

Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IX

Factorisations de la fonction caractéristique. Sous-espaces invariants

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAȘ à Bucarest

Dans cette Note on déterminera la relation qui existe entre les sous-espaces invariants pour une contraction T de l'espace de Hilbert \mathfrak{H} et les factorisations de la fonction caractéristique de T . Grâce à cette relation, le problème de trouver les sous-espaces invariants pour T se ramène au problème de trouver les factorisations d'une fonction analytique contractive, à valeurs opérateurs, en produit de deux fonctions de même type, factorisations qui sont d'ailleurs assujetties encore à une condition additionnelle.

On étudiera en particulier le cas où la fonction caractéristique de T est une fonction „*-extérieure”. Pour telles fonctions, à valeurs opérateurs, on obtient les factorisations qui correspondent aux factorisations de type suivant dans le cas numérique:

$$\begin{aligned} & \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + \lambda}{e^{it} - \lambda} \log |\Theta(e^{it})| dt \right) = \\ & = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha} \frac{e^{it} + \lambda}{e^{it} - \lambda} \log |\Theta(e^{it})| dt \right) \cdot \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha'} \frac{e^{it} + \lambda}{e^{it} - \lambda} \log |\Theta(e^{it})| dt \right) \end{aligned}$$

où α est un sous-ensemble borélien de $[0, 2\pi)$, et $\alpha' = [0, 2\pi) - \alpha$. De plus, on montrera que les fonctions extérieures sont caractérisées, à un facteur isométrique constant près, par la relation

$$-\infty < \log \|\Theta(0)f\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|\Theta(e^{it})f\| dt,$$

valable pour tout vecteur f tel que $\Theta(\lambda)f \neq 0$. Cela constitue une généralisation naturelle de la caractérisation, due à BEURLING, des fonctions extérieures numériques.¹⁾

Ces résultats nous permettent de construire toute une variété de sous-espaces invariants distincts pour une contraction T telle que $T^n f$ et $T^{*n} f$ ne tendent pas

¹⁾ Cf. [6], p. 62.

vers 0 pour $f \neq 0$. D'ailleurs ces sous-espaces invariants sont en relation serrée avec les sous-espaces spectraux de la dilatation unitaire minimum de T .

Il est manifeste que dans ces considérations on peut se borner au cas où la contraction T est complètement non-unitaire.

Des relations entre les sous-espaces invariants des opérateurs et les factorisations des fonctions caractéristiques correspondantes ont été connues depuis les travaux de LIVŠITZ, POTAPOV, ŠMULYAN, BRODSKY et d'autres, sur les fonctions caractéristiques d'opérateurs; cf. la littérature citée dans [3] et [VIII]. Toutefois, des conditions dans lesquelles une factorisation de la fonction caractéristique entraîne l'existence d'un sous-espace invariant non banal ²⁾ pour l'opérateur donné semblent avoir été trouvées seulement dans certains cas particuliers, notamment par ŠMULYAN [4].³⁾

Une partie des résultats de cette Note a été annoncée dans [2].

1. Considérations d'ordre géométrique

1. Soit T une contraction de l'espace de Hilbert \mathfrak{H} ($\neq \{0\}$).⁴⁾ Soit U la dilatation unitaire minimum de T , opérant dans un espace de Hilbert \mathfrak{K} tel que

$$\mathfrak{K} = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} U^n \mathfrak{H} \quad (\text{condition de minimalité}).$$

Posons

$$\mathfrak{K}_+ = \bigvee_{n=0}^{\infty} U^n \mathfrak{H};$$

\mathfrak{K}_+ est invariant pour U , donc

$$U_+ = U|_{\mathfrak{K}_+}$$

est une transformation isométrique de l'espace \mathfrak{K}_+ en soi-même.

On sait que

$$\mathfrak{L} = \overline{(U-T)\mathfrak{H}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{L}_* = \overline{(I-UT^*)\mathfrak{H}}$$

sont des sous-espaces ambulants pour U , contenus dans \mathfrak{K}_+ , et qu'on a

$$(1.1) \quad \mathfrak{K} = \dots \oplus U^{-2}\mathfrak{L}_* \oplus U^{-1}\mathfrak{L}_* \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{L} \oplus U\mathfrak{L} \oplus U^2\mathfrak{L} \oplus \dots$$

(cf. [V], th. 1).

²⁾ C'est-à-dire différent de $\{0\}$ et de l'espace entier.

³⁾ Notons que les cas envisagés dans [4] ne sont pas englobés dans notre théorème général (théorème 1). En effet, cet auteur envisage des opérateurs bornés $A = R+iQ$ avec R, Q autoadjoints dont Q est de rang fini, tandis que notre étude (transposée par une transformation cayleyenne inverse) concerne les opérateurs dissipatifs maximum, en particulier les opérateurs de la forme $A = R+iQ$ où la condition que Q soit de rang fini est remplacée par la condition $Q \geq 0$. Il convient de remarquer ici que la définition de la fonction caractéristique d'une contraction, telle que nous l'utilisons dans nos recherches, apparaît aussi chez ŠMULYAN [5]. Toutefois, dans nos recherches la notion de la fonction caractéristique d'une contraction apparaît d'une façon naturelle comme une conséquence, par des représentations de Fourier, de la théorie des dilatations unitaires. C'est de la même façon naturelle que nous obtenons les relations entre les sous-espaces invariants et les factorisations de la fonction caractéristique.

⁴⁾ Tous les espaces de Hilbert que nous allons considérer seront supposés d'être séparables.

On sait aussi (cf. [VIII], (3. 4) et (3. 22)) que, en définissant le sous-espace \mathfrak{R}_0 de \mathfrak{R} par la formule

$$(1. 2) \quad \mathfrak{R} = M(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R}_0; \text{ } ^5)$$

\mathfrak{R}_0 est compris dans \mathfrak{R}_+ , réduit U_+ (et à fortiori U) à une transformation unitaire, et qu'on a

$$(1. 3) \quad \mathfrak{R}_+ = M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R}_0. \text{ } ^6)$$

De (1. 1) il s'ensuit

$$(1. 4) \quad \mathfrak{R}_+ = \mathfrak{H} \oplus M_+(\mathfrak{L}) \quad (\text{cf. [VIII], (3. 21)}),$$

donc

$$(1. 5) \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{R}_+ \ominus M_+(\mathfrak{L}) = [M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R}_0] \ominus M_+(\mathfrak{L}).$$

Comme $M_+(\mathfrak{L})$ est invariant pour U_+ , son complémentaire dans \mathfrak{R}_+ , c'est-à-dire \mathfrak{H} , est invariant pour U_+^* . Vu que U_+ est une dilatation de T , on a

$$(1. 6) \quad T^* = U_+^* | \mathfrak{H} \quad (\text{cf. [VIII], (3. 28)}).$$

Ces relations sont valables pour une contraction T quelconque. Lorsque T est complètement non-unitaire, on a de plus

$$(1. 7) \quad \mathfrak{R} = \overline{M(\mathfrak{L}) + M(\mathfrak{L}_*)} \quad (\text{cf. [V], p. 121}).$$

2. Après ces préliminaires envisageons le cas où il existe dans \mathfrak{H} un sous-espace \mathfrak{H}_1 , invariant pour T ; $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$ est alors invariant pour T^* et, en vertu de (1. 6), aussi pour U_+^* . Par conséquent, le complémentaire de \mathfrak{H}_2 dans \mathfrak{R}_+ , c'est-à-dire

$$(1. 8) \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_+ \ominus \mathfrak{H}_2,$$

est invariant pour U_+ . Soit

$$(1. 9) \quad \mathfrak{R} = M_+(\mathfrak{F}) \oplus \mathfrak{R}_1$$

la décomposition de Wold correspondant à la transformation isométrique U_+ de \mathfrak{R} ; on a notamment

$$(1. 10) \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{R} \ominus U_+ \mathfrak{R} \quad \text{et} \quad \mathfrak{R}_1 = \bigcap_0^\infty U_+^n \mathfrak{R};$$

\mathfrak{R}_1 réduit U_+ à une transformation unitaire.

Comme $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}_+$ et par conséquent $U_+^n \mathfrak{R} \subseteq U_+^n \mathfrak{R}_+$ ($n \geq 0$), on a, vu (1. 3),

$$(1. 11) \quad \mathfrak{R}_1 = \bigcap_0^\infty U_+^n \mathfrak{R} \subseteq \bigcap_0^\infty U_+^n \mathfrak{R}_+ = \mathfrak{R}_0.$$

⁵⁾ Pour un sous-espace \mathfrak{E} d'un espace de Hilbert, ambulant pour une transformation isométrique V dans \mathfrak{E} , on désignera par $M_+(\mathfrak{E})$ la somme orthogonale des sous-espaces $V^n \mathfrak{E}$ ($n=0, 1, 2, \dots$). Lorsque V est même unitaire, on désignera par $M(\mathfrak{E})$ la somme orthogonale des sous-espaces $V^n \mathfrak{E}$ ($-\infty < n < \infty$).

⁶⁾ C'est la décomposition canonique (due à WOLD) de \mathfrak{R}_+ par rapport à la transformation isométrique U_+ ; décomposition en somme orthogonale de deux sous-espaces, dans l'un desquels U_+ est une translation unilatérale et dans l'autre une transformation unitaire:

$$\mathfrak{L}_* = \mathfrak{R}_+ \ominus U_+ \mathfrak{R}_+ \quad \text{et} \quad \mathfrak{R}_0 = \bigcap_0^\infty U_+^n \mathfrak{R}_+.$$

On peut donc poser

$$(1.12) \quad \mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2;$$

\mathfrak{R}_2 réduit U_+ aussi à une transformation unitaire. De (1.3), (1.8) et (1.9) on obtient

$$\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{R}_+ \ominus \mathfrak{R} = [M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R}_0] \ominus [M_+(\mathfrak{F}) \oplus \mathfrak{R}_1],$$

d'où

$$(1.13) \quad \mathfrak{H}_2 = [M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R}_2] \ominus M_+(\mathfrak{F}).$$

Cette représentation de \mathfrak{H}_2 , ensemble avec la représentation (1.5) de \mathfrak{H} , entraînent:

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_2 = \{[M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R}_0] \ominus M_+(\mathfrak{L})\} \ominus \{[M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R}_2] \ominus M_+(\mathfrak{F})\},$$

d'où

$$(1.14) \quad \mathfrak{H}_1 = [M_+(\mathfrak{F}) \oplus \mathfrak{R}_1] \ominus M_+(\mathfrak{L}) = \mathfrak{R} \ominus M_+(\mathfrak{L}).$$

Les formules (1.13) et (1.14) mettent en évidence que

$$M_+(\mathfrak{F}) \subseteq M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R}_2 \quad \text{et} \quad M_+(\mathfrak{L}) \subseteq M_+(\mathfrak{F}) \oplus \mathfrak{R}_1,$$

d'où

$$U^{-n}M_+(\mathfrak{F}) \subseteq U^{-n}M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R}_2, \quad U^{-n}M_+(\mathfrak{L}) \subseteq U^{-n}M_+(\mathfrak{F}) \oplus \mathfrak{R}_1 \quad (n=1, 2, \dots);$$

en prenant les sommes par rapport à n il résulte

$$(1.15) \quad M(\mathfrak{F}) \subseteq M(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R}_2, \quad M(\mathfrak{L}) \subseteq M(\mathfrak{F}) \oplus \mathfrak{R}_1.$$

De la dernière relation il s'ensuit, vu aussi que $\mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{R}_0 \perp M(\mathfrak{L}_*)$,

$$M(\mathfrak{L}) + M(\mathfrak{L}_*) \subseteq \overline{M(\mathfrak{F}) + M(\mathfrak{L}_*)} \oplus \mathfrak{R}_1;$$

en vertu de (1.7) cela entraîne

$$\mathfrak{R} = \overline{M(\mathfrak{F}) + M(\mathfrak{L}_*)} \oplus \mathfrak{R}_1,$$

donc, vu (1.2) et (1.12),

$$(1.16) \quad \mathfrak{R}_2 = \overline{M(\mathfrak{F}) + M(\mathfrak{L}_*)} \ominus M(\mathfrak{L}_*).$$

Lorsque, en particulier, $\mathfrak{F} = \mathfrak{L}$, (1.7) et (1.16) entraînent $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}_2$, donc $\mathfrak{R}_1 = \{0\}$; vu (1.14) il en résulte que $\mathfrak{H}_1 = \{0\}$. D'autre part, lorsque $\mathfrak{F} = \mathfrak{L}_*$, on a $\mathfrak{R}_2 = \{0\}$ en vertu de (1.16); vu (1.13) il en résulte que $\mathfrak{H}_2 = \{0\}$.

