*$ où

$$\mathfrak{L}_* = U\mathfrak{L}^* = U\overline{(U^*-T^*)\mathfrak{H}} = \overline{(I-UT^*)\mathfrak{H}}, \tag{3. 7}$$

on aura donc

$$Qf = \sum_0^\infty Q_n f \qquad (f\in\mathfrak{L}). \tag{3. 8}$$

On montrera par un calcul simple que pour un élément $f\in\mathfrak{L}$ de la forme

$$f=(U-T)h \qquad (h\in\mathfrak{H}) \tag{3. 9}$$

on a

$$Q_0 f = -(I-UT^*)Th, \quad Q_n f = U^n(I-UT^*)T^{*n-1}(I-T^*T)h \quad (n=1,2,\ldots). \tag{3. 10}$$

En effet, les éléments figurant aux seconds membres appartiennent évidemment aux sous-espaces respectifs $U^n\mathfrak{L}_*$ $(n=0,1,\ldots)$ et on a

$$f+(I-UT^*)Th = U(I-T^*T)h \perp \mathfrak{L}_*$$

et

$$f-U^n(I-UT^*)T^{*n-1}(I-T^*T)h \perp U^n\mathfrak{L}_* \qquad (n\geqq 1),$$

puisque, pour tout $h'\in\mathfrak{H}$,

$$\begin{aligned}\big(U(I-T^*T)h,(I-UT^*)h'\big) &= \big(U(I-T^*T)h,h'\big)-\big(U(I-T^*T)h,UT^*h'\big) =\\ &= \big(T(I-T^*T)h,h'\big)-\big((I-T^*T)h,T^*h'\big) = 0\end{aligned}$$

et, en posant pour abbrévier $g_n = T^{*n-1}(I-T^*T)h$ $(n\geqq 1)$,

$$\begin{aligned}&\big((U-T)h-U^n(I-UT^*)g_n,\ U^n(I-UT^*)h'\big) =\\ &= \big(h,U^{n-1}(I-UT^*)h'\big)-\big(Th,U^n(I-UT^*)h'\big)-(g_n,h')+(UT^*g_n,h')+\\ &\qquad +(g_n,UT^*h')-(T^*g_n,T^*h') =\\ &= \big(h,T^{n-1}(I-TT^*)h'\big)-\big(Th,T^n(I-TT^*)h'\big)-(g_n,h')+(TT^*g_n,h')+\\ &\qquad +(g_n,TT^*h')+(T^*g_n,T^*h') =\\ &= \big((I-TT^*)T^{*n-1}h-(I-TT^*)T^{*n}Th-g_n+TT^*g_n,h'\big) =\\ &= \big((I-TT^*)T^{*n-1}(I-T^*T)h-(I-TT^*)g_n,h'\big) = 0.\end{aligned}$$

Les espaces $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}_*$ ont les mêmes dimensions $\mathfrak{d}_T$ et $\mathfrak{d}_{T^*}$ que $\mathfrak{D}_T$ et $\mathfrak{D}_{T^*}$; en effet, on obtient des applications unitaires

$$\varphi\colon \text{de } \mathfrak{L} \text{ sur } \mathfrak{D}_T, \quad \psi\colon \text{de } \mathfrak{L}_* \text{ sur } \mathfrak{D}_{T^*},$$

en complétant par continuité les applications

(3. 11) $$\varphi(U-T)h = D_T h, \quad \psi(I-UT^*)h = D_{T^*}h \qquad (h\in\mathfrak{H})$$

(*cf.* [1], th. 1). φ et ψ engendrent des applications unitaires

$$\Phi\colon \text{de } \mathfrak{M}(\mathfrak{L}) \text{ sur } L^2(\mathfrak{D}_T), \quad \Psi\colon \text{de } \mathfrak{M}(\mathfrak{L}_*) \text{ sur } L^2(\mathfrak{D}_{T^*}),$$

notamment par

(3. 12) $$\begin{aligned} \Phi \sum_{-\infty}^{\infty} U^n l_n &= \sum_{-\infty}^{\infty} e^{int}\varphi l_n \qquad (l_n\in\mathfrak{L},\ \sum \|l_n\|^2<\infty),\\ \Psi \sum_{-\infty}^{\infty} U^n l_n &= \sum_{-\infty}^{\infty} e^{int}\psi l_n \qquad (l_n\in\mathfrak{L}_*,\ \sum \|l_n\|^2<\infty). \end{aligned}$$

Observons que, par cette définition,

(3. 13) $\Phi Ug=e^{it}\Phi g$ pour tout $g\in\mathfrak{M}(\mathfrak{L})$, $\Psi Ug=e^{it}\Psi g$ pour tout $g\in\mathfrak{M}(\mathfrak{L}_*)$.

En vertu de (3. 10), (3. 11) et (1) on a pour $f=(U-T)h$

$$\begin{aligned} Q_0 f &= -\psi^{-1}D_{T^*}Th = -\psi^{-1}TD_T h = -\psi^{-1}T\varphi f,\\ Q_n f &= U^n\psi^{-1}D_{T^*}T^{*n-1}D_T^2 h = U^n\psi^{-1}D_{T^*}T^{*n-1}D_T\varphi f \qquad (n\geqq 1); \end{aligned}$$

les résultats

(3. 14) $$Q_0 f = -\psi^{-1}T\varphi f, \quad Q_n f = U^n\psi^{-1}D_{T^*}T^{*n-1}D_T\varphi f \qquad (n\geqq 1)$$

s'étendent ensuite par continuité à tous les $f\in\mathfrak{L}$. Par (3. 8), (3. 12) et (3. 14) on aura donc

$$\Psi Qf = -T\varphi f + \sum_{1}^{\infty} e^{int}D_{T^*}T^{*n-1}D_T\varphi f,$$

ce qui, comparé à (2. 5), nous donne:

(3. 15) $$\Psi Qf = \Theta_T(e^{it})\varphi f \qquad (f\in\mathfrak{L})$$

où $\Theta_T(\lambda)$ est la fonction caractéristique de T. (Il convient de remarquer que c'était en réalité cette relation qui a conduit les auteurs à la définition de la fonction caractéristique.)

De (3. 6), (3. 13) et (3. 15) on conclut pour tout $g=\sum_n U^n f_n\in\mathfrak{M}(\mathfrak{L})$:

(3. 16) $$\begin{aligned} \Psi Qg &= \Psi\sum_n U^n Qf_n = \sum_n e^{int}\Psi Qf_n =\\ &= \sum_n e^{int}\Theta_T(e^{it})\varphi f_n = \Theta_T(e^{it})\sum_n e^{int}\varphi f_n = \Theta_T\Phi g; \end{aligned}$$

ici on a fait usage aussi de ce que Θ_T, regardée comme une transformation linéaire de $L^2(\mathfrak{D}_T)$ dans $L^2(\mathfrak{D}_{T^*})$, est continue, notamment une contraction, conséquence de ce que $\Theta_T(e^{it})$ est presque partout une contraction de $\mathfrak{D}_T$ dans $\mathfrak{D}_{T^*}$.

Tenant compte de ce que Φ et Ψ sont unitaires, on obtient de (3. 16) pour tout $g \in \mathfrak{M}(\mathfrak{L})$:

$$\|(I-Q)g\|^2 = \|g\|^2 - \|Qg\|^2 = \|\Phi g\|^2_{L^2(\mathfrak{D}_T)} - \|\Psi Q g\|^2_{L^2(\mathfrak{D}_{T^*})} = \tag{3. 17}$$

$$= \|\Phi g\|^2_{L^2(\mathfrak{D}_T)} - \|\Theta_T \Phi g\|^2_{L^2(\mathfrak{D}_{T^*})} = \|\Delta_T \Phi g\|^2_{L^2(\mathfrak{D}_T)}$$

où

$$\Delta_T(t) = [I_{\mathfrak{D}_T} - \Theta_T(e^{it})^* \Theta_T(e^{it})]^{\frac{1}{2}}; \tag{3. 18}$$

pour tout t où elle est définie (donc presque partout) $\Delta_T(t)$ est une transformation autoadjointe dans $\mathfrak{D}_T$, bornée par 0 et 1; comme fonction de t elle engendre une transformation autoadjointe Δ_T dans $L^2(\mathfrak{D}_T)$, bornée également par 0 et 1.

En posant

$$\Xi(I-Q)g = \Delta_T \Phi g \quad \text{pour} \quad g \in \mathfrak{M}(\mathfrak{L}), \tag{3. 19}$$

on aura défini, en vertu de (3. 17), une application isométrique de $(I-Q)\mathfrak{M}(\mathfrak{L})$ sur le sous-ensemble linéaire

$$\Delta_T L^2(\mathfrak{D}_T) = \{\Delta_T v:\ v \in L^2(\mathfrak{D}_T)\}$$

de $L^2(\mathfrak{D}_T)$; elle se complète à une transformation *unitaire*

$$\Xi:\ \text{de}\ \mathfrak{R}_0 = \overline{(I-Q)\mathfrak{M}(\mathfrak{L})} \quad \text{sur} \quad \overline{\Delta_T L^2(\mathfrak{D}_T)} \qquad (cf.\ (3.5)).$$

Grâce à (3. 6), (3. 19) et (3. 13) on aura

$$\Xi U(I-Q)g = \Xi(I-Q)Ug = \Delta_T \Phi U g = \Delta_T e^{it} \Phi g =$$

$$= e^{it} \Delta_T \Phi g = e^{it} \Xi(I-Q)g \quad \text{pour} \quad g \in \mathfrak{M}(\mathfrak{L}),$$

d'où, par continuité, il résulte

$$\Xi U f = e^{it} \Xi f \quad \text{pour tout} \quad f \in \mathfrak{R}_0. \tag{3. 20}$$

2. Cela étant, désignons par $\mathfrak{R}_+$ le sous-espace de $\mathfrak{R}$ engendré par $\mathfrak{H}$, $U\mathfrak{H}$, $U^2\mathfrak{H}$, ... De (3. 1) et (3. 2) il s'ensuit

$$\mathfrak{R}_+ = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}), \tag{3. 21}$$

et, par (3. 4) et (3. 7), [5])

$$\mathfrak{R}_+ = \mathfrak{R} \ominus \Big(\bigoplus_0^\infty U^{*n}\mathfrak{L}^*\Big) = (\mathfrak{M}(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R}_0) \ominus \Big(\bigoplus_1^\infty U^{-n}\mathfrak{L}_*\Big),$$

donc on a aussi

$$\mathfrak{R}_+ = \mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R}_0. \text{[6])} \tag{3. 22}$$

Par sa définition, $\mathfrak{R}_+$ est invariant à U; posons

$$U_+ = U | \mathfrak{R}_+. \tag{3. 23}$$

---

[5]) Observons aussi que $\mathfrak{M}(\mathfrak{L}^*) = \mathfrak{M}(\mathfrak{L}_*)$.

[6]) Voir [4]).

En vertu de (3. 22), U_+ est la somme orthogonale de sa partie dans $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}_*)$, qui est une *translation unilatérale*, et de sa partie dans $\mathfrak{R}_0$, qui coïncide avec la partie de U dans $\mathfrak{R}_0$, donc est *unitaire*.

Désignons par Q_+ la projection dans $\mathfrak{R}_+$ sur $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}_*)$. Comme $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}_*)$ réduit U_+, on a

(3. 24) $$U_+Q_+=Q_+U_+.$$

Soient Φ_+ et Ψ_+ les restrictions de Φ et Ψ à $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L})$ et $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}_*)$; *cf.* (3. 12). Φ_+ applique $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L})$ sur $H^2(\mathfrak{D}_T)$, et Ψ_+ applique $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}_*)$ sur $H^2(\mathfrak{D}_{T^*})$. On aura évidemment

(3. 25) $$\Phi_+U_+g = e^{it}\Phi_+g \quad (g\in\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L})), \qquad \Psi_+U_+g = e^{it}\Psi_+g \quad (g\in\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}_*)).$$

En vertu des formules (3. 8)–(3. 10) la projection d'un élément f de la forme (3. 9) sur $\mathfrak{M}(\mathfrak{L}_*)$ est contenue dans $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}_*)$, ce qui entraîne par continuité que $Q_+f=Qf$ pour tout $f\in\mathfrak{L}$. Grâce à (3. 6) et (3. 24) on a, plus généralement,

$$Q_+U_+^nf = U_+^nQ_+f = U^nQf = QU^nf \quad \text{pour} \quad f\in\mathfrak{L}, \quad n\geqq 0$$

et par conséquent

(3. 26) $$Q_+g=Qg \quad \text{pour tout} \quad g\in\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}).$$

Ainsi, par (3. 16) on aura

(3. 27) $$\Psi_+Q_+g=\Theta_T\Phi_+g \quad \text{pour tout} \quad g\in\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}).$$

Les applications unitaires

$$\Psi_+\colon \text{de } \mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}_*) \text{ sur } H^2(\mathfrak{D}_{T^*}), \qquad \Xi\colon \text{de } \mathfrak{R}_0 \text{ sur } \overline{\Delta_T L^2(\mathfrak{D}_T)},$$

engendrent l'application unitaire

$$\Omega = \Psi_+\oplus\Xi\colon \text{de } \mathfrak{R}_+ = \mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}_*)\oplus\mathfrak{R}_0 \text{ sur } \mathbf{K}_+ = H^2(\mathfrak{D}_{T^*})\oplus\overline{\Delta_T L^2(\mathfrak{D}_T)}.$$

(3. 25) et (3. 20) entraînent qu'à l'opérateur U_+ de $\mathfrak{R}_+$ il correspondra, par l'application Ω, la multiplication par e^{it} dans l'espace fonctionnel $\mathbf{K}_+$.