Ainsi, si l'espace invariant \mathfrak{H}_1 est *non banal*, ce qu'on supposera dans la suite, on a nécessairement

$$(1.17) \quad \mathfrak{F} \neq \mathfrak{L} \quad \text{et} \quad \mathfrak{F} \neq \mathfrak{L}_*.$$

Il convient de remarquer ici qu'on a aussi $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{L}_*$, voire même

$$(1.18) \quad \mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}_* = \{0\}.$$

En effet, pour $f \in \mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}_*$ on a $U^n f \perp \mathfrak{H}$ ($n=0, \pm 1, \dots$), conséquence de (1.1). Ainsi, $f \perp U^{-n} \mathfrak{H}$ ($n=0, \pm 1, \dots$) ce qui entraîne $f=0$ en vertu de la condition de minimalité pour \mathfrak{R} .

Revenons à la définition de \mathfrak{F} par (1. 10). Comme $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{R}_+$ et $\mathfrak{N} \supseteq M_+(\mathfrak{L})$ (cf. (1. 14)), on a, eu égard aussi à (1. 4),

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N} \ominus U_+ \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{R}_+ \ominus U_+ M_+(\mathfrak{L}) = [\mathfrak{H} \oplus M_+(\mathfrak{L})] \ominus U_+ M_+(\mathfrak{L}),$$

donc

$$(1. 19) \quad \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{L}.$$

3. Désignons par $P^{\mathfrak{L}_*}, P^{\mathfrak{F}}$ les projections (dans \mathfrak{R}) sur $M(\mathfrak{L}_*)$ et $M(\mathfrak{F})$, selon les cas, et par $P_{\mathfrak{R}_i}$ ($i=0, 1, 2$) la projection sur \mathfrak{R}_i . Comme tous les sous-espaces en question réduisent U , les projections correspondantes permutent à U .

Par la définition (1. 2) de \mathfrak{R}_0 , on a

$$(1. 20a) \quad P_{\mathfrak{R}_0} = I - P^{\mathfrak{L}_*},$$

d'où, par (1. 7),

$$(1. 20b) \quad \mathfrak{R}_0 = \overline{(I - P^{\mathfrak{L}_*})M(\mathfrak{L})}.$$

Montrons qu'on a aussi

$$(1. 21a) \quad P_{\mathfrak{R}_1} f = (I - P^{\mathfrak{F}})f \quad \text{pour } f \in M(\mathfrak{L}),$$

$$(1. 21b) \quad \mathfrak{R}_1 = \overline{(I - P^{\mathfrak{F}})M(\mathfrak{L})},$$

$$(1. 22a) \quad P_{\mathfrak{R}_2} f = (I - P^{\mathfrak{L}_*})f \quad \text{pour } f \in M(\mathfrak{F}),$$

$$(1. 22b) \quad \mathfrak{R}_2 = \overline{(I - P^{\mathfrak{L}_*})M(\mathfrak{F})}.$$

En effet, (1. 21a) et (1. 22a) découlent immédiatement de (1. 15), et (1. 22b) découle de (1. 16). Reste à prouver (1. 21b). En vertu de (1. 15) tout $f \in M(\mathfrak{F})$ et tout $l \in M(\mathfrak{L})$ peuvent être décomposés de la façon suivante:

$$(1. 23) \quad f = P^{\mathfrak{L}_*} f + P_{\mathfrak{R}_2} f, \quad l = P^{\mathfrak{F}} l + P_{\mathfrak{R}_1} l.$$

Choisissons en particulier $f = P^{\mathfrak{F}} l$. Les deux relations (1. 23) fournissent alors

$$(1. 24) \quad l = P^{\mathfrak{L}_*} P^{\mathfrak{F}} l + P_{\mathfrak{R}_1} l + P_{\mathfrak{R}_2} P^{\mathfrak{F}} l \quad (l \in M(\mathfrak{L})).$$

Le premier terme au second membre étant un élément de $M(\mathfrak{L}_*)$, et la somme des deux autres termes un élément de $\mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_0$, il s'ensuit ⁷⁾

$$(1. 25) \quad \left. \begin{aligned} P^{\mathfrak{L}_*} l &= P^{\mathfrak{L}_*} P^{\mathfrak{F}} l \\ (1. 26) \quad P_{\mathfrak{R}_0} l &= P_{\mathfrak{R}_1} l + P_{\mathfrak{R}_2} P^{\mathfrak{F}} l \end{aligned} \right\} \quad \text{pour } l \in M(\mathfrak{L}).$$

Puisque $\overline{P_{\mathfrak{R}_0} M(\mathfrak{L})} = \mathfrak{R}_0$ (conséquence de (1. 20)) et que $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2$, (1. 26) entraîne

$$(1. 27) \quad \overline{P_{\mathfrak{R}_1} M(\mathfrak{L})} = \mathfrak{R}_1 \quad \text{et} \quad \overline{P_{\mathfrak{R}_2} P^{\mathfrak{F}} M(\mathfrak{L})} = \mathfrak{R}_2;$$

la première de ces relations et (1. 21a) fournissent (1. 21b).

Ainsi, toutes les relations (1. 20)–(1. 22) ont été prouvées.

⁷⁾ Notons aussi que $M(\mathfrak{L}_*) \perp \mathfrak{R}_0$.

(1. 1) met en évidence que $U^n \mathfrak{L} \perp U^{-m} \mathfrak{L}_*$ pour $n \geq 0, m \geq 1$, d'où

$$(1.28) \quad P^{\mathfrak{L}_*} M_+(\mathfrak{L}) \subseteq M_+(\mathfrak{L}_*) \quad (\text{cf. [VIII], n}^\circ 3).$$

Vu (1. 19), (1. 1) met en évidence aussi que \mathfrak{F} est orthogonal à $U^v \mathfrak{L}$ et à $U^{-v} \mathfrak{L}_*$ pour $v = 1, 2, \dots$, et par conséquent

$$U^n \mathfrak{L} \perp U^{-m} \mathfrak{F} \quad \text{et} \quad U^n \mathfrak{F} \perp U^{-m} \mathfrak{L}_* \quad \text{pour} \quad n \geq 0, m \geq 1.$$

Cela entraîne

$$(1.29) \quad P^{\mathfrak{F}} M_+(\mathfrak{L}) \subseteq M_+(\mathfrak{F}) \quad \text{et} \quad P^{\mathfrak{L}_*} M_+(\mathfrak{F}) \subseteq M_+(\mathfrak{L}_*).$$

2. Un lemme sur les représentations de Fourier

Commençons par introduire une notation. Si U est une transformation unitaire dans un espace de Hilbert (séparable) \mathfrak{H} et \mathfrak{A} est un sous-espace de \mathfrak{H} , ambulant pour U , convenons de désigner par $\Phi^{\mathfrak{A}}$ l'application de $M(\mathfrak{A})$ sur $L^2(\mathfrak{A})$, ⁸⁾ définie par

$$\Phi^{\mathfrak{A}} \sum_{-\infty}^{\infty} U^n a_n = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{int} a_n \quad (a_n \in \mathfrak{A}, \sum \|a_n\|^2 < \infty).$$

Cette application, appelée *représentation de Fourier de $M(\mathfrak{A})$* , est unitaire et on a

$$(2. 1) \quad \Phi^{\mathfrak{A}} U h = e^{it} \Phi^{\mathfrak{A}} h \quad \text{pour} \quad h \in M(\mathfrak{A}).$$

La restriction de $\Phi^{\mathfrak{A}}$ à $M_+(\mathfrak{A})$, désignée par $\Phi_+^{\mathfrak{A}}$, applique $M_+(\mathfrak{A})$ unitairement sur le sous-espace $H^2(\mathfrak{A})$ de $L^2(\mathfrak{A})$, constitué des fonctions de type $u(e^{it}) = \sum_0^{\infty} e^{int} a_n$; telle fonction peut être considérée aussi comme limite radiale forte p. p. de la fonction analytique $u(\lambda) = \sum_0^{\infty} \lambda^n a_n$ ($|\lambda| < 1$); cf. [VIII], n° 1.

Nous allons démontrer le suivant

Lemme. Soient U et U' deux transformations unitaires, dans les espaces de Hilbert \mathfrak{H} et \mathfrak{H}' , selon les cas, et soient \mathfrak{A} et \mathfrak{A}' des sous-espaces ambulants pour U et U' ($\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}, \mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{H}'$). Soit Q une contraction de l'espace \mathfrak{H} dans l'espace \mathfrak{H}' , telle que

$$(2. 2) \quad Q U k = U' Q k \quad (k \in \mathfrak{A})$$

et

$$(2. 3) \quad Q M_+(\mathfrak{A}) \subseteq M_+(\mathfrak{A}'). \quad 9)$$

Il existe alors une fonction analytique contractive $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \Theta(\lambda)\}$, ¹⁰⁾ telle que pour tout $h \in M(\mathfrak{A})$ on ait

$$(2. 4) \quad \Phi^{\mathfrak{A}'}(Qh) = \Theta(e^{it}) h(t) \quad 11) \quad \text{où} \quad h(t) = \Phi^{\mathfrak{A}} h.$$

⁸⁾ L'espace L^2 des fonctions définies sur $(0, 2\pi)$, à valeurs vecteurs dans \mathfrak{A} , l'intégration étant prise par rapport à la mesure normée $dt/2\pi$.

⁹⁾ (2. 2) et (2. 3) entraînent évidemment $Q M(\mathfrak{A}) \subseteq M(\mathfrak{A}')$.

¹⁰⁾ Cf. [VIII], n° 1.

¹¹⁾ $\Theta(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1} \Theta(re^{it})$ p. p., cf. [VIII], n° 1.

Pour que cette fonction analytique contractive soit

- a) pure, c'est-à-dire que $\|\Theta(0)a\| < \|a\|$ pour tout $a \in \mathfrak{A}$, $a \neq 0$;
- b) une constante unitaire;
- c) intérieure, c'est-à-dire que $\Theta(e^{it})$ est p. p. une transformation isométrique de \mathfrak{A} dans \mathfrak{A}' ,
- d) extérieure, c'est-à-dire que $\overline{\Theta H^2(\mathfrak{A})} = H^2(\mathfrak{A}')$ [ou strictement extérieure, c'est-à-dire que $\Theta H^2(\mathfrak{A}) = H^2(\mathfrak{A}')$],

il faut et il suffit qu'on ait, selon les cas,

- a) $\|Qa\| < \|a\|$ pour tout $a \in \mathfrak{A}$, $a \neq 0$, tel que $Qa \in \mathfrak{A}'$;
- b) $Q\mathfrak{A}$ applique \mathfrak{A} unitairement sur \mathfrak{A}' ;
- c) $Q|M_+(\mathfrak{A})$ applique $M_+(\mathfrak{A})$ isométriquement dans $M_+(\mathfrak{A}')$;
- d) $QM_+(\mathfrak{A}) = M_+(\mathfrak{A}')$ [ou $QM_+(\mathfrak{A}) = M_+(\mathfrak{A}')$].