Pour un élément $g\in\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L})$ on a la décomposition $g = Q_+g+(g-Q_+g)$ en somme de ses composantes dans $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}_*)$ et dans $\mathfrak{R}_0$, donc on aura, en vertu de (3. 19), (3. 26) et (3. 27),

$$\Omega g = \Psi_+Q_+g\oplus\Xi(I-Q)g = \Theta_T\Phi_+g\oplus\Delta_T\Phi_+g.$$

Donc $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L})$ sera appliqué par Ω sur le sous-espace

$$\mathbf{F} = \{\Theta_Tu\oplus\Delta_Tu\colon\ u\in H^2(\mathfrak{D}_T)\}$$

de $\mathbf{K}_+$. Comme $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}_+\ominus\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L})$ en vertu de (3. 21), $\mathfrak{H}$ sera appliqué, à son tour, sur le sous-espace

$$\mathbf{H} = \mathbf{K}_+\ominus\mathbf{F}.$$

Qu'est-ce qui correspond dans $\mathbf{H}$ à la transformation T? Commençons par montrer que

(3. 28) $$T^* = U_+^*|\mathfrak{H}.$$

En effet, $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L})$ étant invariant à U_+, son complémentaire $\mathfrak{H} = \mathfrak{K}_+ \ominus \mathfrak{M}_+(\mathfrak{L})$ sera invariant à U_+^*, et (3. 28) s'ensuit alors en vertu des relations, valables pour $h, h' \in \mathfrak{H}$ quelconques,

$$(T^* h, h')_{\mathfrak{H}} = (h, Th')_{\mathfrak{H}} = (h, U_+ h')_{\mathfrak{K}_+} = (U_+^* h, h')_{\mathfrak{K}_+} = (U_+^* h, h')_{\mathfrak{H}}.$$

Or, à U_+ il correspond dans $\mathbf{K}_+$ l'adjoint de l'opérateur de multiplication par e^{it}, donc la transformation

$$(u \oplus v) \to e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \oplus e^{-it} v(t) \qquad (u \oplus v \in \mathbf{K}_+).\ ^{7)}$$

Par conséquent, en désignant par $\mathbf{T}$ la transformation de $\mathbf{H}$ qui correspond à la transformation T de $\mathfrak{H}$ par l'application unitaire $\Omega|\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{H}$ sur $\mathbf{H}$, on aura

$$\mathbf{T}^*(u \oplus v) = e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \oplus e^{-it} v(t) \qquad (u \oplus v \in \mathbf{H}). \tag{3. 29}$$

Rappelons (*cf.* [4])) que les conditions $\mathfrak{K}_0 = \{0\}$ et $\lim_{n\to\infty} T^{*n} = O$ sont équivalentes. D'autre part, vu que $\overline{\Delta_T L^2(\mathfrak{D}_T)}$ est l'image de $\mathfrak{K}_0$ par l'application unitaire Ξ, on a $\mathfrak{K}_0 = \{0\}$ si $\Delta_T(t) = O$ p. p. et dans ce cas seulement. Or $\Delta_T(t) = O$ veut dire que $\Theta_T(e^{it})$ est isométrique. Ainsi, les deux conditions suivantes sont équivalentes:

(3. 30) (a) $\lim_{n\to\infty} T^{*n} = O$; (b) $\Theta_T(e^{it})$ est isométrique presque partout.

Dans les conditions équivalentes (3. 30) on aura

$$\mathbf{K}_+ = H^2(\mathfrak{D}_{T^*}), \quad \mathbf{F} = \Theta_T H^2(\mathfrak{D}_T), \quad \mathbf{H} = H^2(\mathfrak{D}_{T^*}) \ominus \Theta_T H^2(\mathfrak{D}_T)$$

et

$$\mathbf{T}^* u = e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \qquad (u \in \mathbf{H}). \tag{3. 31}$$

Réciproquement, de la représentation (3. 31) il s'ensuit, pour $u(e^{it}) = \sum_0^\infty e^{ikt} u_k \in \mathbf{H}$,

$\mathbf{T}^{*n} u = \sum_n^\infty e^{ikt} u_k \to 0$, en moyenne, lorsque $n \to \infty$.

Résumons:

Théorème 1. *Toute contraction complètement non-unitaire T de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ est unitairement équivalente à la transformation $\mathbf{T}$ de l'espace fonctionnel*

$$\mathbf{H} = \left(H^2(\mathfrak{D}_{T^*}) \oplus \overline{\Delta_T L^2(\mathfrak{D}_T)}\right) \ominus \{\Theta_T u \oplus \Delta_T u \colon u \in H^2(\mathfrak{D}_T)\},$$

définie par

$$\mathbf{T}^*(u \oplus v) = e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \oplus e^{-it} v(t) \qquad (u \oplus v \in \mathbf{H}).$$

Dans le cas particulier où $T^{*n} \to O$ $(n \to \infty)$, et seulement dans ce cas, cette représentation de T se simplifie à

$$\mathbf{H} = H^2(\mathfrak{D}_{T^*}) \ominus \Theta_T H^2(\mathfrak{D}_T), \quad \mathbf{T}^* u = e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \qquad (u \in \mathbf{H}),$$

avec $\Theta_T(e^{it})$ isométrique p. p.

---

[7]) Rappelons que toute fonction $u(e^{it}) \in H^2(\mathfrak{A})$ provient comme limite radiale d'une fonction $u(\lambda)$ analytique dans le cercle unité (*voir* les Préliminaires).

En échangeant les rôles de T et T^* on obtient le théorème dual suivant:

Théorème 1*. *Sous les mêmes hypothèses sur T que dans le théorème 1, T est unitairement équivalente à la transformation* $\mathbf{T}'$ *de l'espace fonctionnel*

$$\mathbf{H}' = \left(H^2(\mathfrak{D}_T) \oplus \overline{\Delta_{T^*} L^2(\mathfrak{D}_{T^*})}\right) \ominus \{\Theta_{T^*} u \oplus \Delta_{T^*} u \colon u \in H^2(\mathfrak{D}_{T^*})\},$$

définie par

$$\mathbf{T}'(u \oplus v) = e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \oplus e^{-it} v(t) \qquad (u \oplus v \in \mathbf{H}').$$

Dans le cas particulier où $T^n \to O$ $(n \to \infty)$, et seulement dans ce cas, cette représentation de T se simplifie à

$$\mathbf{H}' = H^2(\mathfrak{D}_T) \ominus \Theta_{T^*} H^2(\mathfrak{D}_{T^*}), \quad \mathbf{T}' u = e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \quad (u \in \mathbf{H}'),$$

avec $\Theta_{T^*}(e^{i}\ )$ isométrique p.p. [8].

4. Modèles fonctionnels: fonction analytique contractive donnée

1. Les théorèmes ci-dessus imposent le problème réciproque si toute fonction analytique contractive donnée $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ donne naissance, par des constructions analogues, à des contractions complètement non-unitaires $\mathbf{T}, \mathbf{T}'$. Comme $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ changent de rôle si l'on passe à la fonction analytique contractive adjointe $\{\mathfrak{E}_*, \mathfrak{E}, \Theta(\bar{\lambda})^*\}$, il suffira d'envisager le problème pour $\mathbf{T}$.

Soit donc donnée une fonction analytique contractive $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ où

$$\Theta(\lambda) = \sum_0^\infty \lambda^n \Theta_n,$$

et posons
$$\mathbf{K} = L^2(\mathfrak{E}_*) \oplus \overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}, \quad \mathbf{K}_+ = H^2(\mathfrak{E}_*) \oplus \overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})} \quad (\subset \mathbf{K}),$$
$$\mathbf{G} = \{\Theta w \oplus \Delta w \colon \ w \in H^2(\mathfrak{E})\} \quad (\subset \mathbf{K}_+)$$

où
$$\Delta(t) = [I_{\mathfrak{E}} - \Theta(e^{it})^* \Theta(e^{it})]^{\frac{1}{2}}.$$

$\mathbf{G}$ est évidemment un sous-ensemble linéaire de $\mathbf{K}_+$. De plus, $\mathbf{G}$ est fermé, donc un sous-espace de $\mathbf{K}_+$. En effet, en vertu de la relation

$$\|\Theta w \oplus \Delta w\|^2_{\mathbf{K}_+} = \|\Theta w\|^2_{H^2(\mathfrak{E}_*)} + \|\Delta w\|^2_{L^2(\mathfrak{E})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\|\Theta w\|^2_{\mathfrak{E}_*} + \|\Delta w\|^2_{\mathfrak{E}}]\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(\Theta^* \Theta w, w)_{\mathfrak{E}} + (\Delta^2 w, w)_{\mathfrak{E}}] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (w, w)_{\mathfrak{E}}\, dt = \|w\|^2_{H^2(\mathfrak{E})},$$

$\mathbf{G}$ est l'image, par l'application isométrique $w \to \Theta w \oplus \Delta w$, de l'espace (fermé) $H^2(\mathfrak{E})$ dans $\mathbf{K}_+$. Soit finalement

$$\mathbf{H} = \mathbf{K}_+ \ominus \mathbf{G}.$$

---

[8]) D'après (2.2) on a $\Theta_{T^*}(e^{it}) = \Theta_T(e^{-it})^*$, $\Delta_{T^*}(t) = [I_{\mathfrak{D}_{T^*}} - \Theta_T(e^{-it})\Theta_T(e^{-it})^*]^{\frac{1}{2}}$.

Désignons par $\mathbf{U}$ la multiplication par e^{it} dans $\mathbf{K}$; $\mathbf{U}$ est évidemment une transformation unitaire de $\mathbf{K}$. $\mathbf{K}_+$ est invariant pour $\mathbf{U}$; posons

$$\mathbf{U}_+ = \mathbf{U}|\mathbf{K}_+.$$

$\mathbf{G}$ est aussi invariant pour $\mathbf{U}_+$ et par conséquent $\mathbf{H}$ est invariant pour $\mathbf{U}_+^*$. On montre aisément que

$$\mathbf{U}_+^*(u\oplus v) = e^{-it}[u(e^{it})-u(0)]\oplus e^{-it}v(t) \qquad (u\oplus v\in\mathbf{K}_+).$$

$\mathbf{U}_+$ étant isométrique, $\mathbf{U}_+^*$ sera une contraction de $\mathbf{K}_+$; par conséquent la transformation $\mathbf{T}$ de $\mathbf{H}$, définie par

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{U}_+^*|\mathbf{H} \tag{4. 1}$$

sera une *contraction* de $\mathbf{H}$.

Désignons par $\mathbf{P}$ la projection dans $\mathbf{K}$ sur $\mathbf{H}$, et par $\mathbf{P}_+$ la projection dans $\mathbf{K}_+$ sur $\mathbf{H}$; donc $\mathbf{P}_+ = \mathbf{P}|\mathbf{K}_+$. De (4. 1) il s'ensuit

$$\mathbf{T}^{*n} = \mathbf{U}_+^{*n}|\mathbf{H} \tag{4. 2}$$

et, pour $h, h'\in\mathbf{H}$,

$$(\mathbf{T}^n h, h')_{\mathbf{H}} = (h, \mathbf{T}^{*n}h')_{\mathbf{H}} = (h, \mathbf{U}_+^{*n}h')_{\mathbf{K}_+} = (\mathbf{U}_+^n h, h')_{\mathbf{K}_+} = (\mathbf{P}_+\mathbf{U}_+^n h, h')_{\mathbf{H}},$$

d'où

$$\mathbf{T}^n = \mathbf{P}_+\mathbf{U}_+^n|\mathbf{H} = \mathbf{P}\mathbf{U}^n|\mathbf{H} \qquad (n\geqq 0), \tag{4. 3}$$

donc $\mathbf{U}$ *est une dilatation unitaire de* $\mathbf{T}$.

2. Montrons que la contraction $\mathbf{T}$ de $\mathbf{H}$ est *complètement non-unitaire.*

A cet effet, supposons qu'il existe un élément $u\oplus v\in\mathbf{H}$ tel que

(a) $\|\mathbf{T}^n(u\oplus v)\| = \|u\oplus v\|$ $(n\geqq 1)$, (b) $\|\mathbf{T}^{*n}(u\oplus v)\| = \|u\oplus v\|$ $(n\geqq 1)$;

comme élément de $H^2(\mathfrak{E}_*)$, u admet un développement

$$u(\lambda) = \sum_0^\infty \lambda^k a_k \qquad \left(a_k\in\mathfrak{E}_*,\ \sum_0^\infty \|a_k\|^2<\infty\right).$$

En vertu de la relation

$$\|\mathbf{T}^{*n}(u\oplus v)\|^2 = \Big\|\sum_n^\infty e^{ikt}a_k\Big\|^2_{L^2(\mathfrak{E}_*)} + \|e^{-int}v(t)\|^2_{L^2(\mathfrak{E})} =$$

$$= \sum_n^\infty \|a_k\|^2_{\mathfrak{E}_*} + \|v\|^2_{L^2(\mathfrak{E})} \to \|v\|^2_{L^2(\mathfrak{E})} \qquad (n\to\infty),$$

les hypothèses (b) entraînent $u=0$. D'autre part, grâce aux relations (4. 3), les hypothèses (a) veulent dire que $\mathbf{U}_+^n(u\oplus v)$ appartient à $\mathbf{H}$ $(n\geqq 1)$. Dans notre cas où $u=0$, $0\oplus e^{int}v(t)$ est donc orthogonal à $\mathbf{G}$, c'est-à-dire que

$$0 = (0\oplus e^{int}v, \Theta w\oplus \Delta w) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int}(v(t), \Delta(t)w(e^{it}))_{\mathfrak{E}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int}(\Delta(t)v(t), w(e^{it}))_{\mathfrak{E}}\,dt$$

pour tout $w \in H^2(\mathfrak{E})$, en particulier pour $w = e^{imt} f$ $(f \in \mathfrak{E};\ m \geqq 0)$, donc

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} (\Delta(t)\, v(t), f)_{\mathfrak{E}}\, dt = 0 \qquad (n, m \geqq 0).$$

Cela entraîne $(\Delta(t) v(t), f)_{\mathfrak{E}} = 0$ p. p., et comme $\mathfrak{E}$ est séparable, $\Delta(t) v(t) = 0$ p. p. D'autre part, $v(t)$ appartenant à $\overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}$ est la limite en moyenne d'une suite de la forme $v_n = \Delta f_n$ $\big(f_n \in L^2(\mathfrak{E})\big)$, d'où

$$\|v\|^2_{L^2(\mathfrak{E})} = \lim_n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(v(t),\, v_n(t)\big)_{\mathfrak{E}}\, dt = \lim_n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(\Delta(t)\, v(t), f_n(t)\big)_{\mathfrak{E}}\, dt = 0,$$

donc $v = 0$.

Ainsi, (a) et (b) entraînent $u \oplus v = 0$, ce qui prouve notre assertion que **T** est complètement non-unitaire.

3. Nous supposerons dès maintenant que la fonction analytique contractive envisagée $\Theta(\lambda)$ est *pure*, c'est-à-dire que

(4. 4) $$\|\Theta(0) f\| < \|f\| \text{ pour tout } f \in \mathfrak{E},\ f \neq 0,$$

et nous montrons que, sous cette condition, la fonction caractéristique de la contraction **T** coïncide avec $\Theta(\lambda)$.

A cet effet, nous démontrons d'abord que **U** est la dilatation unitaire *minimum* de **T**, c'est-à-dire que

(4. 5) $$\mathbf{K} = \bigvee_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}^n \mathbf{H}$$

De la définition de **K** et $\mathbf{K}_+$ il ressort immédiatement que $\mathbf{K} = \bigvee_{-\infty}^{0} \mathbf{U}^n \mathbf{K}_+$; donc, pour établir (4. 5), il suffit de démontrer que

(4. 6) $$\mathbf{K}_+ = \bigvee_0^{\infty} \mathbf{U}_+^n \mathbf{H} = \bigvee_0^{\infty} \mathbf{U}^n \mathbf{H}.$$

Or, supposons que $u \oplus v$ est un élément de $\mathbf{K}_+$, orthogonal à $\mathbf{U}^n \mathbf{H}$ pour $n = 0, 1, \ldots$, c'est-à-dire que $\mathbf{U}_+^{*n}(u \oplus v)$ appartient à **G** pour $n = 0, 1, \ldots$, donc

$$\mathbf{U}_+^{*n}(u \oplus v) = \Theta w^{(n)} \oplus \Delta w^{(n)} \qquad \big(w^{(n)} \in H^2(\mathfrak{E});\ n = 0, 1, \ldots\big).$$

La relation récurrente

$$\mathbf{U}_+^* (\Theta w^{(n)} \oplus \Delta w^{(n)}) = \Theta w^{(n+1)} \oplus \Delta w^{(n+1)} \qquad (n \geqq 0)$$

nous donne:

$$e^{-it}[\Theta w^{(n)} - (\Theta w^{(n)})(0)] \oplus e^{-it} \Delta w^{(n)} = \Theta w^{(n+1)} \oplus \Delta w^{(n+1)} \qquad (n \geqq 0),$$

donc $$\Theta(e^{it})\, \omega^{(n)}(e^{it}) = \Theta(0)\, w^{(n)}(0), \quad \Delta(t)\, \omega^{(n)}(e^{it}) = 0 \qquad (n \geqq 0)$$

où

(4. 7) $$\omega^{(n)}(\lambda) = w^{(n)}(\lambda) - \lambda w^{(n+1)}(\lambda) \in H^2(\mathfrak{E}).$$

Or, $\Delta(t)\omega^{(n)}(e^{it})=0$ entraîne $[\Delta(t)]^2\omega^{(n)}(e^{it})=0$, $\omega^{(n)}(e^{it})=\Theta(e^{it})^*\Theta(e^{it})\omega^{(n)}(e^{it})$; par conséquent on a

$$\omega^{(n)}(e^{it}) = \Theta(e^{it})^*\Theta(0)w^{(n)}(0) = \sum_0^\infty e^{-ikt}\Theta_k^*\Theta_0 w^{(n)}(0).$$

Vu que $\omega^{(n)}\in H^2(\mathfrak{E})$, cela n'est possible que si

$$\omega^{(n)}(\lambda)=\Theta_0^*\Theta_0 w^{(n)}(0) \tag{4. 8}$$

pour tout λ, en particulier pour $\lambda=0$. Puisque $\omega^{(n)}(0)=w^{(n)}(0)$ par (4. 7), on obtient que

$$w^{(n)}(0)=\Theta_0^*\Theta_0 w^{(n)}(0), \quad \|w^{(n)}(0)\|=\|\Theta_0 w^{(n)}(0)\|.$$

Puisque la fonction analytique contractive $\Theta(\lambda)$ est *pure*, cela entraîne $w^{(n)}(0)=0$ et, par (4. 8), $\omega^{(n)}(\lambda)\equiv 0$. Par (4. 7), on a donc $w^{(n)}(\lambda)=\lambda w^{(n+1)}(\lambda)$. Comme cela est vrai pour tout $n\geqq 0$, il en résulte

$$w^{(0)}(\lambda)=\lambda^n w^n(\lambda) \qquad (n\geqq 0),$$

donc $w^{(0)}(\lambda)/\lambda^n$ appartient à $H^2(\mathfrak{E})$ pour tout $n\geqq 0$, ce qui n'est possible que si $w^{(0)}(\lambda)\equiv 0$, d'où

$$u\oplus v = \Theta w^{(0)}\oplus\Delta w^{(0)} = 0.$$

Cela prouve (4. 6), donc aussi (4. 5), c'est-à-dire notre assertion que la dilatation unitaire $\mathbf{U}$ de $\mathbf{T}$ est *minimum*.

4. L'étape suivante sera de déterminer $\mathbf{L}_* = \overline{(\mathbf{I_K}-\mathbf{UT}^*)\mathbf{H}}$ et $\mathfrak{M}(\mathbf{L}_*)$.

Il est immédiat que pour $u\oplus v\in\mathbf{H}$

$$(\mathbf{I_K}-\mathbf{UT}^*)(u\oplus v) = [u-(u-u(0))]\oplus[v-v] = u(0)\oplus 0 \tag{4. 9}$$

où l'on envisage $u(0)$ comme une fonction constante $\in L^2(\mathfrak{E}_*)$.

Choisissons en particulier

$$\bar u(\lambda)=(I-\Theta(\lambda)\Theta_0^*)g, \quad \bar v(t)=-\Delta(t)\Theta_0^*g$$

où $g\in\mathfrak{E}_*$. Il est manifeste que $\bar u\oplus\bar v\in\mathbf{K}_+$; montrons qu'on a même $\bar u\oplus\bar v\in\mathbf{H}$. En effet, on a pour $w\in H^2(\mathfrak{E})$ quelconque:

$$(\bar u\oplus\bar v,\ \Theta w\oplus\Delta w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\Theta(e^{it})^*\bar u(e^{it})+\Delta(t)\bar v(t),\ w(e^{it}))_{\mathfrak{E}}\,dt = 0$$

puisque

$$\Theta^*\bar u+\Delta\bar v = \Theta^*g-\Theta^*\Theta\Theta_0^*g-\Delta^2\Theta_0^*g = (\Theta(e^{it})^*-\Theta_0^*)g = \sum_1^\infty e^{-int}\Theta_n^*g\perp H^2(\mathfrak{E}).$$

En vertu de (4. 9) nous avons

$$(\mathbf{I_K}-\mathbf{UT}^*)(\bar u\oplus\bar v) = (I-\Theta_0\Theta_0^*)g\oplus 0. \tag{4. 10}$$

Or, les éléments de la forme $(I-\Theta_0\Theta_0^*)g$ $(g\in\mathfrak{E}^*)$ sont *denses* dans $\mathfrak{E}_*$. En cas contraire il existerait un $g'\in\mathfrak{E}_*$, $g'\neq 0$, tel que

$$(I_{\mathfrak{E}_*}-\Theta_0\Theta_0^*)g' = 0, \tag{4. 11}$$

d'où $(I_{\mathfrak{E}}-\Theta_0^*\Theta_0)\Theta_0^*g' = \Theta_0^*(I_{\mathfrak{E}_*}-\Theta_0\Theta_0^*)g' = 0$, $\|\Theta_0^*g'\| = \|\Theta_0\Theta_0^*g'\|$. En vertu de (4. 4) cela entraîne $\Theta_0^*g'=0$ et, par (4. 11), $g'=0$. Contradiction.

En combinant ce résultat avec (4. 9) et (4. 10) nous obtenons

(4. 12) $$\mathbf{L}_* = \mathfrak{E}_* \oplus \{0\}$$

(si l'on identifie, de manière évidente, les fonctions constantes $\in L^2(\mathfrak{E}_*)$ à leurs valeurs $\in \mathfrak{E}_*$), d'où il s'ensuit finalement que

(4. 13) $$\mathfrak{M}(\mathbf{L}_*) = L^2(\mathfrak{E}_*)\oplus\{0\}.$$

En d'autres termes, si Q désigne la projection dans $\mathbf{K}$ sur $\mathfrak{M}(\mathbf{L}_*)$, on a

(4. 14) $$Q(u\oplus v) = u\oplus 0 \qquad (u\oplus v\in\mathbf{K}).$$

5. La condition que l'élément $u\oplus v$ de $\mathbf{K}_+$ appartienne à $\mathbf{H}$ s'exprime en forme détaillée comme suit:

$$(u\oplus v,\, \Theta w\oplus \Delta w)_{\mathbf{K}_+} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [(u,\, \Theta w)_{\mathfrak{E}_*} + (v,\, \Delta w)_{\mathfrak{E}}]\, dt = 0,$$

ou $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\Theta^* u + \Delta v,\, w)_{\mathfrak{E}}\, dt = 0,$$

et cela pour tout $w\in H^2(\mathfrak{E})$. En d'autres termes, la condition en question veut dire que la fonction $\Theta^*u+\Delta v$ (qui appartient évidemment à $L^2(\mathfrak{E})$), soit orthogonale à $H^2(\mathfrak{E})$, donc admette un développement de Fourier de la forme suivante:

(4. 15) $$\Theta(e^{it})^* u(e^{it}) + \Delta(t)v(t) = e^{-it}f_1 + \cdots + e^{-int}f_n + \cdots,$$

où $$f_n\in\mathfrak{E}, \quad \sum_1^\infty \|f_n\|^2 < \infty.$$

Cela étant, nous allons calculer la forme explicite de la transformation $\mathbf{T}$. En vertu de (4. 3) on a

$$\mathbf{T}(u\oplus v) = \mathbf{PU}(u\oplus v) = \mathbf{P}(e^{it}u\oplus e^{it}v) \qquad (u\oplus v\in\mathbf{H}),$$

donc $$\mathbf{T}(u\oplus v) = (e^{it}u\oplus e^{it}v) - (\Theta w\oplus \Delta w),$$

la fonction $w\in H^2(\mathfrak{E})$ étant déterminée par la condition d'orthogonalité

$$(e^{it}u\oplus e^{it}v) - (\Theta w\oplus\Delta w)\perp \Theta w'\oplus\Delta w' \text{ pour tout } w'\in H^2(\mathfrak{E}),$$

ou, ce qui revient au même, par la condition d'orthogonalité

(4. 16) $$\Theta^*(e^{it}u-\Theta w)+\Delta(e^{it}v-\Delta w) = e^{it}(\Theta^*u+\Delta v) - w\perp H^2(\mathfrak{E})$$

dans $L^2(\mathfrak{E})$. Vu le développement (4. 15), on conclut de (4. 16) que w doit être égal à f_1.