Démonstration. En vertu de (2.3) on a en particulier pour $a \in \mathfrak{A}$:

$$Qa = \sum_0^\infty U^n a'_n \quad \text{avec} \quad a'_n \in \mathfrak{A}', \quad \sum \|a'_n\|^2 = \|Qa\|^2 \leq \|a\|^2.$$

En posant $a'_n = \Theta_n a$ on aura défini une suite de transformations linéaires bornées Θ_n ($n=0, 1, 2, \dots$), notamment des contractions de \mathfrak{A} dans \mathfrak{A}' .

Ainsi, on aura

$$\Phi^{\mathfrak{A}'} Qa = v_a(t) \quad \text{où} \quad v_a(t) = \sum_0^\infty e^{int} (\Theta_n a).^{12)}$$

Grâce à (2.2) cela entraîne, vu aussi (2.1),

$$\Phi^{\mathfrak{A}'} Q\varphi(U)a = \Phi^{\mathfrak{A}'} \varphi(U')Qa = \varphi(e^{it}) \Phi^{\mathfrak{A}'} Qa = \varphi(e^{it})v_a(t)$$

pour tout polynome trigonométrique $\varphi(e^{it})$ à coefficients numériques, d'où

$$\|\varphi(U)a\|_{\mathfrak{A}}^2 \cong \|Q\varphi(U)a\|_{\mathfrak{A}'}^2 = \|\Phi^{\mathfrak{A}'} Q\varphi(U)a\|_{L^2(\mathfrak{A}')}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})|^2 \|v_a(t)\|_{\mathfrak{A}'}^2 dt.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|\varphi(U)a\|_{\mathfrak{A}}^2 &= \|\Phi^{\mathfrak{A}'} \varphi(U)a\|_{L^2(\mathfrak{A})}^2 \stackrel{13)}{=} \|\varphi(e^{it}) \Phi^{\mathfrak{A}'} a\|_{L^2(\mathfrak{A})}^2 = \|\varphi(e^{it})a\|_{L^2(\mathfrak{A})}^2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})|^2 dt \cdot \|a\|_{\mathfrak{A}}^2. \end{aligned}$$

En comparant ces deux résultats, on obtient

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})|^2 \|v_a(t)\|_{\mathfrak{A}'}^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})|^2 dt \cdot \|a\|_{\mathfrak{A}}^2.$$

¹²⁾ Convergence dans $L^2(\mathfrak{A}')$.

¹³⁾ On fait ici usage de (2.1).

Cette inégalité s'étend, par le théorème d'approximation de Weierstrass, à toutes les fonctions continues $\varrho(t) \geq 0$, de période 2π , c'est-à-dire qu'on aura aussi

$$\int_0^{2\pi} \varrho(t) \|v_a(t)\|_{\mathfrak{X}'}^2 dt \leq \int_0^{2\pi} \varrho(t) dt \cdot \|a\|_{\mathfrak{X}}^2.$$

Faisant ensuite usage du théorème de Lebesgue sur l'intégration terme-à-terme des suites, on étend cette inégalité à toutes les fonctions $\varrho(t) \geq 0$, mesurables et bornées dans $(0, 2\pi)$. En choisissant pour $\varrho(t)$ en particulier la fonction caractéristique, divisée par δ , d'un intervalle $(\tau, \tau + \delta)$, et en faisant δ tendre vers 0, on obtient que

$$(2.5) \quad \|v_a(t)\|_{\mathfrak{X}'} \leq \|a\|_{\mathfrak{X}} \quad \text{p. p.}$$

Posons

$$(2.6) \quad u_a(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, t - \tau) v_a(\tau) d\tau \quad (\lambda = re^{it}, 0 \leq r < 1)$$

où $P(r, t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}$ est le noyau de Poisson. En vertu des propriétés bien connues de ce noyau, (2.5) entraîne

$$(2.7) \quad \|u_a(\lambda)\|_{\mathfrak{X}'} \leq \|a\|_{\mathfrak{X}} \quad (|\lambda| < 1)$$

et

$$\lim_{r \rightarrow 1} u_a(re^{it}) = v_a(t) \quad \text{p. p.}$$

(notamment en tout point t où $v_a(t)$ est égale à la dérivée de son intégrale indéfinie).

Comme $v_a(t)$ est la limite forte dans $L^2(\mathfrak{X}')$ de la série $\sum_0^\infty e^{int}(\Theta_n a)$, (2.6) entraîne aussi que pour tout λ fixé ($|\lambda| < 1$)

$$u_a(\lambda) = \sum_0^\infty r^n e^{int} \Theta_n a \quad (\text{convergence forte dans } \mathfrak{X}').$$

Ainsi, la série

$$\Theta(\lambda) = \sum_0^\infty \lambda^n \Theta_n \quad (|\lambda| < 1)$$

converge au sens de la convergence forte des opérateurs et on a $\Theta(\lambda)a = u_a(\lambda)$. Donc, en vertu de (2.7), on a $\|\Theta(\lambda)a\| \leq \|a\|$. Ainsi, $\{\mathfrak{X}, \mathfrak{X}', \Theta(\lambda)\}$ est une fonction analytique contractive. La limite radiale $\Theta(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1} \Theta(re^{it})$ existe au sens de la convergence forte des opérateurs, p. p. (cf. [VIII], n° 1), et on a

$$\Theta(e^{it})a = \lim_{r \rightarrow 1} \Theta(re^{it})a = \lim_{r \rightarrow 1} u_a(re^{it}) = v_a(t) \quad \text{p. p.,}$$

donc

$$(2.8) \quad \Phi^{\mathfrak{X}'} Qa = \Theta(e^{it})a \quad (a \in \mathfrak{X}).$$

De (2. 2) et (2. 8) il s'ensuit

$$\begin{aligned} \Phi^{\mathfrak{N}'} Q \sum_k U^k a_k &= \sum_k \Phi^{\mathfrak{N}'} U'^k Q a_k = \sum_k e^{ikt} \Phi^{\mathfrak{N}'} Q a_k \quad (\text{cf. (2. 1)}) \\ &= \sum_k e^{ikt} \Theta(e^{it}) a_k = \Theta(e^{it}) \sum_k e^{ikt} a_k = \Theta(e^{it}) \Phi^{\mathfrak{N}} \sum_k U^k a_k, \end{aligned}$$

donc

$$\Phi^{\mathfrak{N}'} Q f = \Theta(e^{it}) \Phi^{\mathfrak{N}} f$$

et cela d'abord pour les sommes finies $f = \sum U^k a_k$ ($a_k \in \mathfrak{A}$), puis, par continuité, pour tout $f \in M(\mathfrak{A})$. Il n'y a qu'à observer, à cet effet, que $v \rightarrow \Theta v$ est une transformation linéaire continue de $L^2(\mathfrak{A})$ dans $L^2(\mathfrak{A}')$, notamment une contraction, conséquence de ce que $\Theta(e^{it})$ est une contraction de \mathfrak{A} dans \mathfrak{A}' pour presque tous les t .
 Passons aux assertions a)–d).

Ad a). C'est une conséquence immédiate des relations

$$Qa = \sum_0^\infty U'^k \Theta_k a, \quad \|Qa\|^2 = \sum_0^\infty \|\Theta_k a\|^2 \quad (a \in \mathfrak{A}),$$

grâce auxquelles $\|\Theta_0 a\| = \|a\|$ entraîne $Qa = \Theta_0 a$ et $\Theta_n a = 0$ ($n \geq 1$).

Ad b). Tenant compte de la remarque précédente on déduit que si Θ_0 applique \mathfrak{A} unitairement sur \mathfrak{A}' , il en est de même de $Q|\mathfrak{A}$ et on a $\Theta(\lambda) = \Theta_0$. Inversement, si $Q|\mathfrak{A}$ est unitaire, de \mathfrak{A} sur \mathfrak{A}' , on a $Qa \in \mathfrak{A}'$, donc $Qa = \Theta_0 a$ ($a \in \mathfrak{A}$) et par conséquent Θ_0 est unitaire aussi.

Ad c). Si $\Theta(e^{it})$ est isométrique p. p., (2. 3) entraîne

$$\|Qh\|_{\mathfrak{A}'} = \|\Phi^{\mathfrak{N}'} Qh\|_{L^2(\mathfrak{A}')} = \|\Theta(e^{it})h(t)\|_{L^2(\mathfrak{A}')} = \|h(t)\|_{L^2(\mathfrak{A})} = \|h\|_{\mathfrak{A}}$$

pour $h \in M(\mathfrak{A})$, donc Q applique $M(\mathfrak{A})$ isométriquement dans $M(\mathfrak{A}')$. Inversement, si Q jouit de cette propriété, on a nécessairement $\|\Theta(e^{it})h(t)\|_{L^2(\mathfrak{A}')} = \|h(t)\|_{L^2(\mathfrak{A})}$ pour tout $v \in L^2(\mathfrak{A})$; en posant $h(t) = \varphi(t)a$ où $a \in \mathfrak{A}$ et $\varphi(t)$ est une fonction à valeurs numériques, de carré intégrable, d'ailleurs quelconque, il résulte que $\|\Theta(e^{it})a\|_{\mathfrak{A}'} = \|a\|_{\mathfrak{A}}$ p. p.; comme \mathfrak{A} est séparable cela entraîne que $\Theta(e^{it})$ est isométrique p. p.

Ad d). C'est une conséquence immédiate de ce que

$$H^2(\mathfrak{A}') = \Phi^{\mathfrak{N}'} M_+(\mathfrak{A}') \quad \text{et} \quad \Theta H^2(\mathfrak{A}) = \Phi^{\mathfrak{N}'} Q M_+(\mathfrak{A}); \quad \text{cf. (2. 3).}$$

Cela achève la démonstration du lemme.

3. Factorisations de la fonction caractéristique qui correspondent à des sous-espaces invariants

1. Revenons au problème traité dans le n° 1 et appliquons le lemme au cas où \mathfrak{R} et \mathfrak{R}' sont égaux à l'espace \mathfrak{R} de la dilatation unitaire minimum $U (= U')$ de T , les sous-espaces ambulants \mathfrak{A} , \mathfrak{A}' et la contraction Q étant choisies des trois façons différentes suivantes:

- (i) $\mathfrak{A} = \mathfrak{L}$, $\mathfrak{A}' = \mathfrak{L}_*$, $Q = P^{\mathfrak{L}_*}$;
- (ii) $\mathfrak{A} = \mathfrak{L}$, $\mathfrak{A}' = \mathfrak{F}$, $Q = P^{\mathfrak{F}}$;
- (iii) $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{A}' = \mathfrak{L}_*$, $Q = P^{\mathfrak{L}_*}$.

Q permute à U dans tous les trois cas, parce que $M(\mathfrak{L}_*)$ et $M(\mathfrak{F})$ réduisent U . Donc condition (2. 2) est vérifiée. En vertu de (1. 28) et (1. 29), condition (2. 3) est aussi vérifiée.