Donc, *la forme explicite de* $\mathbf{T}$ *est*

(4. 17) $$\mathbf{T}(u\oplus v) = \big(e^{it}u(e^{it}) - \Theta(e^{it})f_1\big)\oplus\big(e^{it}v(t)-\Delta(t)f_1\big)$$

où $u\oplus v\in\mathbf{H}$ *et*

$$(4.18)\qquad f_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{it}(\Theta^*u+\Delta v)\,dt.$$

De ce résultat on obtient

$$(4.19)\qquad (\mathbf{U}-\mathbf{T})(u\oplus v)=\Theta(e^{it})f_1\oplus\Delta(t)f_1$$

pour $u\oplus v\in\mathbf{H}$, d'où on conclut, en vertu de (4. 14),

$$(4.20)\qquad Q(\mathbf{U}-\mathbf{T})(u\oplus v)=\Theta(e^{it})f_1\oplus 0\qquad (u\oplus v\in\mathbf{H}).$$

Lorsque $u\oplus v$ parcourt $\mathbf{H}$, les éléments f_1 correspondants parcourent un ensemble *dense* dans $\mathfrak{E}$. Pour démontrer cette assertion, observons d'abord que, grâce à (4. 4), les éléments de la forme

$$f=(I-\Theta_0^*\Theta_0)g\qquad (g\in\mathfrak{E};\ \Theta_0=\Theta(0))$$

sont denses dans $\mathfrak{E}$. En posant

$$u\oplus v=e^{-it}[\Theta(e^{it})-\Theta_0]g\oplus e^{-it}\Delta(t)g$$

on aura

$$\Theta^*u+\Delta v=e^{-it}(\Theta^*\Theta-\Theta^*\Theta_0)g+e^{-it}\Delta^2g=$$
$$=e^{-it}(I-\Theta^*\Theta_0)g=e^{-it}(I-\Theta_0^*\Theta_0)g-e^{-2it}\Theta_1^*\Theta_0g-\cdots,$$

ce qui met en évidence (*cf.* (4. 15)) que $u\oplus v$ appartient à $\mathbf{H}$ et que l'élément correspondant f_1 est égal à l'élément f dont nous sommes parti.

En vertu de (4. 19) on aura, pour $u\oplus v\in\mathbf{H}$ quelconque,

$$\|(\mathbf{U}-\mathbf{T})(u\oplus v)\|_{\mathbf{K}}^2=\|\Theta f_1\|_{H^2(\mathfrak{E}_*)}^2+\|\Delta f_1\|_{L^2(\mathfrak{E})}^2=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[(\Theta^*\Theta f_1,f_1)_{\mathfrak{E}}+(\Delta^2f_1,f_1)_{\mathfrak{E}}]\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f_1,f_1)_{\mathfrak{E}}\,dt=\|f_1\|_{\mathfrak{E}}^2,$$

donc l'application

$$\varrho\colon\ (\mathbf{U}-\mathbf{T})(u\oplus v)\to f_1$$

est isométrique; complétons-la par continuité à une application *unitaire* ϱ de $\mathbf{L}=\overline{(\mathbf{U}-\mathbf{T})\mathbf{H}}$ sur $\mathfrak{E}$.

D'autre part, on obtient, en vertu de (4. 12), une application *unitaire* σ de $\mathbf{L}_*=\overline{(\mathbf{I_K}-\mathbf{UT}^*)\mathbf{H}}$ sur $\mathfrak{E}_*$, si l'on pose

$$\sigma(f\oplus 0)=f\qquad (f\in\mathfrak{E}).\ ^{9)}$$

(4. 20) peut alors être écrit sous la forme

$$(4.21)\qquad Ql=\Theta(e^{it})\varrho l\oplus 0=\left[\sum_0^\infty e^{int}\Theta_n\varrho l\right]\oplus 0=\sum_0^\infty e^{int}[\Theta_n\varrho l\oplus 0]=\sum_0^\infty e^{int}\sigma^{-1}\Theta_n\varrho l$$

[9]) Rappelons que nous identifions les fonctions constantes dans $L^2(\mathfrak{E}_*)$ à leurs valeurs dans $\mathfrak{E}_*$.

pour $l=(\mathbf{U}-\mathbf{T})(u\oplus v)$ $(u\oplus v\in\mathbf{H})$; par continuité, ce résultat s'étend à tous les éléments l de $\mathbf{L}$.

Définissons, en appliquant les formules (3. 11)—(3. 12) dans notre cas, les transformations unitaires

$$\varphi\text{: de } \mathbf{L} \text{ sur } \mathfrak{D}_{\mathbf{T}} \quad \text{et} \quad \psi\text{: de } \mathbf{L}_* \text{ sur } \mathfrak{D}_{\mathbf{T}^*}$$

et les transformations unitaires correspondantes

$$\Phi\text{: de } \mathfrak{M}(\mathbf{L}) \text{ sur } L^2(\mathfrak{D}_{\mathbf{T}}) \quad \text{et} \quad \Psi\text{: de } \mathfrak{M}(\mathbf{L}_*) \text{ sur } L^2(\mathfrak{D}_{\mathbf{T}^*}).$$

Grâce au fait que $\mathbf{U}$ est la multiplication par e^{it}, on déduit de (4. 21)

$$\begin{aligned}\Psi Q l &= \Psi \sum_0^\infty e^{int}\sigma^{-1}\Theta_n \varrho l = \sum_0^\infty e^{int}\psi(\sigma^{-1}\Theta_n\varrho l) = {}^{10)}\\ &= \psi\sigma^{-1}\sum_0^\infty e^{int}\Theta_n\varrho l = \psi\sigma^{-1}\Theta(e^{it})\varrho\varphi^{-1}(\varphi l) \qquad (l\in\mathbf{L}_*).\end{aligned} \tag{4. 22}$$

Observons que $\tau=\varphi\varrho^{-1}$ est une transformation unitaire de $\mathfrak{E}$ sur $\mathfrak{D}_{\mathbf{T}}$, et $\tau_*=\psi\sigma^{-1}$ est une transformation unitaire de $\mathfrak{E}_*$ sur $\mathfrak{D}_{\mathbf{T}^*}$. En comparant (4. 22) à (3. 15) nous voyons que

$$\Theta_{\mathbf{T}}(\lambda)=\tau_*\Theta(\lambda)\tau^{-1}.$$

Ainsi, la fonction caractéristique de $\mathbf{T}$ coïncide avec la fonction analytique contractive pure $\{\mathfrak{E},\mathfrak{E}_*,\Theta(\lambda)\}$, dont nous sommes parti dans notre construction.

Ainsi, nous avons démontré le

Théorème 2. *Pour toute fonction analytique contractive donnée* $\{\mathfrak{E},\mathfrak{E}_*,\Theta(\lambda)\}$, *la transformation* $\mathbf{T}$ *de l'espace fonctionnel de Hilbert*

$$\mathbf{H}=\left(H^2(\mathfrak{E}_*)\oplus\overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}\right)\ominus\{\Theta w\oplus\Delta w\colon w\in H^2(\mathfrak{E})\},$$

définie par

$$\mathbf{T}^*(u\oplus v)=e^{-it}[u(e^{it})-u(0)]\oplus e^{-it}v(t) \qquad (u\oplus v\in\mathbf{H}),$$

est une contraction complètement non-unitaire de $\mathbf{H}$; *ici* $\Delta(t)=[I-\Theta(e^{it})^*\Theta(e^{it})]^{\frac12}$.

Si de plus la fonction analytique contractive $\{\mathfrak{E},\mathfrak{E}_*,\Theta(\lambda)\}$ *est pure, c'est-à-dire* $\|\Theta(0)f\|<\|f\|$ *pour tout* $f\in\mathfrak{E}$ $(f\neq 0)$, *elle coïncide avec la fonction caractéristique de* $\mathbf{T}$. *Dans ce cas, en plongeant* $\mathbf{H}$ *de manière évidente dans l'espace* $\mathbf{K}=L^2(\mathfrak{E}_*)\oplus\oplus\overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}$, *la transformation* $\mathbf{U}(u\oplus v)=e^{it}u\oplus e^{it}v$ $(u\oplus v\in\mathbf{K})$ *sera la dilatation unitaire minimum de* $\mathbf{T}$.

6. Soient $\{\mathfrak{E},\mathfrak{E}_*,\Theta\}$ et $\{\mathfrak{E}',\mathfrak{E}'_*,\Theta'\}$ deux fonctions analytiques contractives *coïncidentes*, c'est-à-dire telles qu'il existe une application unitaire τ de $\mathfrak{E}$ sur $\mathfrak{E}'$ et une application unitaire τ_* de $\mathfrak{E}_*$ sur $\mathfrak{E}'_*$, de sorte qu'on ait $\Theta'(\lambda)=\tau_*\Theta(\lambda)\tau^{-1}$.

---

10) Nous avons à observer que toute transformation unitaire τ d'un espace de Hilbert $\mathfrak{A}$ sur un espace de Hilbert $\mathfrak{A}'$, engendre, moyennant la formule $u(t)\to u'(t)=\tau u(t)$, une transformation unitaire de l'espace $L^2(\mathfrak{A})$ sur l'espace $L^2(\mathfrak{A}')$, ainsi que de l'espace $H^2(\mathfrak{A})$ sur l'espace $H^2(\mathfrak{A}')$.

Puisque τ et τ_* sont unitaires, on aura $\Theta'(\lambda)^* = \tau\Theta(\lambda)^*\tau_*^{-1}$, d'où $\Theta'(\lambda)^*\Theta'(\lambda) = \tau\Theta(\lambda)^*\Theta(\lambda)\tau^{-1}$ et par conséquent

$$\Delta'(t) = \tau\Delta(t)\tau^{-1}. \tag{4.23}$$

Ainsi,

$$\omega:\ u(e^{it})\oplus v(t) \to \tau_* u(e^{it})\oplus \tau v(t)$$

est une application unitaire de l'espace $\mathbf{K} = H^2(\mathfrak{E}_*)\oplus\overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}$ sur l'espace $\mathbf{K}' = H^2(\mathfrak{E}'_*)\oplus\overline{\Delta' L^2(\mathfrak{E}')}$ (observons, à cet effet, que $\tau v\in\overline{\tau\Delta L^2(\mathfrak{E})} = \overline{\Delta'\tau L^2(\mathfrak{E})} = \overline{\Delta' L^2(\mathfrak{E}')}$). De plus, ω applique $\mathbf{G}$ sur $\mathbf{G}'$ parce que

$$\tau_*\Theta w\oplus\tau\Delta w = \Theta'(\tau w)\oplus\Delta'(\tau w) \qquad \left(w\in H^2(\mathfrak{E}),\ \tau w\in H^2(\mathfrak{E}')\right);$$

par conséquent ω applique $\mathbf{H} = \mathbf{K}\ominus\mathbf{G}$ sur $\mathbf{H}' = \mathbf{K}'\ominus\mathbf{G}'$. Finalement, il est manifeste que la restriction de ω à $\mathbf{H}$ transforme $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}'$. Donc $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ sont *unitairement équivalentes.*

En appliquant ce résultat en particulier aux fonctions caractéristiques et en rappelant aussi § 2. 2, nous pouvons énoncer notre

Théorème 3. *Deux contractions complètement non-unitaires sont unitairement équivalentes, si leurs fonctions caractéristiques coïncident, et dans ce cas seulement.*

7. Dans la Note VII [3] on a introduit les classes suivantes des contractions complètement non-unitaires:

$$T\in C_{0\cdot} \text{ si } T^n\to O \text{ fortement;} \quad T\in C_{1\cdot} \text{ si } T^n h\to 0 \text{ pour } \textit{aucun } h\neq 0;$$

$$T\in C_{\cdot 0} \text{ si } T^{*n}\to O \text{ fortement;} \quad T\in C_{\cdot 1} \text{ si } T^{*n} h\to 0 \text{ pour } \textit{aucun } h\neq 0;$$

de plus on a posé $C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\cdot}\cap C_{\cdot\beta}$ $(\alpha,\beta = 0, 1)$.