Soient

$$(3. 1) \quad \{\mathfrak{L}, \mathfrak{L}_*, \Theta(\lambda)\}, \quad \{\mathfrak{L}, \mathfrak{F}, \Theta_1(\lambda)\}, \quad \{\mathfrak{F}, \mathfrak{L}_*, \Theta_2(\lambda)\}$$

les fonctions analytiques contractives correspondantes, au sens du lemme.

La première de ces fonctions coïncide avec la fonction caractéristique $\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_T(\lambda)\}$ de T , telle qu'elle a été définie dans [VIII]. Notamment, on a

$$\psi \Theta(\lambda) \varphi^{-1} = \Theta_T(\lambda) = [-T + \lambda D_{T^*} (I - \lambda T^*)^{-1} D_T] | \mathfrak{D}_T$$

où φ et ψ sont les applications unitaires de \mathfrak{L} sur \mathfrak{D}_T et de \mathfrak{L}_* sur \mathfrak{D}_{T^*} , suivant les cas, envisagées dans [VIII], n° 3. Là, nous avons démontré par un calcul direct que $\Theta_T(\lambda)$ est une fonction contractive *pure*; donc il en est de même de $\Theta(\lambda)$. La même chose s'ensuit aussi de notre lemme, assertion a), puisque les conditions

$$P^* l \in \mathfrak{L}_*, \quad \|P^* l\| = \|l\| \quad \text{pour un } l \in \mathfrak{L}$$

entraînent $l = P^* l \in \mathfrak{L}_*$, donc $l \in \mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}_*$, et en vertu de (1. 18) $l = 0$.

Les deux autres des fonctions (3. 1) ne sont pas en général contractives *pures*, mais en tout cas elles *ne sont pas des constantes unitaires*. Grâce à l'assertion b) du lemme, il suffit de montrer à cet effet que $P^{\mathfrak{F}} | \mathfrak{L}$ n'est pas une application unitaire de \mathfrak{L} sur \mathfrak{F} et $P^{\mathfrak{L}_*} | \mathfrak{F}$ n'est pas une application unitaire de \mathfrak{F} sur \mathfrak{L}_* . Or, ces sont des conséquences évidentes de (1. 17).

La relation (2. 4) prend les formes, suivant les cas,

$$(3. 2) \quad \begin{cases} \Phi^{\mathfrak{L}_*} P^{\mathfrak{L}_*} l = \Theta(e^{it}) \Phi^{\mathfrak{L}} l & \text{pour } l \in M(\mathfrak{L}), \\ \Phi^{\mathfrak{F}} P^{\mathfrak{F}} l = \Theta_1(e^{it}) \Phi^{\mathfrak{L}} l & \text{pour } l \in M(\mathfrak{L}), \\ \Phi^{\mathfrak{L}_*} P^{\mathfrak{L}_*} f = \Theta_2(e^{it}) \Phi^{\mathfrak{F}} f & \text{pour } f \in M(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Appliquons $\Phi^{\mathfrak{L}_*}$ aux deux membres de la relation (1. 25). Grâce à (3. 2) nous obtenons que

$$\Theta(e^{it}) l(t) = \Theta_2(e^{it}) \Theta_1(e^{it}) l(t) \quad \text{pour tout } l \in L^2(\mathfrak{L}), \text{ p. p.,}$$

en particulier pour toute fonction constante $l(t) = l \in \mathfrak{L}$; vu que \mathfrak{L} est séparable on en déduit $\Theta(e^{it}) = \Theta_2(e^{it}) \Theta_1(e^{it})$ p. p. Cela entraîne

$$(3. 3) \quad \Theta(\lambda) = \Theta_2(\lambda) \Theta_1(\lambda) \quad (|\lambda| < 1)^{14)}$$

Pour $l \in M(\mathfrak{L})$ on a, grâce à (1. 20a) et (3. 2),

$$(3. 4) \quad \begin{aligned} \|P_{\mathfrak{D}_0} l\|^2 &= \|(I - P^{\mathfrak{L}_*}) l\|^2 = \|l\|^2 - \|P^{\mathfrak{L}_*} l\|^2 = \\ &= \|\Phi^{\mathfrak{L}} l\|^2 - \|\Phi^{\mathfrak{L}_*} P^{\mathfrak{L}_*} l\|^2 = \|\Phi^{\mathfrak{L}} l\|^2 - \|\Theta \Phi^{\mathfrak{L}} l\|^2 = \|\Delta \Phi^{\mathfrak{L}} l\|^2, \end{aligned}$$

¹⁴⁾ En effet, $R(\lambda) = \Theta(\lambda) - \Theta_2(\lambda) \Theta_1(\lambda)$ est analytique est borné dans le disque $|\lambda| < 1$ et on a $R(e^{it}) = 0$ p. p. Cela entraîne $R(\lambda) = 0$ pour tout λ , $|\lambda| < 1$, ce qu'on voit en envisageant les fonctions analytiques bornées, à valeurs scalaires $(R(\lambda)l, l')$ ($l \in \mathfrak{L}, l' \in \mathfrak{L}_*$).

Δ désignant l'opérateur dans $L^2(\mathfrak{Q})$ qui attache à la fonction $v(t)$ la fonction $\Delta(t)v(t) \in L^2(\mathfrak{Q})$ où

$$(3.5) \quad \Delta(t) = [I_{\mathfrak{Q}} - \Theta(e^{it})^* \Theta(e^{it})]^{1/2};$$

évidemment, $\Delta(t)$ est un opérateur autoadjoint dans \mathfrak{Q} , borné par 0 et 1, pour toute valeur de t pour laquelle il a un sens, donc p. p., et Δ est un opérateur autoadjoint dans $L^2(\mathfrak{Q})$, borné par 0 et 1. En vertu de (3.4),

$$(3.6) \quad \Phi_{\mathfrak{R}_0} P_{\mathfrak{R}_0} l = \Delta \Phi^{\mathfrak{Q}} l \quad (l \in M(\mathfrak{Q}))$$

définit une application isométrique $\Phi_{\mathfrak{R}_0}$ de $P_{\mathfrak{R}_0} M(\mathfrak{Q})$ sur $\Delta L^2(\mathfrak{Q})$, qui s'étend par continuité à une application unitaire

$$\Phi_{\mathfrak{R}_0}: \text{ de } \overline{P_{\mathfrak{R}_0} M(\mathfrak{Q})} = \mathfrak{R}_0 \text{ sur } \overline{\Delta L^2(\mathfrak{Q})} \quad (\text{cf. (1.20)}).$$

En partant des relations (1.21) et (1.22) au lieu de (1.20) on obtient de manière analogue des applications unitaires

$$\Phi_{\mathfrak{R}_1}: \text{ de } \mathfrak{R}_1 \text{ sur } \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{Q})}, \quad \Phi_{\mathfrak{R}_2}: \text{ de } \mathfrak{R}_2 \text{ sur } \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})},$$

telles que

$$(3.7) \quad \Phi_{\mathfrak{R}_1} P_{\mathfrak{R}_1} l = \Delta_1 \Phi^{\mathfrak{Q}} l \quad (l \in M(\mathfrak{Q})), \quad \Phi_{\mathfrak{R}_2} P_{\mathfrak{R}_2} f = \Delta_2 \Phi^{\mathfrak{F}} f \quad (f \in M(\mathfrak{F})).$$

Ici, Δ_1 et Δ_2 sont définis à l'analogie de Δ , notamment comme les opérateurs dans $L^2(\mathfrak{Q})$ et $L^2(\mathfrak{F})$, suivant les cas, engendrés par les opérateurs

$$\Delta_1(t) = [I_{\mathfrak{Q}} - \Theta_1(e^{it})^* \Theta_1(e^{it})]^{1/2}, \quad \Delta_2(t) = [I_{\mathfrak{F}} - \Theta_2(e^{it})^* \Theta_2(e^{it})]^{1/2},$$

dans \mathfrak{Q} et dans \mathfrak{F} .

Des relations (3.6), (3.7) et (2.1) il s'ensuit aisément que

$$(3.8) \quad \Phi_{\mathfrak{R}_i} U h = e^{it} \Phi_{\mathfrak{R}_i} h \quad \text{pour } h \in \mathfrak{R}_i \quad (i=0, 1, 2).$$

Comme $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}_2 \oplus \mathfrak{R}_1$, $\Phi_{\mathfrak{R}_2} \oplus \Phi_{\mathfrak{R}_1}$ sera une application unitaire de \mathfrak{R}_0 sur $\overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{Q})}$, et par conséquent

$$(3.9) \quad Z = (\Phi_{\mathfrak{R}_2} \oplus \Phi_{\mathfrak{R}_1}) \Phi_{\mathfrak{R}_0}^{-1}$$

sera une application unitaire de $\overline{\Delta L^2(\mathfrak{Q})}$ sur $\overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{Q})}$. Pour un élément de $\overline{\Delta L^2(\mathfrak{Q})}$ de la forme Δv où $v = \Phi^{\mathfrak{Q}} l$ ($l \in M(\mathfrak{Q})$) nous avons, en vertu de (3.6), (1.26), (3.7) et (3.2),

$$\begin{aligned} Z \Delta \Phi^{\mathfrak{Q}} l &= Z \Phi_{\mathfrak{R}_0} P_{\mathfrak{R}_0} l = (\Phi_{\mathfrak{R}_2} \oplus \Phi_{\mathfrak{R}_1}) P_{\mathfrak{R}_0} l = (\Phi_{\mathfrak{R}_2} \oplus \Phi_{\mathfrak{R}_1}) (P_{\mathfrak{R}_2} P^{\mathfrak{F}} l + P_{\mathfrak{R}_1} l) = \\ &= \Phi_{\mathfrak{R}_2} P_{\mathfrak{R}_2} P^{\mathfrak{F}} l \oplus \Phi_{\mathfrak{R}_1} P_{\mathfrak{R}_1} l = \Delta_2 \Phi^{\mathfrak{F}} P^{\mathfrak{F}} l \oplus \Delta_1 \Phi^{\mathfrak{Q}} l = \Delta_2 \Theta_1 \Phi^{\mathfrak{Q}} l \oplus \Delta_1 \Phi^{\mathfrak{Q}} l, \end{aligned}$$

donc

$$(3.10) \quad Z \Delta v = \Delta_2 \Theta_1 v \oplus \Delta_1 v \quad \text{pour tout } v \in L^2(\mathfrak{Q}).$$

Vu que les éléments de la forme Δv sont denses dans $\overline{\Delta L^2(\mathfrak{Q})}$, leurs transformés par Z doivent être denses dans $\overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{Q})}$, donc

$$(3.11) \quad \overline{\{\Delta_2 \Theta_1 v \oplus \Delta_1 v : v \in L^2(\mathfrak{Q})\}} = \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{Q})}.$$

Cela étant, envisageons la transformation

$$\Omega = \Phi_+^{\otimes*} \oplus \Phi_{\mathfrak{R}_2} \oplus \Phi_{\mathfrak{R}_1};$$

celle-ci applique l'espace $\mathfrak{R}_+ = M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \mathfrak{R}_1$ unitairement sur l'espace

$$\mathbf{K}_+ = H^2(\mathfrak{L}_*) \oplus \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{L})}.$$

\mathfrak{H} , \mathfrak{H}_1 et \mathfrak{H}_2 seront appliqués par Ω sur

$$\mathbf{H} = [H^2(\mathfrak{L}_*) \oplus \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{L})}] \ominus \{\Theta_2 \Theta_1 w \oplus \Delta_2 \Theta_1 w \oplus \Delta_1 w : w \in H^2(\mathfrak{L})\},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= [\{\Theta_2 w' \oplus \Delta_2 w' : w' \in H^2(\mathfrak{F})\} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{L})}] \ominus \\ &\ominus \{\Theta_2 \Theta_1 w \oplus \Delta_2 \Theta_1 w \oplus \Delta_1 w : w \in H^2(\mathfrak{L})\} \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{H}_2 = [H^2(\mathfrak{L}_*) \oplus \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \{0\}] \ominus \{\Theta_2 w' \oplus \Delta_2 w' \oplus 0 : w' \in H^2(\mathfrak{F})\},$$

suivant les cas. Cela résulte de ce que, en vertu de (1. 5) et (1. 24),

$$\mathfrak{H} = [M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \mathfrak{R}_1] \ominus \{P^{\otimes*} P^{\otimes} l \oplus P_{\mathfrak{R}_2} P^{\otimes} l \oplus P_{\mathfrak{R}_1} l : l \in M_+(\mathfrak{L})\},$$

et en vertu de (1. 13) et la première des relations (1. 23),

$$\mathfrak{H}_2 = [M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R}_2] \ominus \{P^{\otimes*} f \oplus P_{\mathfrak{R}_2} f : f \in M_+(\mathfrak{F})\},$$

et que $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_2$.

A l'opérateur U_+ il correspond par Ω dans \mathfrak{R}_+ l'opérateur de la multiplication par la fonction e^{it} ; cf. (2. 1) et (3. 8). Grâce à la relation (1. 6), à T il correspond dans \mathbf{H} l'opérateur \mathbf{T} pour lequel

$$\mathbf{T}^*(u \oplus v_2 \oplus v_1) = e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \oplus e^{-it}v_2(t) \oplus e^{-it}v_1(t) \quad (u \oplus v_2 \oplus v_1 \in \mathbf{H}).$$

Il est manifeste que le résultat obtenu peut être reformulé en remplaçant $\{\mathfrak{L}, \mathfrak{L}_*, \Theta(\lambda)\}$ par une fonction quelconque qui coïncide avec celle-ci. Ainsi nous venons de démontrer la partie a) du théorème suivant:

Théorème 1. *Soit T une contraction complètement non-unitaire de l'espace \mathfrak{H} et soit $\{\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_*, \Theta(\lambda)\}$ une fonction analytique contractive qui coïncide avec la fonction caractéristique de T .*

a) *A tout sous-espace non banal \mathfrak{H}_1 de \mathfrak{H} , invariant pour T , il correspond une factorisation $\Theta(\lambda) = \Theta_2(\lambda)\Theta_1(\lambda)$ de $\{\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_*, \Theta(\lambda)\}$ en produit de deux fonctions analytiques contractives $\{\mathfrak{C}, \mathfrak{F}, \Theta_1(\lambda)\}$ et $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{C}_*, \Theta_2(\lambda)\}$, telle que*

- (i) *aucun des facteurs n'est une fonction constante unitaire,*
- (ii) *la variété linéaire $\mathbf{V} = \{\Delta_2 \Theta_1 v \oplus \Delta_1 v : v \in L^2(\mathfrak{C})\}$ est dense dans*

$$\overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{C})},$$

(iii) *T est unitairement équivalente à l'opérateur \mathbf{T} , défini dans l'espace fonctionnel*

$$(3.12) \quad \mathbf{H} = [H^2(\mathfrak{C}_*) \oplus \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{C})}] \ominus \{\Theta_2 \Theta_1 w \oplus \Delta_2 \Theta_1 w \oplus \Delta_1 w : w \in H^2(\mathfrak{C})\}$$

par

$$(3.13) \quad \mathbf{T}^*(u \oplus v_2 \oplus v_1) = e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \oplus e^{-it}v_2(t) \oplus e^{-it}v_1(t),$$

les sous-espaces de \mathbf{H} qui correspondent à \mathfrak{H}_1 et $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$ étant

$$(3.14) \quad \mathbf{H}_1 = [\{\Theta_2 w' \oplus \Delta_2 w' : w' \in H^2(\mathfrak{F})\} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathbb{C})}] \ominus \\ \ominus \{\Theta_2 \Theta_1 w \oplus \Delta_2 \Theta_1 w \oplus \Delta_1 w : w \in H^2(\mathbb{C})\}$$

et

$$(3.15) \quad \mathbf{H}_2 = [H^2(\mathbb{C}_*) \oplus \overline{\Delta_2 L^2(\mathbb{C})} \oplus \{0\}] \ominus \{\Theta_2 w' \oplus \Delta_2 w' \oplus 0 : w' \in H^2(\mathbb{C})\}.$$

b) Toute factorisation de $\{\mathbb{C}, \mathbb{C}_*, \Theta(\lambda)\}$ en produit de deux fonctions analytiques contractives satisfaisant aux conditions (i) et (ii) dérive, à coïncidence près, d'un sous-espace invariant non banal pour T , de la manière indiquée.

Pour démontrer la partie b) du théorème, il suffit de considérer la contraction \mathbf{T} , unitairement équivalente à celle donnée, qui est définie dans l'espace

$$(3.16) \quad \mathbf{H} = [H^2(\mathbb{C}_*) \oplus \overline{\Delta L^2(\mathbb{C})}] \ominus \{\Theta w \oplus \Delta w : w \in H^2(\mathbb{C})\}$$

par

$$(3.17) \quad \mathbf{T}^*(u \oplus v) = e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \oplus e^{-it}v(t);$$

cf. [VIII], n° 3. La relation évidente

$$I_{\mathbb{C}} - \Theta(e^{it})^* \Theta(e^{it}) = \Theta_1(e^{it})^* [I_{\mathfrak{F}} - \Theta_2(e^{it})^* \Theta_2(e^{it})] \Theta_1(e^{it}) + [I_{\mathbb{C}} - \Theta_1(e^{it})^* \Theta_1(e^{it})]$$

entraîne que

$$Z(t) : \Delta(t)g \rightarrow \Delta_2(t)\Theta_1(e^{it})g \oplus \Delta_1(t)g \quad (g \in \mathbb{C})$$

est une application isométrique de $\Delta(t)\mathbb{C}$ dans $\Delta_2(t)\mathfrak{F} \oplus \Delta_1(t)\mathbb{C}$ p. p., notamment en tous les points t où les limites radiales de Θ , Θ_1 et Θ_2 existent. Cela entraîne, à son tour, que

$$Z : \Delta v \rightarrow \Delta_2 \Theta_1 v \oplus \Delta_1 v \quad (v \in L^2(\mathbb{C}))$$

est une application isométrique de $\Delta L^2(\mathbb{C})$ dans $\Delta_2 L^2(\mathfrak{F}) \oplus \Delta_1 L^2(\mathbb{C})$. En vertu de la condition (ii) Z se prolonge par continuité à une application unitaire de $\overline{\Delta L^2(\mathbb{C})}$ sur $\overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathbb{C})}$. En identifiant les éléments qui se correspondent par Z , on obtient pour \mathbf{H} la représentation alternative (3.12), d'où il résulte la décomposition $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2$ donnée par (3.14) et (3.15). Dans cette représentation de \mathbf{H} , \mathbf{T} sera définie par

$$\mathbf{T}^*(u \oplus v_2 \oplus v_1) = e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \oplus e^{-it}v_2(t) \oplus e^{-it}v_1(t) \quad (u \oplus v_2 \oplus v_1 \in \mathbf{H});$$

\mathbf{H}_2 est évidemment invariant pour \mathbf{T}^* , donc \mathbf{H}_1 invariant pour \mathbf{T} .

De plus, ce sous-espace invariant est non banal.

En effet, $\mathbf{H}_2 = \{0\}$ veut dire

$$H^2(\mathbb{C}_*) \oplus \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} = \{\Theta_2 w \oplus \Delta_2 w : w \in H^2(\mathbb{C})\},$$

c'est-à-dire qu'à tout couple $u \in H^2(\mathbb{C}_*)$, $v \in \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})}$ il correspond un $w \in H^2(\mathbb{C})$ tel que $u = \Theta_2 w$, $v = \Delta_2 w$ et par conséquent

$$\Theta_2^* u + \Delta_2 v = \Theta_2^* \Theta_2 w + \Delta_2^2 w = w \in H^2(\mathbb{C}).$$

Choisissons en particulier $u = 0, v = \Delta_2(t)e^{-int}f$ ($f \in \mathfrak{F}$); il résulte que $\Delta_2(t)^2 e^{-int}f \in H^2(\mathfrak{E})$ et cela pour tout entier n , d'où: $\Delta_2(t)^2 f = 0$ p. p. Puisque \mathfrak{F} est séparable, cela entraîne $\Delta_2(t) = 0$ p. p., donc $\Theta_2(e^{it})$ est isométrique p. p. Choisissons alors pour u une fonction constante $u(\lambda) = e_*$ ($e_* \in \mathfrak{E}_*$); il lui correspond un $w \in H^2(\mathfrak{E})$ tel que $e_* = \Theta_2 w$, c'est-à-dire que $e_* = \Theta_2(e^{it})w(e^{it})$ p. p. Faisant parcourir e_* un ensemble dénombrable $\{e_{*v}\}$, partout dense dans \mathfrak{E}_* , et en réunissant les ensembles des points t exceptionnels correspondants, il résulte que sauf les points d'un ensemble de mesure nulle, on a pour tout t : $e_{*v} \in \Theta_2(e^{it})\mathfrak{E}$ ($v = 1, 2, \dots$) et par conséquent $\mathfrak{E}_* \subseteq \overline{\Theta_2(e^{it})\mathfrak{E}}$. Ainsi, $\Theta_2(e^{it})$ est p. p. unitaire (de \mathfrak{E} sur \mathfrak{E}_*). De la même relation $e_* = \Theta_2(e^{it})w(e^{it})$ il s'ensuit $\Theta_2(e^{it})^* e_* = w(e^{it})$, donc, si $\Theta_2(\lambda)$ a le développement en série entière $\sum_0^\infty \lambda^n \Theta_{2,n}$, on a

$$\sum_0^\infty e^{-int} \Theta_{2,n}^* e_* \in H^2(\mathfrak{E}),$$

d'où il résulte: $\Theta_{2,n}^* = 0, \Theta_{2,n} = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), donc $\Theta_2(\lambda) = \Theta_{2,0}$. Ainsi, $\mathbf{H}_2 = \{0\}$ entraîne que $\Theta_2(\lambda)$ est une constante unitaire, ce qui contredit l'hypothèse faite.

Un raisonnement analogue montre que $\mathbf{H}_1 = \{0\}$ entraîne que $\Theta_1(\lambda)$ est une constante unitaire, ce qui contredit aussi l'hypothèse faite.

Cela achève la démonstration du théorème.