Nous voulons maintenant caractériser ces classes par la fonction caractéristique de T. A cet effet faisons la définition suivante:

Définition. Une fonction analytique bornée $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ $\left(|\lambda|<1\right)$ sera appelée *intérieure* si $\Theta(e^{it})$ est isométrique presque partout, et *extérieure* si $\Theta H^2(\mathfrak{E}) = \{\Theta(e^{it})u(e^{it}):\ u\in H^2(\mathfrak{E})\}$ est dense dans $H^2(\mathfrak{E}_*)$.[11])

Cela étant, nos théorèmes admettent le suivant

Corollaire. *Soit T une contraction complètement non-unitaire et soient $\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_T(\lambda)\}$, $\{\mathfrak{D}_{T^*}, \mathfrak{D}_T, \Theta_{T^*}(\lambda)\}$ les fonctions caractéristiques de T et T^*; $\Theta_{T^*}(\lambda) = [\Theta_T(\bar\lambda)]^*$. Pour qu'on ait*

(i) $T\in C_{\cdot 0}$, (ii) $T\in C_{\cdot 1}$, (iii) $T\in C_{0\cdot}$, (iv) $T\in C_{1\cdot}$,

il faut et il suffit que (i) $\Theta_T(\lambda)$ soit intérieure, (ii) $\Theta_T(\lambda)$ soit extérieure, (iii) $\Theta_{T^*}(\lambda)$ soit intérieure, (iv) $\Theta_{T^*}(\lambda)$ soit extérieure, suivant les cas. Par conséquent, on a $T\in C_{00}$ si et seulement si $\Theta_T(e^{it})$ est unitaire presque partout.

Démonstration. Les cas (iii) et (iv) se ramènent aux cas (i) et (ii) si l'on remplace T par T^*. Le cas (i) est contenu dans le théorème 1. Ainsi il nous reste

[11]) Pour les fonctions analytiques bornées dans le cercle unité, à valeurs numériques, ces définitions coïncident, en vertu d'un théorème de BEURLING (*cf.* [13] ou [15] p. 101), avec celles données par cet auteur (*cf.* [13] ou [15], p. 62).

à envisager le cas (ii). Comme les classes sont évidemment invariantes par rapport à une équivalence unitaire et comme, d'autre part, la propriété d'une fonction analytique contractive d'être intérieure ou extérieure se conserve lorsque'on passe aux fonctions coïncidentes, il suffit de considérer notre modèle fonctionnel pour T.

Soit donc $\mathbf{T}$ la contraction engendrée par une fonction analytique contractive pure $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ au sens du théorème 2. D'après le n° 2 on a

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{T}^{*n}(u\oplus v)\| = \|v\| \quad \text{pour} \quad u\oplus v\in \mathbf{H},$$

ce qui montre que $\mathbf{T}\in C_{\cdot 1}$ si, et seulement si $u\oplus 0\in\mathbf{H}$ entraîne $u=0$. Or, $u\oplus 0\in\mathbf{H}$ veut dire que $u\perp \Theta H^2(\mathfrak{E})$, et ceci entraîne $u=0$ si, et seulement si Θ est une fonction extérieure.

5. Relations entre la fonction caractéristique et le spectre

1. Le théorème suivant établit des relations entre le spectre $\sigma(T)$ et le spectre ponctuel $\sigma_p(T)$ [12]) d'une contraction complètement non-unitaire T, d'une part, et de sa fonction caractéristique $\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_T(\lambda)\}$, d'autre part. Comme jusqu'ici, C désignera le cercle unité et D son intérieur.

Théorème 4.[13]) *Le spectre $\sigma(T)$ coïncide avec l'ensemble S_T, composé des points $\lambda\in D$ où $\Theta_T(\lambda)$ n'a pas d'inverse au sens strict (c'est-à-dire partout définie dans $\mathfrak{D}_T$ et bornée) et du complémentaire dans C de l'union des arcs ouverts de C sur lesquels $\Theta_T(\lambda)$ est analytique et unitaire.*

Le spectre ponctuel $\sigma_p(T)$ coïncide avec l'ensemble s_T des points $\lambda\in D$ où $\Theta_T(\lambda)$ n'a pas d'inverse, même pas au sens large.

Démonstration. Comme T est complètement non-unitaire, elle ne peut avoir de valeur propre sur C. Lorsque $a\in\sigma_p(T)$, on a donc $a\in D$; en posant $T_a = (T-aI)(I-\bar{a}T)^{-1}$ on a alors $0\in\sigma_p(T_a)$. Par conséquent $T_a u=0$, $(I-T_a^*T_a)u=u$ pour un certain $u\neq 0$, ce qui montre que $u\in\mathfrak{D}_{T_a}$ et en vertu de (2. 1)

$$\Theta_{T_a}(0)u = -T_a u = 0.$$

Comme $\Theta_{T_a}(0)$ ne diffère de $\Theta_T(a)$ qu'en des facteurs unitaires près (*voir* le n° 3 du paragraphe 2), il résulte que $\Theta_T(a)v=0$ pour un certain $v\neq 0$, donc $a\in s_T$. Ainsi on a $\sigma_p(T)\subseteq s_T$. L'inclusion inverse peut être démontrée en parcourant ce raisonnement dans l'ordre inverse. Donc $\sigma_p(T)=s_T$.

Passons au problème du spectre et montrons d'abord pour le point 0 que s'il appartient à $\sigma(T)$, il appartient à S_T aussi et inversement. Le même fait subsiste alors pour tout point a dans D; pour le voir, il n'y a qu'à remplacer, comme plus haut, T par T_a. Ainsi, on aura prouvé

$$\sigma(T)\cap D = S_T\cap D. \tag{5. 1}$$

Rappelons que la relation (1) entraîne $T\mathfrak{D}_T\subseteq\mathfrak{D}_{T^*}$; montrons de plus que T applique $\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{D}_T$ sur $\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{D}_{T^*}$ isométriquement. En effet, les conditions $u\in\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{D}_T$,

[12]) $\sigma_p(T)$ est constitué des valeurs propres de T.

[13]) Pour le cas particulier où les indices de défaut sont finis et égaux, un énoncé voisin se trouve dans [11]; *cf.* aussi [12], théorème 7.

$D_T u=0$, $\|u\|=\|Tu\|$ sont évidemment équivalentes, de même que les conditions $v\in\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{D}_{T^*}$, $D_{T^*}v=0$, $\|v\|=\|T^*v\|$. Or, en vertu de (1), $D_T u=0$ entraîne $D_{T^*}Tu=0$ et $D_{T^*}v=0$ entraîne $D_T T^* v=0$, d'où l'on conclut que $Z=T|(\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{D}_T)$ est une application unitaire de $\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{D}_T$ sur $\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{D}_{T^*}$. En vertu de la définition (2. 1) de la fonction caractéristique on a, d'autre part, $T|\mathfrak{D}_T=-\Theta_T(0)$. Ainsi, T est la somme directe de $-\Theta_T(0)$ et d'une transformation unitaire; pour que T admette une inverse au sens strict il faut donc et il suffit que $\Theta_T(0)$ jouisse de la même propriété. Cela prouve notre assertion concernant le point 0 et par conséquent aussi (5. 1).

Supposons maintenant que α est un arc de C, compris dans l'ensemble résolvant de T; son image α^* par rapport à l'axe réel est alors comprise dans l'ensemble résolvant de T^*, d'où il s'ensuit que $\lambda(I-\lambda T^*)^{-1}=(1/\lambda-T^*)^{-1}$ existe (au sens strict) et est une fonction analytique de λ dans un domaine renfermant l'arc α. Moyennant la formule (2. 1), $\Theta_T(\lambda)$ admet alors un prolongement analytique dans le même domaine. De plus il s'ensuit de (2. 3) que $\|f\|^2-\|\Theta_T(\lambda)f\|^2\to 0$ lorsque λ tend vers un point de α; ainsi, $\Theta_T(\lambda)$ est pour $\lambda\in\alpha$ un opérateur isométrique. En remplaçant dans ce raisonnement α par α^* et T par T^*, on obtient que $\Theta_{T^*}(\bar\lambda)$ est isométrique pour $\bar\lambda\in\alpha^*$. Comme $\Theta_{T^*}(\bar\lambda)=[\Theta_T(\lambda)]^*$, il résulte que, pour $\lambda\in\alpha$, $\Theta_T(\lambda)$ est même unitaire. De cette façon, on a obtenu:

$$\sigma(T)\cap C\supseteqq S_T\cap C. \tag{5. 2}$$

En vertu de (5. 1) et (5. 2) il nous reste à prouver que si α est un arc de C sur lequel $\Theta_T(\lambda)$ est analytique et unitaire, α est contenu dans l'ensemble résolvant de T. Il suffit de démontrer cela pour notre modèle fonctionnel.

Soit donc $\mathbf{T}$ la contraction complètement non-unitaire engendrée, au sens du théorème 2, par une fonction analytique contractive pure $\{\mathfrak{E},\mathfrak{E}_*,\Theta(\lambda)\}$ telle que $\Theta(\lambda)$ est analytique et unitaire sur l'arc α. Montrons d'abord le fait suivant:

Lemme. *Pour tout élément $u\oplus v$ de*

$$\mathbf{H}=\left(H^2(\mathfrak{E}_*)\oplus\overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}\right)\ominus\{\Theta w\oplus\Delta w\colon w\in H^2(\mathfrak{E})\},$$

la fonction u $(\in H^2(\mathfrak{E}_*))$ est analytique sur α.

Démonstration. $u\oplus v\in\mathbf{H}$ veut dire, d'après (4. 15), que la fonction

$$f(t)=\Theta(e^{it})^*u(e^{it})+\Delta(t)v(t)\qquad(\in L^2(\mathfrak{E})) \tag{5. 3}$$

est orthogonale à $H^2(\mathfrak{E})$, c'est-à-dire

$$f(t)=e^{-it}f_1+e^{-2it}f_2+\cdots,\quad\text{où}\quad\sum_1^\infty\|f_k\|^2<\infty. \tag{5. 4}$$

En vertu de la dernière propriété, la fonction

$$\varphi(\lambda)=\lambda f_1+\lambda^2 f_2+\cdots$$

appartient à $H^2(\mathfrak{E})$, d'où il s'ensuit en vertu des Préliminaires que pour $r\to 1-0$

$$\varphi(re^{-it})\to\varphi(e^{-it})=f(t)\quad\text{p. p. (convergence forte dans } \mathfrak{E}) \tag{5. 5}$$

et

$$\int_0^{2\pi}\|\varphi(re^{-it})-f(t)\|_{\mathfrak{E}}^2\,dt\to 0. \tag{5. 6}$$

D'autre part, comme $u(\lambda)\in H^2(\mathfrak{E}_*)$, on a aussi

$$u(re^{it})\to u(e^{it}) \quad \text{p. p. (convergence forte dans } \mathfrak{E}_*) \tag{5.7}$$

et

$$\int_0^{2\pi} \|u(re^{it})-u(e^{it})\|^2_{\mathfrak{E}_*}\,dt\to 0. \tag{5.8}$$

Observons aussi que, $\Theta(e^{it})$ étant unitaire pour $e^{it}\in\alpha$, (5. 3) entraîne

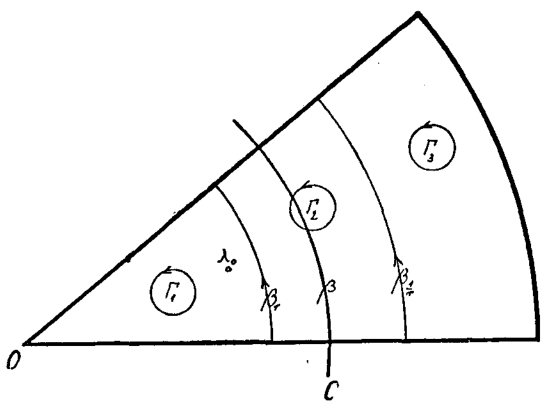
$$\Theta(e^{it})f(t)=u(e^{it}) \quad \text{pour presque tous les points } e^{it}\in\alpha. \tag{5.9}$$

Soit $\beta=\{e^{it}:\ t_1\leqq t\leqq t_2\}$ un arc fermé contenu dans α, tel que pour $t=t_1$ et $t=t_2$ les convergences (5. 5) et (5. 7) aient lieu; il est manifeste que β peut être choisi aussi proche de α que l'on veut. Choisissons le contour Γ, indiqué par la figure en ligne grasse, de sorte que $\Theta(\lambda)$ soit analytique sur Γ ainsi que dans son intérieur Σ. Définissons la fonction $F(\lambda)$ dans la partie de Σ intérieure à C par $u(\lambda)$, et dans la partie extérieure à C par $\Theta(\lambda)\varphi(1/\lambda)$; notons que $\varphi(1/\lambda)$ est analytique dans tout l'extérieur de C. $F(\lambda)$ est continue sur le contour Γ sauf aux points d'intersection avec C; là elle admet des limites des deux côtés. Par conséquent, l'intégrale

$$G(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta-\lambda}\,d\zeta \tag{5.10}$$

existe et fournit une fonction analytique dans Σ. Nous allons montrer que $G(\lambda)=$ $=u(\lambda)$ dans $\Sigma\cap D$, ce qui achèvera la démonstration du lemme.