4. Quelques propositions additionnelles

1. Commençons par la suivante

Proposition 4. 1. *Pour toute fonction analytique contractive $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Omega(\lambda)\}$ il existe une fonction analytique contractive pure $\{\mathfrak{A}^0, \mathfrak{B}^0, \Omega^0(\lambda)\}$, et une seule, telle que $\mathfrak{A}^0 \subseteq \mathfrak{A}, \mathfrak{B}^0 \subseteq \mathfrak{B}, \Omega^0(\lambda) = \Omega(\lambda)|_{\mathfrak{A}^0}$ et que $\Omega'(\lambda) = \Omega(\lambda)|_{\mathfrak{A}'}$ est une transformation unitaire de $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \ominus \mathfrak{A}^0$ sur $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} \ominus \mathfrak{B}^0$. On appellera $\{\mathfrak{A}^0, \mathfrak{B}^0, \Omega^0(\lambda)\}$ la „partie pure” de $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Omega(\lambda)\}$.*

Démonstration. Posons

$$\mathfrak{A}' = \{a : a \in \mathfrak{A}, a = \Omega(0)^* \Omega(0)a\}, \quad \mathfrak{B}' = \{b : b \in \mathfrak{B}, b = \Omega(0)\Omega(0)^*b\}.$$

Pour $a \in \mathfrak{A}'$ on a $\Omega(0)a = \Omega(0)\Omega(0)^* \Omega(0)a$, donc $\Omega(0)a \in \mathfrak{B}'$, ce qui veut dire que $\Omega(0)\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{B}'$. On obtient de manière analogue que $\Omega(0)^*\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{A}'$; en vertu de la relation $b = \Omega(0)\Omega(0)^*b$ ($b \in \mathfrak{B}'$) cela entraîne que $\mathfrak{B}' \subseteq \Omega(0)\mathfrak{A}'$. Donc $\Omega(0)$ applique \mathfrak{A}' sur \mathfrak{B}' . Cette application est unitaire parce que pour $a \in \mathfrak{A}'$ on a

$$\|\Omega(0)a\|^2 = (\Omega(0)^* \Omega(0)a, a) = (a, a) = \|a\|^2.$$

Puisque $\Omega(\lambda)$ est analytique, on a pour $0 \leq r < 1$ et $a \in \mathfrak{A}$

$$(4. 1) \quad \Omega(0)a = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Omega(re^{it})a dt,$$

d'où, pour $a \in \mathfrak{A}'$,

$$\|a\| = \|\Omega(0)a\| = \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Omega(re^{it})a \, dt \right\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\Omega(re^{it})a\| \, dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|a\| \, dt = \|a\|$$

et par conséquent

$$(4.2) \quad \left\| \int_0^{2\pi} \Omega(re^{it})a \, dt \right\| = \int_0^{2\pi} \|\Omega(re^{it})a\| \, dt,$$

et

$$(4.3) \quad \|\Omega(re^{it})a\| = \|a\| \quad (0 \leq t < 2\pi).$$

Désignons l'intégrale dans le second membre de (4.1) par a_r . (4.2) entraîne que $\Omega(re^{it})a = \lambda_r(t)a_r$, avec $\lambda_r(t) \geq 0$ ¹⁵⁾; d'après (4.3), $\lambda_r(t)$ a une valeur constante. Donc $\Omega(re^{it})a$ a aussi une valeur constante; d'après (4.1) cette valeur doit être égale à $\Omega(0)a$. Ainsi, pour tout $a \in \mathfrak{A}'$ et $|\lambda| < 1$, on a

$$\Omega(\lambda)a = \Omega(0)a.$$

En d'autres mots, $\Omega'(\lambda) = \Omega(\lambda)|_{\mathfrak{A}'}$ est une application constante unitaire de \mathfrak{A}' sur \mathfrak{B}' . De manière analogue, $\Omega(\lambda)^*|_{\mathfrak{B}'}$ est une application constante unitaire de \mathfrak{B}' sur \mathfrak{A}' . Par conséquent, on a pour $a \in \mathfrak{A}^0 = \mathfrak{A} \ominus \mathfrak{A}'$ et $b \in \mathfrak{B}'$:

$$(\Omega(\lambda)a, b) = (a, \Omega(\lambda)^*b) = 0,$$

donc $\Omega(\lambda)a \in \mathfrak{B}^0 = \mathfrak{B} \ominus \mathfrak{B}'$, c'est-à-dire que $\Omega^0(\lambda) = \Omega(\lambda)|_{\mathfrak{A}^0}$ applique \mathfrak{A}^0 dans \mathfrak{B}^0 . Montrons que la fonction analytique contractive ainsi obtenue $\{\mathfrak{A}^0, \mathfrak{B}^0, \Omega^0(\lambda)\}$ est *pure*, c'est-à-dire que $\|\Omega^0(0)a\| < \|a\|$ pour tout $a \in \mathfrak{A}^0$, $a \neq 0$. En effet, si l'on a $\|\Omega^0(0)a\| = \|a\|$ pour un $a \in \mathfrak{A}^0$, il en résulte que

$$((I - \Omega(0)^* \Omega(0))a, a) = \|a\|^2 - \|\Omega(0)a\|^2 = \|a\|^2 - \|\Omega^0(0)a\|^2 = 0,$$

d'où $(I - \Omega(0)^* \Omega(0))a = 0$, $a = \Omega(0)^* \Omega(0)a$, donc $a \in \mathfrak{A}'$. Comme $\mathfrak{A}^0 \perp \mathfrak{A}'$, cela entraîne $a = 0$.

Les décompositions $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^0 \oplus \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^0 \oplus \mathfrak{B}'$ que nous venons de cons-

¹⁵⁾ Pour une fonction $f(t)$ ($a \leq t \leq b$), à valeurs dans un espace de Hilbert, faiblement continue,

on a, en posant $g = \int_a^b f(t) \, dt$,

$$\left\| \int_a^b f(t) \, dt \right\|^2 = \left(\int_a^b f(t) \, dt, g \right) = \int_a^b (f(t), g) \, dt \leq \int_a^b \|f(t)\| \cdot \|g\| \, dt = \int_a^b \|f(t)\| \, dt \cdot \|g\|,$$

d'où

$$\left\| \int_a^b f(t) \, dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| \, dt.$$

Pour qu'on ait égalité, il faut et il suffit que $(f(t), g)$ soit égal à $\|f(t)\| \cdot \|g\|$ pour tout t , ce qui veut dire que $f(t) = \lambda(t)g$ avec un facteur numérique $\lambda(t) \geq 0$.

truire, vérifient donc les conditions de la proposition. Il nous reste à montrer leur unicité. Envisageons à cet effet des décompositions quelconques $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'_0 \oplus \mathfrak{A}'_1$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'_0 \oplus \mathfrak{B}'_1$ vérifiant ces conditions. Puisque $\Omega(0)$ applique \mathfrak{A}'_1 unitairement sur \mathfrak{B}'_1 , on a $\|a\| = \|\Omega(0)a\|$ pour $a \in \mathfrak{A}'_1$, ce qui entraîne $(I - \Omega(0)^* \Omega(0))a = 0$, donc $a \in \mathfrak{A}'$; par conséquent $\mathfrak{A}'_1 \subseteq \mathfrak{A}'$. S'il existait dans \mathfrak{A}' un élément $a \neq 0$ orthogonal à \mathfrak{A}'_1 , on aurait $\|\Omega(0)a\| = \|a\|$ parce que $a \in \mathfrak{A}'$, et $\|\Omega(0)a\| < \|a\|$ parce que $a \in \mathfrak{A}'_0$: contradiction. Donc $\mathfrak{A}'_1 = \mathfrak{A}'$ et par conséquent $\mathfrak{B}'_1 = \Omega(\lambda)\mathfrak{A}'_1 = \Omega(\lambda)\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}'$, $\mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{A} \ominus \mathfrak{A}'_1 = \mathfrak{A} \ominus \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'_0 = \mathfrak{B} \ominus \mathfrak{B}'_1 = \mathfrak{B} \ominus \mathfrak{B}' = \mathfrak{B}^0$. Cela achève la démonstration.

Le résultat que nous venons d'obtenir nous permet de compléter le théorème 2 de [VIII] de la façon suivante:

Proposition 4. 2. Soit $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ une fonction analytique contractive qui n'est pas une constante unitaire, et soit \mathbf{T} la contraction complètement non-unitaire qu'elle engendre, c'est-à-dire que \mathbf{T} est définie dans l'espace

$$\mathbf{H} = (H^2(\mathfrak{E}_*) \oplus \overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}) \ominus [\Theta w \oplus \Delta w : w \in H^2(\mathfrak{E})]$$

par

$$\mathbf{T}^*(u_* \oplus v) = e^{-it}[u_*(e^{it}) - u_*(0)] \oplus e^{-it}v(t) \quad (u_* \oplus v \in \mathbf{H}).$$

La fonction caractéristique de \mathbf{T} coïncide alors avec la partie pure $\{\mathfrak{E}^0, \mathfrak{E}_*^0, \Theta^0(\lambda)\}$ de $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$.

Démonstration. Ici, bien entendu, on a posé $\Delta(t) = [I_{\mathfrak{E}} - \Theta(e^{it})^* \Theta(e^{it})]^{\frac{1}{2}}$. Désignons par $\Delta^0(t)$ la fonction analogue formée avec $\Theta^0(\lambda)$. La décomposition $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}' \oplus \mathfrak{E}^0$ entraîne de manière évidente la décomposition $L^2(\mathfrak{E}) = L^2(\mathfrak{E}') \oplus L^2(\mathfrak{E}^0)$ et avec cela la décomposition $H^2(\mathfrak{E}) = H^2(\mathfrak{E}') \oplus H^2(\mathfrak{E}^0)$. Puisque $\Theta'(\lambda)$ est une constante unitaire, on a $\Delta(t)v(t) = 0 \oplus \Delta^0(t)v^0(t)$ pour toute fonction $v = v' \oplus v^0 \in L^2(\mathfrak{E})$. Par conséquent,

$$\{\Theta w \oplus \Delta w : w \in H^2(\mathfrak{E})\} = \{\Theta' w' \oplus \Theta^0 w^0 \oplus \Delta^0 w^0 : w' \in H^2(\mathfrak{E}'), w^0 \in H^2(\mathfrak{E}^0)\},$$

donc, vu que $\Theta' H^2(\mathfrak{E}') = H^2(\Theta' \mathfrak{E}') = H^2(\mathfrak{E}'_*)$,

$$\{\Theta w \oplus \Delta w : w \in H^2(\mathfrak{E})\} = H^2(\mathfrak{E}'_*) \oplus \{\Theta^0 w^0 \oplus \Delta^0 w^0 : w^0 \in H^2(\mathfrak{E}^0)\}.$$

Il s'ensuit que si $u_* \oplus v \in \mathbf{H}$, on a $u_* \perp H^2(\mathfrak{E}'_*)$, donc $u_* \in H^2(\mathfrak{E}^0_*)$. Par conséquent, l'espace \mathbf{H} s'identifie de façon naturelle à l'espace

$$\mathbf{H}^0 = [H^2(\mathfrak{E}^0_*) \oplus \overline{\Delta^0 L^2(\mathfrak{E}^0)}] \ominus \{\Theta^0 w^0 \oplus \Delta^0 w^0 : w^0 \in H^2(\mathfrak{E}^0)\}$$

et \mathbf{T} à l'opérateur \mathbf{T}^0 , défini dans \mathbf{H}^0 par

$$\mathbf{T}^0*(u_*^0 \oplus v^0) = e^{-it}[u_*^0(e^{it}) - u_*^0(0)] \oplus e^{-it}v^0(t) \quad (u_*^0 \oplus v^0 \in \mathbf{H}^0).$$

Or, puisque la fonction $\{\mathfrak{E}^0, \mathfrak{E}_*^0, \Theta^0(\lambda)\}$ est pure, théorème 2 de [VIII] affirme que la fonction caractéristique de \mathbf{T}^0 , ou, ce qui revient au même, celle de \mathbf{T} , coïncide avec $\{\mathfrak{E}^0, \mathfrak{E}_*^0, \Theta^0(\lambda)\}$. Proposition 4. 2 est démontrée.

2. Revenons au théorème 1. Soit $T = \begin{pmatrix} T_1 & X \\ O & T_2 \end{pmatrix}$ la forme triangulaire de T suivant la décomposition $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ et soit $\Theta = \Theta_2 \Theta_1$ la factorisation de la fonction

caractéristique de T , correspondant au sous-espace invariant \mathfrak{H}_1 . Nous sommes à même d'ajouter au théorème 1 la suivante

Proposition 4.3. *Les fonctions caractéristiques de T_1 et T_2 coïncident, selon les cas, avec les parties pures de Θ_1 et Θ_2 .*

Démonstration. Il suffit d'envisager le modèle fonctionnel de T , donc $T = \begin{pmatrix} T_1 & X \\ O & T_2 \end{pmatrix}$. Puisque $T^* = \begin{pmatrix} T_1^* & O \\ X^* & T_2^* \end{pmatrix}$, on a

$$T_2^* = T^*|_{\mathbf{H}_2} \quad \text{et} \quad T_1^* = P_1 T^*|_{\mathbf{H}_1},$$

P_1 désignant la projection orthogonale dans \mathbf{H} sur \mathbf{H}_1 .

Pour T_2 l'assertion découle de manière évidente de la définition (3.15) de \mathbf{H}_2 et de la proposition 4.2.

Quant à T_1 , observons d'abord que, grâce à la définition (3.14), les éléments de \mathbf{H} appartenant à \mathbf{H}_1 sont ceux de la forme

$$\Theta_2 w \oplus \Delta_2 w \oplus v \quad \text{où} \quad w \in H^2(\mathfrak{F}), \quad v \in \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{C})}$$

et

$$\Theta_1^* \Theta_2^* (\Theta_2 w) + \Theta_1^* \Delta_2 (\Delta_2 w) + \Delta_1 v \perp H^2(\mathfrak{C});$$

la dernière condition se réduit évidemment à ce que

$$(4.4) \quad \Theta_1^* w + \Delta_1 v \perp H^2(\mathfrak{C}).$$

Pour $\Theta_2 w \oplus \Delta_2 w \oplus v \in \mathbf{H}_1$ nous avons, en vertu de (3.13),

$$\begin{aligned} T^* (\Theta_2 w \oplus \Delta_2 w \oplus v) &= e^{-it} [\Theta_2 w - \Theta_2(0) w(0)] \oplus e^{-it} \Delta_2 w \oplus e^{-it} v = \\ &= (\Theta_2 w_1 \oplus \Delta_2 w_1 \oplus v_1) + (w_2 \oplus v_2 \oplus 0) \end{aligned}$$

où

$$w_1(\lambda) = \frac{w(\lambda) - w(0)}{\lambda}, \quad v_1(t) = e^{-it} v(t),$$

$$w_2(\lambda) = \frac{\Theta_2(\lambda) - \Theta_2(0)}{\lambda} w(0), \quad v_2(t) = e^{-it} \Delta_2(t) w(0).$$

Grâce à (4.4) on a

$$\Theta_1^* w_1 + \Delta_1 v_1 = e^{-it} (\Theta_1^* w + \Delta_1 v) - e^{-it} \Theta_1^* w(0) \perp H^2(\mathfrak{C}),$$

donc on voit que $\Theta_2 w_1 \oplus \Delta_2 w_1 \oplus v_1 \in \mathbf{H}_1$. D'autre part, on a $w_2 \oplus v_2 \oplus 0 \in \mathbf{H}_2$ parce que, évidemment,

$$\Theta_2^* w_2 + \Delta_2 v_2 = e^{-it} w(0) - e^{-it} \Theta_2(e^{it})^* \Theta_2(0) w(0) \perp H^2(\mathfrak{C}).$$

Ainsi,

$$T_1^* (\Theta_2 w \oplus \Delta_2 w \oplus v) = P_1 T^* (\Theta_2 w \oplus \Delta_2 w \oplus v) = \Theta_2 w_1 \oplus \Delta_2 w_1 \oplus v_1.$$

En se servant de la transformation

$$\Theta_2 w_2 \oplus \Delta_2 w \rightarrow w \quad (w \in H^2(\mathfrak{F}))$$

qui applique $\{\Theta_2 w \oplus \Delta_2 w : w \in H^2(\mathfrak{F})\}$ unitairement sur $H^2(\mathfrak{F})$, on peut donc identifier l'espace \mathbf{H}_1 à l'espace

$$\tilde{\mathbf{H}}_1 = [H^2(\mathfrak{F}) \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathbb{C})}] \ominus \{\Theta_1 w \oplus \Delta_1 w : w \in H^2(\mathbb{C})\}$$

et \mathbf{T}_1 à l'opérateur $\tilde{\mathbf{T}}_1$ de $\tilde{\mathbf{H}}_1$, défini par

$$\tilde{\mathbf{T}}_1^*(w \oplus v) = w_1 \oplus v_1.$$

On peut alors appliquer la proposition 4.2 et on obtient que la fonction caractéristique de \mathbf{T}_1 coïncide avec la partie pure de Θ_1 .

Cela achève la démonstration de la proposition 4.3.

3. Il convient d'ajouter quelques remarques concernant la condition (ii) du théorème. ¹⁶⁾

Proposition 4.4. *La condition (ii) est équivalente à la condition suivante:*

(ii)' *la variété linéaire $\mathbf{V}(t) = \{\Delta_2(t)\Theta_1(e^{it})e \oplus \Delta_1(t)e : e \in \mathbb{C}\}$ est dense dans $\overline{\Delta_2(t)\mathfrak{F} \oplus \Delta_1(t)\mathbb{C}}$ pour presque tous les t .*

Démonstration. Supposons que (ii) est vérifiée et envisageons en particulier deux fonctions constantes $e(t) \equiv e, f(t) \equiv f$ ($e \in \mathbb{C}, f \in \mathfrak{F}$). Il s'ensuit qu'il existe une suite $\{v_n\}$ d'éléments de $L^2(\mathbb{C})$ telle que $\Delta_2\Theta_1 v_n \oplus \Delta_1 v_n$ tend vers $\Delta_2 f \oplus \Delta_1 e$ dans la métrique de l'espace $L^2(\mathfrak{F}) \oplus L^2(\mathbb{C})$, c'est-à-dire en moyenne, d'où il s'ensuit que si l'on remplace la suite $\{v_n\}$ au besoin par une suite partielle convenable ¹⁷⁾, $\Delta_2(t)\Theta_1(e^{it})v_n(t) \oplus \Delta_1(t)v_n(t)$ tend vers $\Delta_2(t)f \oplus \Delta_1(t)e$ même p. p. (dans la métrique de $\mathfrak{F} \oplus \mathbb{C}$). Cela prouve que $\Delta_2(t)f \oplus \Delta_1(t)e \in \overline{\mathbf{V}(t)}$ p. p. En faisant parcourir e et f deux ensembles dénombrables $\{e_n\}$ et $\{f_m\}$, denses dans \mathbb{C} et \mathfrak{F} , il résulte que $\Delta_2(t)f_m \oplus \Delta_1(t)e_n \in \overline{\mathbf{V}(t)}$ pour tous les t à l'exception des points d'un ensemble de mesure nulle, indépendant de n et m . Pour tout t non exceptionnel on aura alors $\Delta_2(t)\mathfrak{F} \oplus \Delta_1(t)\mathbb{C} \subseteq \overline{\mathbf{V}(t)}$, donc (ii) entraîne (ii)'.

Supposons, inversement, que (ii)' est vérifiée, et envisageons un élément $v_2 \oplus v_1$ de $\overline{\Delta L^2(\mathfrak{F}) \oplus \Delta_1 L^2(\mathbb{C})}$, orthogonal à \mathbf{V} , c'est-à-dire tel que $(v_2, \Delta_2\Theta_1 u) + (v_1, \Delta_1 u) = 0$ pour tout $u \in L^2(\mathbb{C})$. On a alors $\Theta_1(e^{it})^* \Delta_2(t)v_2(t) + \Delta_1(t)v_1(t) = 0$ p. p., et par conséquent, pour tout t non exceptionnel, $v_2(t) \oplus v_1(t) \perp \mathbf{V}(t)$. Or, comme $v_2 \oplus v_1 \in \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F}) \oplus \Delta_1 L^2(\mathbb{C})}$, on a $v_2(t) \oplus v_1(t) \in \overline{\Delta_2(t)\mathfrak{F} \oplus \Delta_1(t)\mathbb{C}}$ p. p., donc, en vertu de

¹⁶⁾ En vertu du théorème 1, les factorisations de la fonction caractéristique de T qui ne vérifient pas la condition (ii), ne correspondent pas à des sous-espaces invariants pour T . Mais elles correspondent à des sous-espaces invariants de certaines contractions dont la partie complètement non-unitaire est égale à T . Notamment, en partant du modèle fonctionnel (3.16)–(3.17) pour T , on doit ajouter à cet espace \mathbf{H} l'espace orthogonal

$$\mathbf{W} = [\overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathbb{C})}] \ominus \overline{\mathbf{V}}$$

et de prolonger \mathbf{T} en la définissant dans \mathbf{W} comme multiplication par e^{it} , pour arriver à l'espace et l'opérateur définis par (3.12) et (3.13) et aux sous-espaces de cet espace définis par (3.14) et (3.15). — Pour des indications additionnelles dans cet ordre d'idées, cf. [1].

¹⁷⁾ Notamment telle que $\sum_n \|(\Delta_2\Theta_1 v_n \oplus \Delta_1 v_n) - (\Delta_2 f \oplus \Delta_1 e)\| < \infty$.

(ii)', on doit avoir $v_2(t) \oplus v_1(t) = 0$ p. p. Par conséquent, $v_2 \oplus v_1 = 0$. Ainsi, le seul élément orthogonal à \mathbf{V} est le 0, donc (ii)' entraîne (ii).

Remarque. La condition (ii)' est vérifiée en particulier dans le cas où la fonction $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{G}_*, \Theta_2(\lambda)\}$ est intérieure.

En effet, on a alors $\Delta_2(t) = 0$ presque partout.

Proposition 4.5. Dans le cas où $\Theta(\lambda)$ est une fonction intérieure, la condition (ii) veut dire que $\Theta_1(\lambda)$ et $\Theta_2(\lambda)$ sont aussi intérieures. Si $\Theta(e^{it})$ est même unitaire p. p., (ii) veut dire que $\Theta_1(e^{it})$ et $\Theta_2(e^{it})$ sont aussi p. p. unitaires.

Démonstration. Comme $\Theta_1(\lambda)$ et $\Theta_2(\lambda)$ sont des fonctions analytiques contractives, l'hypothèse que le produit $\Theta_2(e^{it})\Theta_1(e^{it}) = \Theta(e^{it})$ est isométrique p. p. entraîne que $\Theta_1(e^{it})$ est isométrique p. p., donc $\Delta_1(t) = 0$ p. p. Ainsi, (ii)' se réduit à la condition

$$(4.5) \quad \overline{\Delta_2(t)\Theta_1(e^{it})\mathfrak{G}} = \overline{\Delta_2(t)\mathfrak{F}} \quad \text{p. p.}$$

Comme de plus

$$\Theta_1(e^{it})^* \Delta_2(t)^2 \Theta_1(e^{it}) = \Theta_1(e^{it})^* \Theta_1(e^{it}) - \Theta(e^{it})^* \Theta(e^{it}) = I - I = O,$$

on a $\Delta_2(t)\Theta_1(e^{it}) = O$, p. p., donc en vertu (4.5), $\overline{\Delta_2(t)\mathfrak{F}} = \{0\}$, ce qui veut dire que $\Delta_2(t) = 0$ p. p., c'est-à-dire que $\Theta_2(e^{it})$ est aussi isométrique p. p. Lorsque $\Theta(e^{it})$ est même unitaire p. p., on a $I = \Theta(e^{it})\Theta(e^{it})^* = \Theta_2(e^{it})\Theta_1(e^{it})\Theta_1(e^{it})^*\Theta_2(e^{it})^*$ et par conséquent $\overline{\Theta_2(e^{it})\mathfrak{F}} = \mathfrak{G}_*$, donc $\Theta_2(e^{it})$ est non seulement isométrique, mais aussi unitaire, p. p., et il en est alors de même pour $\Theta_1(e^{it}) = \Theta_2(e^{it})^{-1}\Theta(e^{it})$. Cela achève la démonstration.