Dans ce but, choisissons, pour λ_0 fixé dans D, r assez proche de 1 pour que les arcs β_r et $\beta_{1/r}$, de rayons r et $1/r$, soient situés comme l'indique la figure. Les arcs β_r et $\beta_{1/r}$ coupent Σ en trois parts dont les contours soient désignés par Γ_1, Γ_2 et Γ_3 (*voir* la figure). L'intégrale (5. 10) se décompose en la somme des intégrales sur ces contours, dont la première est égale à $u(\lambda_0)$ et la troisième à 0, puisque λ_0 est à l'intérieur de Γ_1 et à l'extérieur de Γ_3, et que $u(\lambda)$ et $\Theta(\lambda)\varphi(1/\lambda)$ sont analytiques sur les contours correspondants et dans leurs intérieurs. Quant à l'intégrale sur Γ_2, celle-ci tend vers 0 lorsque $r\to 1$. Cela est évident pour les intégrales sur les deux segments joignant les extrémités de β_r et $\beta_{1/r}$. D'autre part, on a pour $r\to 1$



$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_r}\frac{F(\zeta)}{\zeta-\lambda_0}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2}\frac{re^{it}}{re^{it}-\lambda_0}u(re^{it})\,dt\to\frac{1}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2}\frac{e^{it}}{e^{it}-\lambda_0}u(e^{it})\,dt,$$

conséquence, par l'inégalité de Schwarz, de (5. 8), et

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta_{1/r}}\frac{F(\zeta)}{\zeta-\lambda_0}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{r^{-1}e^{it}}{r^{-1}e^{it}-\lambda_0}\,\Theta\left(\frac{1}{r}e^{it}\right)\varphi(re^{-it})\,dt\to$$

$$\to\frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{e^{it}}{e^{it}-\lambda_0}\Theta(e^{it})f(t)\,dt,$$

conséquence, toujours par l'inégalité de Schwarz, de (5. 6) et de ce que $\Theta(\lambda)$ est analytique dans $\Sigma\cup\Gamma$. Vu (5. 9), on conclut que l'intégrale en question, prise sur le contour Γ_2, tend vers 0 lorsque $r\to 1$. Donc on a $G(\lambda_0)=u(\lambda_0)$, c. q. f. d.

Cela étant, nous achevons la démonstration du théorème 4 comme il suit.

Observons que pour $u(e^{it})\oplus v(t)\in\mathbf{H}$ et ν fixé dans D, on a aussi $u_\nu(e^{it})\oplus v_\nu(t)\in\mathbf{H}$ où

$$(5.11)\qquad u_\nu(\lambda)=\frac{1}{\lambda-\nu}[\lambda u(\lambda)-\nu u(\nu)],\quad v_\nu(t)=\frac{1}{e^{it}-\nu}e^{it}v(t);$$

de plus

$$(5.12)\qquad (\mathbf{I}-\nu\mathbf{T}^*)(u_\nu\oplus v_\nu)=u\oplus v\qquad (\mathbf{I}=I_{\mathbf{H}}).$$

Tout cela se vérifie par un calcul simple basé sur la définition de $\mathbf{H}$ et $\mathbf{T}$ dans le théorème 2, faisant usage notamment de la caractérisation (4. 15) des éléments de $\mathbf{H}$. Faisons tendre ν vers un point ε de l'arc α. Comme $u(\lambda)$ est analytique en ε d'après le lemme, et comme, d'autre part, $v(t)=0$ presque partout sur l'intervalle des t correspondant à l'arc α (en effet, $\Delta(t)=O$ presque partout sur cet intervalle, et $v\in\overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}$), on conclut que $u_\nu\oplus v_\nu$ converge dans $H^2(\mathfrak{E}_*)\oplus\overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}$ vers une limite, que nous désignons par $u_\varepsilon\oplus v_\varepsilon$ et qui appartient donc aussi à $\mathbf{H}$; en vertu de (5. 12) on aura aussi dans ce cas limite

$$(5.13)\qquad (\mathbf{I}-\varepsilon\mathbf{T}^*)(u_\varepsilon\oplus v_\varepsilon)=u\oplus v.$$

Comme $\mathbf{T}^*$ est complètement non-unitaire, elle n'a pas de valeur propre sur C; par conséquent $\mathbf{I}-\varepsilon\mathbf{T}^*$ admet une inverse, du moins au sens large. Mais comme, d'après (5. 13), cette inverse est définie partout dans $\mathbf{H}$, elle doit être bornée. Donc $(\mathbf{I}-\varepsilon\mathbf{T}^*)^{-1}$, et alors aussi $(\varepsilon\mathbf{I}-\mathbf{T})^{-1}$, existent au sens strict. Cela prouve que tout point de α appartient à l'ensemble résolvant de $\mathbf{T}$, ce qui achève la démonstration de théorème 4.

2. Voici un exemple qui montre la maniabilité de notre modèle fonctionnel pour obtenir des contractions de certains types préscrits.

Dans la Note VII [3] on a démontré que toute contraction T de classe C_{11} est quasi similaire à une transformation unitaire (théorème 3). (Deux transformations linéaires bornées A et B sont dites quasi similaires lorsque chacune d'elles est une transformée quasi affine de l'autre, c'est-à-dire qu'il existe des transformations linéaires bornées X et Y, admettant des inverses non nécessairement bornées mais à domaines denses, telles que $AX=XB$ et $BY=YA$.)

Toutefois, cette quasi similarité ne conserve pas le spectre. Nous allons montrer notamment qu'il existe *une contraction* $T \in C_{11}$ *dont le spectre coïncide avec le disque unité fermé* $\bar{D}$.

En effet, soit A une transformation autoadjointe bornée dans un espace de Hilbert $\mathfrak{E}$, telle que $\|A\| < 1$; supposons de plus que le point 0 appartient au spectre de A, sans être une valeur propre de A. La fonction constante $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, A\}$ est alors évidemment une fonction analytique pure; soit **T** la contraction complètement non-unitaire qu'elle engendre en vertu du théorème 2. Comme A^{-1} n'existe pas au sens strict, on a d'après le théorème 4: $\sigma(T) \supset D$, donc, vu que $\sigma(T)$ est un ensemble fermé, $\sigma(T) = \bar{D}$.

Montrons que $T \in C_{\cdot 1}$. En vertu du corollaire dans § 4.7 cela revient à montrer que $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, A\}$ est une fonction extérieure, c'est-à-dire que $AH^2(\mathfrak{E})$ est dense dans $H^2(\mathfrak{E})$. Or, si $u \in H^2(\mathfrak{E})$ est orthogonale à $AH^2(\mathfrak{E})$, on a $Au(\lambda) = 0$ pour tout $|\lambda| < 1$; vu que le point 0 n'est pas une valeur propre de A, cela entraîne $u(\lambda) \equiv 0$, $u = 0$, ce qui prouve que $AH^2(\mathfrak{E})$ est dense dans $H^2(\mathfrak{E})$. Donc T appartient à $C_{\cdot 1}$.

Comme notre fonction analytique contractive pure $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, A\}$ coïncide (et même est identique) à son adjointe, on a aussi $T \in C_{1\cdot}$, donc $T \in C_{11}$.

6. Cas particuliers de contractions de classe C_0

Dans la Note VII [3] on a introduit encore une classe de contractions, notamment la classe C_0, constituée des contractions complètement non-unitaires T pour lesquelles il existe une fonction à valeurs numériques $d(\lambda) \in H^\infty$ (c'est-à-dire analytique et bornée dans D), telle que $d(\lambda) \not\equiv 0$ et $d(T) = O$. On a montré que

$$C_0 \subseteqq C_{00} \quad (cf.\ \S\, 4.7).$$

De plus, on a démontré que pour toute contraction $T \in C_0$ il existe une *fonction minimum* $m_T(\lambda)$, determinée à un facteur constant $\varkappa$ près $(|\varkappa| = 1)$, jouissant des propriétés suivantes: (i) $m_T(\lambda)$ est une fonction intérieure [14]); (ii) $m_T(T) = O$; (iii) $m_T(\lambda)$ est un diviseur dans H^∞ de toute autre fonction $u(\lambda)$ pour laquelle $u(T) = O$. La connaissance de la fonction minimum nous a permis d'obtenir des informations importantes concernant le spectre de T et les sous-espaces invariants pour T (*voir* les théorèmes 7—9 de la Note citée, dont le théorème 7 est analogue au théorème 4 de la Note présente).

Nous allons démontrer une condition suffisante pour qu'une contraction T appartienne à la classe C_0 et, pour ces T, nous déduirons la fonction minimum en partant de la fonction caractéristique.

Théorème 5. *Soit T une contraction complètement non-unitaire, appartenant à la classe C_{00}, et telle que les indices de défaut $\mathfrak{d}_T$ et $\mathfrak{d}_{T^*}$ sont finis. On a alors $T \in C_0$. De manière plus précise, on a dans ce cas $\mathfrak{d}_T = \mathfrak{d}_{T^*} = n \geqq 1$ et*

(6. 1) $$d(T) = O \quad où \quad d(\lambda) = \det\left[\Theta_T(\lambda)\right],$$

$\left[\Theta_T(\lambda)\right]$ étant la matrice carrée attachée à $\Theta_T(\lambda)$ par le choix de deux bases orthonormales dans les espaces de défaut $\mathfrak{D}_T$ et $\mathfrak{D}_{T^*}$; de plus la fonction minimum $m_T(\lambda)$ est

[14]) Rappelons qu'une fonction numérique $u(\lambda)$, analytique dans $D = \{\lambda : |\lambda| \leqq 1\}$, est *intérieure*, si l'on a $|u(\lambda)| \leqq 1$ dans D et $|u(e^{it})| = 1$ pp. sur la circonférence unité (*cf.* [13] ou [15]).

égale au quotient de $d(\lambda)$ par le plus grand diviseur intérieur des mineurs d'ordre $n-1$ de $[\Theta_T(\lambda)]$ si $n>1$, et à $d(\lambda)$ si $n=1$.

Démonstration. En vertu du corollaire de § 4. 7, $T\in C_{00}$ entraîne que $\Theta_T(e^{it})$ est unitaire p. p., ce qui montre que $\mathfrak{d}_T=\mathfrak{d}_{T^*}$. Comme on a supposé que les indices de défaut sont finis, ils sont donc égaux au même nombre entier fini $n\geqq 1$. ($n=0$ veut dire que T est unitaire, ce qui contredit nos hypothèses.) La fonction caractéristique $\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_T(\lambda)\}$ coïncide donc avec une fonction analytique contractive pure de la forme $\{E^n, E^n, \Theta(\lambda)\}$ où E^n est l'espace euclidien des vecteurs à n composantes complexes et $\Theta(\lambda)$ est une matrice carrée d'ordre n, telle que $\Theta(e^{it})$ est p. p. unitaire. Comme les assertions du théorème sont invariantes par rapport à une équivalence unitaire de T, il suffira de les démontrer pour le modèle correspondant, c'est-à-dire pour la contraction $\mathbf{T}$ de l'espace

$$\mathbf{H} = H^2(E^n)\ominus\Theta H^2(E^n),$$

définie par

$$\mathbf{T}^*u = e^{-it}(u-u(0)) \qquad (u\in\mathbf{H}).$$

Rappelons que, dans ce cas, $\mathbf{K}_+=H^2(E^n)$ et $\mathbf{T}^n u=\mathbf{P}_+(e^{int}u)$ pour $u\in\mathbf{H}$ et $n=0, 1, \ldots$ (*voir* (4. 3)); $\mathbf{P}_+$ désigne la projection de $H^2(E^n)$ sur $\mathbf{H}$. Cela entraîne pour toute fonction $h(\lambda)\in H^\infty$:

$$h(\mathbf{T})u=\mathbf{P}_+(h(e^{it})u) \qquad (u\in\mathbf{H}).$$

Pour qu'on ait $h(\mathbf{T})=\mathbf{O}$ il faut donc et il suffit que hu appartienne à $\Theta H^2(E^n)$ pour tout $u\in\mathbf{H}$. Comme hu appartient évidemment à $\Theta H^2(E^n)$ pour $u\in\Theta H^2(E^n)$, la condition obtenue veut dire que hu appartient à $\Theta H^2(E^n)$ pour *tout* $u\in H^2(E^n)$. Répétons:

(6. 2) $\qquad h(\mathbf{T})=\mathbf{O}$ *si, et seulement si* $hH^2(E^n)\subseteqq\Theta H^2(E^n)$.

Or, soit $\Theta^A(\lambda)$ la matrice algébriquement adjointe à $\Theta(\lambda)$, c'est-à-dire pour laquelle

(6. 3) $$\Theta^A(\lambda)\,\Theta(\lambda)=\Theta(\lambda)\,\Theta^A(\lambda)=d(\lambda)I$$

où $d(\lambda)$ est le déterminant de $\Theta(\lambda)$ et I est la transformation identique de E^n. $d(\lambda)$ est analytique dans D et on a $|d(e^{it})|=1$ p. p. (puisque $\Theta(e^{it})$ est unitaire p. p.) donc $d(\lambda)$ est une fonction intérieure. Si $n>1$, les éléments de la matrice $\Theta^A(\lambda)$ sont les mineurs d'ordre $n-1$ de la matrice $\Theta(\lambda)$ et par conséquent ils sont des fonctions appartenant à la classe H^∞; si $n=1$, $\Theta^A(\lambda)$ a le seul élément 1. Soit $k(\lambda)$ le plus grand diviseur commun intérieur[15]) des éléments de $\Theta^A(\lambda)$ (comme fonctions dans H^∞). On a alors $\Theta^A(\lambda)=k(\lambda)\,\Omega(\lambda)$ et $d(\lambda)=k(\lambda)m(\lambda)$ où $\Omega(\lambda)$ est une matrice dont les éléments appartiennent à H^∞ et n'ont pas de diviseur commun intérieur non-constant, et $m(\lambda)$ est une fonction intérieure. (Dans le cas $n=1$ on a évidemment $k(\lambda)=1$, donc $m(\lambda)=d(\lambda)$). De (6. 3) on obtient

(6. 4) $$\Omega(\lambda)\Theta(\lambda)=\Theta(\lambda)\Omega(\lambda)=m(\lambda)I,$$

d'où

$$mH^2(E^n)=\Theta\Omega H^2(E^n)\subseteqq\Theta H^2(E^n);$$

ainsi, en vertu de (5. 15), on a $m(\mathbf{T})=\mathbf{O}$, donc aussi $d(\mathbf{T})=k(\mathbf{T})m(\mathbf{T})=\mathbf{O}$.

[15]) *Cf.* [13].

Par conséquent, **T** appartient à la classe C_0. Soit $m_{\mathbf{T}}(\lambda)$ sa fonction minimum; celle-ci doit être un diviseur de $m(\lambda)$ et par conséquent $p(\lambda)=m(\lambda)/m_{\mathbf{T}}(\lambda)$ est aussi une fonction intérieure. Puisque $m_{\mathbf{T}}(\mathbf{T})=\mathbf{O}$, on obtient de (6. 2) que $m_{\mathbf{T}}H^2(E^n)\subseteqq \Theta H^2(E^n)$, d'où, vu aussi (6. 4), il résulte

$$m_{\mathbf{T}}\Omega H^2(E^n)\subseteqq \Omega\Theta H^2(E^n)=mH^2(E^n)$$

et par conséquent

$$\Omega H^2(E^n)\subseteqq pH^2(E^n). \tag{6. 5}$$

Désignons par e_j ($k=1, \dots, n$) le vecteur à n composantes, dont toutes sont égales à 0 sauf la j-ième qui est égale à 1. On peut considérer e_j comme une fonction constante appartenant à $H^2(E^n)$, donc, en vertu de (6. 5), il existe des fonctions $u_j\in H^2(E^n)$ de sorte que $\Omega(\lambda)e_j=p(\lambda)u_j(\lambda)$, donc

$$\Omega_{ij}(\lambda)=p(\lambda)u_{ji}(\lambda) \qquad (i,j=1, \dots, n),$$

Ω_{ij} désignant les éléments de la matrice Ω et $u_{j1}, \dots, u_{jn}$ étant les composantes du vecteur u_j, où $\Omega_{ij}\in H^\infty$ et $u_{ji}\in H^2$. Par suite, si nous désignons par Ω'_{ij}, u'_{ji} les facteurs intérieurs correspondants, nous avons

$$\Omega'_{ij}(\lambda)=p(\lambda)u'_{ji}(\lambda)$$

pour tous les i, j tels que $\Omega_{ij}(\lambda)\not\equiv 0$. Ainsi, p est un diviseur commun intérieur de tous les Ω_{ij}, d'où il résulte que p est une fonction constante, de module 1, ce qui achève la démonstration.

Remarque. Dans le cas $n=1$, $m_{\mathbf{T}}(\lambda)$ coïncide avec $d(\lambda)$, donc avec $\Theta_{\mathbf{T}}(\lambda)$. Comme la fonction caractéristique d'une contraction complètement non-unitaire T, considérée à coïncidence près, détermine T à une équivalence unitaire près, il s'ensuit que *les contractions complètement non-unitaires $T\in C_{00}$, ayant les indices de défaut* 1, *sont déterminées par leurs fonctions minimum à une équivalence unitaire près*.

Or, on a démontré dans la Note VII, § 4. 4, que deux contractions de classe C_0, dont l'une est une transformée quasi affine de l'autre[16]), ont les mêmes fonctions minimum. Donc on a le

Corollaire. *Deux contractions de classe C_{00} et aux indices de défaut* 1, *dont l'une est une transformée quasi affine de l'autre, sont unitairement équivalentes.*

7. Le type spectral de la dilatation unitaire minimum

1. Notre théorie permet de résoudre complètement le problème de déterminer le type spectral de la dilatation unitaire minimum U d'une contraction complètement non-unitaire T quelconque.

---

[16]) Rappelons que si, pour $i=1, 2$, S_i est une transformation linéaire bornée de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}_i$ en soi-même, nous disons que S_2 est une *transformée quasi affine* de S_1 lorsqu'il existe une transformation linéaire bornée X de $\mathfrak{H}_2$ dans $\mathfrak{H}_1$, admettant une inverse (au sens large), à domaine dense dans $\mathfrak{H}_1$, de sorte qu'on ait $S_2=X^{-1}S_1X$.

Rappelons que dans [1], théorème 3, on a démontré que, sauf peut-être le cas où les indices de défaut de T sont finis tous les deux, U est une translation bilatérale dont la multiplicité spectrale est égale à $\mathfrak{d}_{\max}=\max\{\mathfrak{d}_T, \mathfrak{d}_{T^*}\}$: en d'autres termes, U est unitairement équivalente à la multiplication par e^{it} dans une somme orthogonale de $\mathfrak{d}_{\max}$ répliques de l'espace $L^2(0, 2\pi)$ des fonctions à valeurs numériques $x(t)$.

Pour le cas qui reste, on va démontrer la caractérisation suivante où, en parlant d'un espace $L^2(S)$, $S\subseteqq(0, 2\pi)$, on sous-entendra toujours qu'il est formé par rapport à la mesure normée $\frac{dt}{2\pi}$.

Théorème 6. *Soit T une contraction complètement non-unitaire, dont les indices de défaut sont finis: $\mathfrak{d}_T=n$, $\mathfrak{d}_{T^*}=m$. La dilatation unitaire minimum U de T est alors unitairement équivalente à la multiplication par e^{it} dans l'espace*

$$L^2(M_1)\oplus\ldots\oplus L^2(M_m)\oplus L^2(N_1)\oplus\ldots\oplus L^2(N_n) \tag{7.1}$$

où $M_1=\ldots=M_m=(0, 2\pi)$ *et*

$$N_k=\{t:\ t\in(0, 2\pi), r(t)\geqq k\} \qquad (k=1, \ldots, n), \tag{7.2}$$

$r(t)$ désignant le rang de l'opérateur

$$\Delta_T(t) = [I-\Theta_T(e^{it})^*\,\Theta_T(e^{it})]^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Puisque les dilatations unitaires minimum de deux contractions unitairement équivalentes sont aussi unitairement équivalentes, il suffit de considérer notre modèle fonctionnel $\mathbf{T}$ aux indices de défaut donnés n, m. Soit donc $\{E^n, E^m, \Theta(\lambda)\}$[17]) une fonction analytique contractive pure donnée et soit $\mathbf{T}$ la contraction qu'elle engendre au sens du théorème 2. Comme la fonction caractéristique de $\mathbf{T}$ coïncide avec la fonction analytique contractive donnée, $\Delta_{\mathbf{T}}(t)$ est unitairement équivalente à $\Delta(t) = [I-\Theta(e^{it})^*\Theta(e^{it})]^{\frac{1}{2}}$ (par une transformation unitaire constante), donc on a

$$r(t)=\text{rang}\,\Delta_{\mathbf{T}}(t)=\text{rang}\,\Delta(t)\ \text{ pour tout } t.$$

En vertu du théorème 2, la dilatation unitaire minimum $\mathbf{U}$ de $\mathbf{T}$ est égale à la multiplication par e^{it} dans l'espace

$$\mathbf{K} = L^2(E^m)\oplus\overline{\Delta L^2(E^n)}.$$

Or, il est manifeste que $L^2(E^m)$ est la somme orthogonale de m répliques de l'espace $L^2(0, 2\pi)$ des fonctions numériques, et cela de sorte qu'à la multiplication par e^{it} dans $L^2(E^m)$ il correspond la multiplication par e^{it} dans chacun des espaces composants $L^2(0, 2\pi)$.

Passons à étudier la partie de $\mathbf{U}$ dans $\overline{\Delta L^2(E^n)}$.

$\Delta(t)$ étant, pour toute valeur fixée t pour laquelle elle a un sens, une transformation autoadjointe de E^n, bornée par 0 et 1, il existe dans E^n un système ortho-

[17]) Rappelons que nous avons désigné par E^d l'espace euclidien des vecteurs à d composantes complexes.

normal complet $\{\psi_k(t)\}_1^{r}$ de vecteurs propres de $\Delta(t)$, notamment tel que

$$\Delta(t)\psi_k(t)=\delta_k(t)\psi_k(t) \qquad (k=1,\ldots,n),$$

les valeurs propres étant arrangées en ordre non-croissant:

$$1\geqq\delta_1(t)\geqq\delta_2(t)\geqq\ldots\delta_n(t)\geqq 0.$$

Comme $\Delta(t)f$ est, pour tout $f\in E^n$, fonction mesurable de t, les valeurs propres $\delta_k(t)$ seront aussi des fonctions mesurables de t et, puisqu'on a évidemment

$$\{t:\ t\in(0,2\pi),\ r(t)\geqq k\} = \{t:\ t\in(0,2\pi),\ \delta_k(t)>0\},$$

les ensembles N_k définis dans le théorème seront aussi mesurables; de plus, les vecteurs propres $\psi_k(t)$ peuvent aussi être choisis en fonctions mesurables de t. [18])

En posant, pour $v\in L^2(E^n)$,

$$x_k(t)=\big(v(t),\psi_k(t)\big)_{E^n},$$

on aura

$$\Delta(t)v(t) = \Delta(t)\sum_1^n x_k(t)\psi_k(t) = \sum_1^n x_k(t)\delta_k(t)\psi_k(t),$$

d'où
$$\|\Delta(t)v(t)\|^2_{E^n} = \sum_1^n |x_k(t)\delta_k(t)|^2$$

et
$$\|\Delta v\|^2_{L^2(E^n)} = \frac{1}{2\pi}\sum_1^n\int_0^{2\pi}|x_k(t)\delta_k(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\sum_1^n\int_{N_k}|x_k(t)\delta_k(t)|^2\,dt,$$

ce qui montre que, par la correspondance

$$\Delta v\to\{x_1(t)\delta_1(t),\ldots,x_n(t)\delta_n(t)\}, \tag{7.3}$$

$\Delta L^2(E^n)$ est appliqué isométriquement dans l'espace

$$L^2(N_1)\oplus\ldots\oplus L^2(N_n). \tag{7.4}$$

En vertu de la relation évidente

$$\big(e^{it}v(t),\psi_k(t)\big)_{E^n}=e^{it}x_k(t),$$

il correspondra à la multiplication par e^{it} dans $\Delta L^2(E^n)$ la multiplication par e^{it} dans chacun des espaces $L^2(N_k)$.

Choisissons en particulier, pour k fixé, $v(t)=\varepsilon(t)\psi_k(t)$ où $\varepsilon(t)$ est une fonction numérique mesurable bornée, d'ailleurs quelconque; on aura $v\in L^2(E^n)$ et le vecteur qui correspond à Δv par l'application (7.3) aura sa k-ième composante égale à $\varepsilon(t)\delta_k(t)$, et les autres égales à 0. Comme les fonctions de type $\varepsilon(t)\delta_k(t)$ forment

---

[18]) La mesurabilité de la plus grande valeur propre $\delta_1(t)$ en fonction de t est immédiate en vertu de la formule $\delta_1(t)=\sup\big(\Delta(t)f,f\big)$ où f parcourt une suite dense sur la sphere unité de E^n; pour les valeurs propres $\delta_k(t)$ de rang $k>1$ on peut faire usage du théorème „minimax". Le choix mesurable du système orthonormal des vecteurs propres exige plus de travail, on peut faire ici usage des mineurs de la matrice de $\Delta(t)$.

évidemment un ensemble dense dans $L^2(N_k)$, on conclut que la correspondance (7. 3), prolongée par continuité à $\overline{\Delta L^2(E^n)}$, applique cet espace isométriquement *sur* l'espace (7. 4). L'assertion concernant la multiplication par e^{it} reste valable par continuité lors de ce prolongement.

Ainsi, Théorème 6 est démontré.

2. Il est manifeste que $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots \supseteq N_n$. Il peut arriver que le vrai maximum $r_{\max}$ de la fonction $r(t)$ n'atteint pas la valeur n; dans ce cas $L^2(N_k)$ se réduit pour $k > r_{\max}$ à l'espace banal $\{0\}$ et peut être écarté dans (7. 1).

L'asymétrie dans (7. 1) des rôles des deux indices de défaut n'est pas essentielle. En effet, si l'on change T pour T^*, on obtient que U^* est unitairement équivalente à la multiplication par e^{it} dans un espace de type (7. 1), mais avec les rôles de n et m intervertis; il est alors de même pour U (il n'y a qu'à remplacer les ensembles en question par leurs images lors de la transformation $t \to 2\pi - t$).[19])

Donc, Théorème 6 a le

Corollaire. *La dilatation unitaire minimum U d'une contraction complètement non-unitaire T à indices de défaut finis $\mathfrak{d}_T = n$, $\mathfrak{d}_{T^*} = m$, est unitairement équivalente à la multiplication par e^{it} dans un espace*

$$L^2(P_1) \oplus L^2(P_2) \oplus \ldots \oplus L^2(P_{n+m})$$

où $P_1 \supseteq P_2 \supseteq \ldots \supseteq P_{n+m}$ sont des sous-ensembles mesurables de $(0, 2\pi)$, *dont du moins les premiers $\nu = \max\{n, m\}$ sont de mesure complète dans* $(0, 2\pi)$.

3. La question se pose si, inversement, l'opérateur de multiplication par e^{i} dans tout espace de ce type est la dilatation unitaire minimum d'une contraction complètement non-unitaire? La réponse affirmative à cette question est donnée par e suivant

Théorème 7. *Soient n, m deux entiers $\geqq 0$ tels que $\nu = \max\{n, m\} \geqq 1$. Soient de plus*

$$P_1 \supseteq P_2 \supseteq \ldots \supseteq P_{n+m}$$

des sous-ensembles mesurables de $(0, 2\pi)$, *dont du moins les premiers ν sont de mesure complète dans* $(0, 2\pi)$. *Il existe alors une contraction complètement non-unitaire T telle que $\mathfrak{d}_T = n$, $\mathfrak{d}_{T^*} = m$ et dont la dilatation unitaire minimum U est unitairement équivalente à la multiplication par e^{it} dans l'espace*

$$L^2(P_1) \oplus L^2(P_2) \oplus \ldots \oplus L^2(P_{n+m}).$$

[19]) Dans la somme (7. 1), le nombre des termes différents de $\{0\}$ est égal à $m + r_{\max}$. L'asymétrie des rôles de n et m est seulement apparente, ce qui s'ensuit de manière directe de la relation suivante: Si Θ est une contraction de $\mathfrak{N}$ dans $\mathfrak{M}$ (où $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{M}$ sont des espaces de Hilbert de dimension finie), on a

$$\dim \mathfrak{M} + \dim \overline{(I - \Theta^*\Theta)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{N}} = \dim \mathfrak{N} + \dim \overline{(I - \Theta\Theta^*)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{M}}.$$

En effet, le premier membre est égal à $\dim \mathfrak{M} + \dim \mathfrak{N} - \dim \mathfrak{N}_0$ et le second à $\dim \mathfrak{N} + \dim \mathfrak{M} - \dim \mathfrak{M}_0$ où

$$\mathfrak{N}_0 = \{h : h \in \mathfrak{N}, (I - \Theta^*\Theta)h = 0\}, \quad \mathfrak{M}_0 = \{h : h \in \mathfrak{M}, (I - \Theta\Theta^*)h = 0\};$$

or, $\dim \mathfrak{N}_0 = \dim \mathfrak{M}_0$, car Θ applique $\mathfrak{N}_0$ isométriquement sur $\mathfrak{M}_0$.

(Nous admettons aussi que quelques des P_i puissent être de mesure 0; dans ce cas les espaces correspondants $L^2(P_i)=\{0\}$ peuvent être écartés.)

Démonstration. On supposera d'abord que $n \leqq m$.

Le cas où $n=0$ ($\nu=m=n+m$) est simple. En effet, dans ce cas l'opérateur de multiplication par e^{it} en question est une translation bilatérale, de multiplicité égale à ν, qui est la dilatation unitaire minimum d'une translation unilatérale de même multiplicité.

Dans le cas où $1 \leqq n \leqq m$, envisageons la fonction matricielle

$$\Theta(\lambda)=(\Theta_{jk}(\lambda)) \qquad (j=1, \ldots, m;\ k=1, \ldots, n;\ |\lambda|<1)$$

où $\Theta_{jk}(\lambda)=0$ pour $j \neq k$ et

$$\Theta_{kk}(\lambda)=\lambda u_k(\lambda) \qquad (k=1, \ldots, n),$$

$u_k(\lambda)$ étant une fonction, analytique et bornée dans le cercle unité, telle que

$$|u_k(e^{it})|^2 = 1-\tfrac{1}{2}\chi_k(t) \qquad \text{p. p.}$$

où $\chi_k(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble P_{m+k}. L'existence de telle fonction $u_k(\lambda)$ est assurée par le fait que $\log\left[1-\frac{1}{2}\chi_k(t)\right]$ est intégrable (théorème de SZEGŐ; *cf.* [15], p. 53). Comme on a

$$|\Theta_{kk}(\lambda)| \leqq |u_k(\lambda)| \leqq 1 \ \text{ et } \ \Theta_{kk}(0)=0 \qquad (k=1, \ldots, n),$$

$\{E^n, E^m, \Theta(\lambda)\}$ sera une fonction analytique contractive pure.

La matrice $\Delta(t) = [I-\Theta(e^{it})^* \Theta(e^{it})]^{\frac{1}{2}}$ est d'ordre n et de forme diagonale, ses éléments dans la diagonale étant

$$\Delta_{kk}(t) = \left[1-\left(1-\frac{1}{2}\chi_k(t)\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\chi_k(t) \qquad (k=1, \ldots, n).$$

Donc on a

$$\operatorname{rang} \Delta(t) = \sum_{k=1}^{n} \chi_k(t).$$

Comme les ensembles P_{m+k} ($k=1, \ldots, n$) vont en décroissant, l'inégalité rang $\Delta(t) \geqq k$ est donc valable précisément (à un ensemble de mesure 0 près) pour les points t de l'ensemble P_{m+k}.

Soit $\mathbf{T}$ la contraction complètement non-unitaire, engendrée par la fonction analytique contractive pure $\{E^n, E^m, \Theta(\lambda)\}$ au sens du théorème 2. En appliquant le théorème 7 on obtient que la dilatation unitaire minimum de $\mathbf{T}$ est unitairement équivalente à la multiplication par e^{it} dans l'espace

$$\left[\bigoplus_1^m L^2(0, 2\pi)\right] \oplus L^2(P_{m+1}) \oplus \ldots \oplus L^2(P_{m+n}).$$

Vu que, pour $i \leqq m$, P_i est de mesure complète et par conséquent $L^2(P_i)=L^2(0, 2\pi)$, Théorème 7 est prouvé dans le cas $n \leqq m$.

Dans le cas $m<n$ on construit d'abord une contraction complètement non-unitaire S telle que $\mathfrak{d}_S=m$ et $\mathfrak{d}_{S^*}=n$ et dont la dilatation unitaire minimum est unitairement équivalente à la multiplication par e^{it} dans l'espace

$$L^2(P_1') \oplus L^2(P_2') \oplus \ldots \oplus L^2(P_{m+n}')$$

où P_t' désigne l'image de l'ensemble P_t par rapport au point $t=\pi$; telle contraction S existe d'après ce que nous venons de démontrer. $T=S^*$ vérifie alors les assertions du théorème.

Ainsi, Théorème 7 se trouve complètement démontré.

Remarques. Les Théorèmes 6 et 7 (pour le cas des indices de défaut finis) et le Théorème 3 de [1] (pour le cas des indices de défaut dont du moins un est infini) donnent une solution complète du problème du type spectral des dilatations unitaires minimum des contractions complètement non-unitaires. Toutefois il faut remarquer que la contraction T construite au cours de la démonstration du Théorème 7 est, en général, réductible. Il est naturel de se demander si dans Théorème 7 T peut être prise irréductible. Nous n'insistons plus sur ce sujet.

4. Dans [1] on a indiqué un exemple d'une contraction complètement non-unitaire dont la dilatation minimum *n'est pas* une translation bilatérale. Notre Théorème 7 fournit toute une classe de pareils exemples, il n'y a qu'à choisir quelques des ensembles P_j tels que leurs complémentaires dans $(0, 2\pi)$ soient de mesure positive. Voici un autre exemple, basé sur le Théorème 6, mais qui est entièrement élémentaire.

Envisageons une fonction numérique $w(\lambda)$, analytique dans D et telle que $|w(\lambda)|\leqq 1$ dans D et que $|w(0)|<1$. Soit T la contraction complètement non-unitaire engendrée par la fonction analytique contractive pure $\{E^1, E^1, w(\lambda)\}$. Comme T a les indices de défaut 1,1, sa dilatation unitaire minimum sera, en vertu du Théorème 6, unitairement équivalente à la multiplication par e^{it} dans l'espace $L^2(0, 2\pi)\oplus \oplus L^2(N)$ où $N=\{t\colon\ t\in(0, 2\pi), 1-|w(e^{it})|^2>0\}$. Soit en particulier $w(\lambda)$ la fonction qui fournit la représentation conforme de $D=\{\lambda\colon|\lambda|<1\}$ sur le demi-cercle $\{\lambda\colon|\lambda|<1, \operatorname{Im}\lambda>0\}$; on aura alors $0<\text{mes}\, N<2\pi$. La multiplication par e^{it} dans $L^2(0, 2\pi)$ est une translation bilatérale simple, tandis que dans $L^2(N)$ elle ne l'est pas, par conséquent elle ne peut être une translation bilatérale dans $L^2(0, 2\pi)\oplus \oplus L^2(N)$ non plus (*cf.* [1], lemme 2).

Ouvrages cités

[1] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. V. Translations bilatérales, *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 106—129.

[2] ——— Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VI. Calcul fonctionnel, *ibidem*, **23** (1962), 130—167.

[3] ——— Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VII. Triangulations canoniques. Fonction minimum, *ibidem*, **25** (1964), 12—37.

[4] ——— Modèles fonctionnels des contractions de l'espace de Hilbert. La fonction caractéristique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **256** (1963), 3236—3238.

[5] ——— Propriétés des fonctions caractéristiques, modèles triangulaires et une classification des contractions de l'espace de Hilbert, *ibidem*, **256** (1963), 3413—3415.

[6] ——— Une caractérisation des sous-espaces invariants pour une contraction de l'espace de Hilbert, *ibidem*, **258** (1964), 3426—3429.

[6] М. С. Лившиц, Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве, *Матем. Сворник*, **19 (61)** (1946), 239—260.

[7] ——— Изометрические операторы с равными дефектными числами, квазиунитарные операторы, *Матем. Сворник*, **26 (68)** (1950), 247—264.

[8] М. С. Лившиц—В. П. Потапов, Теорема умножения характеристических матриц-функций, *Доклады Акад. Наук СССР*, **72** (1950), 625—628.

[9] Ю. Л. Шмульян, Операторы с вырожденной характеристической функцией, *Доклады Акад. Наук СССР*, **93** (1953), 985—988.
[10] В. Т. Поляцкий, О приведении к треугольному виду квазиунитарных операторов, *Доклады Акад. Наук СССР*, **113** (1957), 756—759.
[11] ——— Приведение к треугольному виду некоторых операторов (autoréférat d'une dissertation, Kiev, 1960).
[12] М. С. Бродский—М. С. Лившиц, Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, *Успехи Матем. Наук*, XIII, **1 (79)** (1958), 3—85.
[13] A. Beurling, On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, *Acta Math.*, **81** (1949), 239—255.
[14] E. Hille—R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups* (Providence, R. I., 1957).
[15] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions* (Englewood Cliffs, N. J., 1962).

(Reçu le 23 avril, sous forme revue le 27 décembre 1963)