La fonction caractéristique de T est intérieure si $T^{*n} \rightarrow O$ ($n \rightarrow \infty$), et dans ce cas seulement (cf. [VIII], n° 4). Comme le cas d'une transformation linéaire bornée quelconque peut être réduit à celui-ci par multiplication par un facteur numérique positif convenable, le problème de trouver les sous-espaces non banaux, invariants pour une transformation linéaire bornée quelconque, se ramène à trouver les factorisations des fonctions analytiques contractives pures intérieures en produit de deux fonctions intérieures. Une réduction est possible même au cas où $\|T\| < 1$, la fonction caractéristique $\Theta_T(\lambda)$ étant alors unitaire sur la circonférence unité et analytique même sur cette circonférence (cf. [VIII], n° 5): le problème des sous-espaces invariants est donc équivalent au problème des factorisations de telles fonctions en facteurs contractifs analytiques dans le cercle unité et unitaires sur la circonférence. Malheureusement, le problème de telles factorisations est ouvert, du moins dans le cas général où la dimension de l'espace en question est infinie.

Par contre, dans certains cas où la fonction caractéristique de T n'est pas intérieure, nous pouvons dès maintenant faire usage de notre théorème 1 pour construire des sous-espaces invariants; les cas considérés diffèrent des exemples connus jusqu'à présent d'opérateurs possédant des sous-espaces invariants.

5. Quelques théorèmes généraux sur les fonctions analytiques à valeurs opérateurs

1. Soit $N(t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) une fonction à valeurs opérateurs autoadjoints dans l'espace de Hilbert (séparable) \mathfrak{E} , fortement mesurable, et telle que $O \leq N(t) \leq I$. Elle engendre par $(Nv)(t) = N(t)v(t)$ un opérateur N dans l'espace $L^2(\mathfrak{E})$, qui est

aussi autoadjoint et tel que $O \cong N \cong I$. Désignons par U^\times l'opérateur de la multiplication par la fonction scalaire e^{it} dans $L^2(\mathbb{C})$; U^\times est unitaire et permute évidemment à N .

La proposition suivante est connue; cf. LOWDENSLAGER [7].

Proposition 5.1. a) *Lorsque la condition*

$$(5.1) \quad \bigcap_{n \geq 0} U^{\times n} \overline{NH^2(\mathbb{C})} = \{0\}$$

est vérifiée, il existe une fonction analytique contractive extérieure $\{\mathbb{C}, \mathfrak{F}, \Theta(\lambda)\}$ telle que

$$(5.2) \quad N(t)^2 = \Theta(e^{it})^* \Theta(e^{it}) \quad \text{p. p.}$$

b) *Inversement, la condition (5.1) est toujours vérifiée lorsque $N(t)$ est de la forme (5.2) où $\{\mathbb{C}, \mathfrak{F}, \Theta(\lambda)\}$ est une fonction analytique contractive quelconque.*

Démonstration. *Ad a)* Puisque N permute à U^\times , le sous-espace $\mathfrak{N} = \overline{NH^2(\mathbb{C})}$ est invariant pour U^\times . La condition (5.1) veut dire que la restriction de U^\times à \mathfrak{N} n'a pas de partie unitaire. Donc \mathfrak{N} a la décomposition de Wold de la forme suivante:

$$\mathfrak{N} = \bigoplus_0^\infty U^{\times n} \mathfrak{F} = M_+(\mathfrak{F}) \quad \text{où} \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{N} \ominus U^\times \mathfrak{N}.$$

Il est évidemment possible d'identifier les fonctions constantes dans $L^2(\mathbb{C})$ à leurs valeurs dans \mathbb{C} et de plonger de cette façon l'espace \mathbb{C} dans l'espace $L^2(\mathbb{C})$ comme un sous-espace de celui-ci. Ce sous-espace \mathbb{C} est évidemment ambulant pour U^\times ; on a

$$L^2(\mathbb{C}) = \bigoplus_{-\infty}^\infty U^{\times n} \mathbb{C} = M(\mathbb{C}), \quad H^2(\mathbb{C}) = \bigoplus_0^\infty U^{\times n} \mathbb{C} = M_+(\mathbb{C}).$$

On a donc

$$\overline{NM_+(\mathbb{C})} = \overline{NH^2(\mathbb{C})} = \mathfrak{N} = M_+(\mathfrak{F}).$$

Ainsi, nous pouvons appliquer le lemme du n° 2 au cas $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}' = L^2(\mathbb{C})$, $U = U' = U^\times$, $\mathfrak{A} = \mathbb{C}$, $\mathfrak{A}' = \mathfrak{F}$ et $Q = N$. Nous obtenons qu'il existe une fonction analytique contractive extérieure $\{\mathbb{C}, \mathfrak{F}, \Theta(\lambda)\}$ telle que

$$(5.3) \quad \Phi^{\mathfrak{F}} N v = \Theta(e^{it}) v(t) \quad \text{pour} \quad v \in L^2(\mathbb{C});$$

ici on a fait usage du fait que $\Phi^{\mathbb{C}} v = v$ parce que \mathbb{C} est le sous-espace de $L^2(\mathbb{C})$ des fonctions constantes.¹⁸⁾

Puisque $\Phi^{\mathfrak{F}}$ est unitaire, (5.3) entraîne pour $v, v' \in L^2(\mathbb{C})$ quelconques:

$$(Nv, Nv')_{L^2(\mathbb{C})} = (\Phi^{\mathfrak{F}} Nv, \Phi^{\mathfrak{F}} Nv')_{L^2(\mathfrak{F})} = (\Theta v, \Theta v')_{L^2(\mathfrak{F})},$$

donc

$$\int_0^{2\pi} (N(t)^2 v(t), v'(t))_{\mathbb{C}} dt = \int_0^{2\pi} (\Theta(e^{it})^* \Theta(e^{it}) v(t), v'(t))_{\mathfrak{F}} dt,$$

d'où il s'ensuit (grâce aussi à la séparabilité de \mathbb{C}) l'assertion (5.2).

¹⁸⁾ En effet, $u = \sum U^{\times n} e_n$ ($e_n \in \mathbb{C}$) veut dire que

$$(\Phi^{\mathbb{C}} u)(t) = \sum e^{int} e_n = u(t).$$

Ad b). Pour $v \in L^2(\mathfrak{E})$ définissons Y par

$$Y(Nv) = \Theta v.$$

En vertu de (5. 2), Y est une isométrie de $NL^2(\mathfrak{E})$ dans $L^2(\mathfrak{F})$, qui s'étend par continuité à une isométrie de $\overline{NL^2(\mathfrak{E})}$ dans $L^2(\mathfrak{F})$. En désignant par U^\times et V^\times l'opérateur de multiplication par la fonction e^{it} dans $L^2(\mathfrak{E})$ et $L^2(\mathfrak{F})$, selon les cas, il résulte que $YU^\times = V^\times Y$ dans $\overline{NL^2(\mathfrak{E})}$ et par suite

$$Y \bigcap_{n \geq 0} U^{\times n} \overline{NH^2(\mathfrak{E})} \subseteq \bigcap_{n \geq 0} V^{\times n} \overline{\Theta H^2(\mathfrak{E})} \subseteq \bigcap_{n \geq 0} V^{\times n} H^2(\mathfrak{F}) = \{0\};$$

la dernière égalité s'ensuit de ce que $V^{\times n} H^2(\mathfrak{F})$ est composé des fonctions analytiques dont les premiers n coefficients de Taylor s'annulent.

Y étant isométrique, les relations ci-dessus entraînent (5. 1).

Proposition 5. 2. a) Soient $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ et $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \Theta_1(\lambda)\}$ deux fonctions analytiques contractives, dont la seconde est extérieure, et supposons que

$$(5. 4) \quad \Theta_1(e^{it})^* \Theta_1(e^{it}) \geq \Theta(e^{it})^* \Theta(e^{it}) \quad p. p.$$

Il existe alors une fonction analytique contractive $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{E}_*, \Theta_2(\lambda)\}$ telle que

$$(5. 5) \quad \Theta(\lambda) = \Theta_2(\lambda) \Theta_1(\lambda) \quad (|\lambda| < 1).$$

b) Lorsque dans (5. 4) il y a égalité p. p., la fonction $\Theta_2(\lambda)$ est intérieure. Si, de plus, $\Theta(\lambda)$ est extérieure, alors $\Theta_2(\lambda)$ est une constante unitaire.

Démonstration. Ad a). (5. 4) entraîne

$$\|\Theta_1 v\|_{L^2(\mathfrak{F})} \geq \|\Theta v\|_{L^2(\mathfrak{E})} \quad \text{pour tout } v \in L^2(\mathfrak{E}).$$

Ainsi, on définit par la formule

$$(5. 6) \quad X(\Theta_1 v) = \Theta v \quad (v \in L^2(\mathfrak{E}))$$

une contraction X de $\Theta_1 L^2(\mathfrak{E})$ dans $L^2(\mathfrak{E}_*)$, qui s'étend alors par continuité à une contraction X de $\overline{\Theta_1 L^2(\mathfrak{E})}$ dans $L^2(\mathfrak{E}_*)$. Puisque $\Theta_1(\lambda)$ est extérieure, on a $\overline{\Theta_1 H^2(\mathfrak{E})} = H^2(\mathfrak{F})$ et par conséquent $\overline{\Theta_1 L^2(\mathfrak{E})} = L^2(\mathfrak{F})$. Comme $\Theta v \in H^2(\mathfrak{E}_*)$ pour $v \in H^2(\mathfrak{E})$, parce que $\Theta(\lambda)$ est analytique, on a

$$XH^2(\mathfrak{F}) = X\overline{\Theta_1 H^2(\mathfrak{E})} \subseteq \overline{\Theta H^2(\mathfrak{E})} \subseteq H^2(\mathfrak{E}_*).$$

En désignant par U_\star^\times et V^\times la multiplication par e^{it} dans l'espace $L^2(\mathfrak{E}_*)$ et dans l'espace $L^2(\mathfrak{F})$, il résulte de la définition (5. 6) de X qu'on a aussi $XV^\times = U_\star^\times X$ dans $L^2(\mathfrak{F})$. Ainsi, on peut appliquer le lemme du n° 2 au cas $\mathfrak{H} = L^2(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{H}' = L^2(\mathfrak{E}_*)$, $U = V^\times$, $U' = U_\star^\times$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{A}' = \mathfrak{E}_*$ (où \mathfrak{F} et \mathfrak{E} sont considérés comme sous-espaces des espaces correspondants L^2 , constitués des fonctions constantes), et $Q = X$. Il résulte qu'il existe une fonction analytique contractive $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{E}_*, \Theta_2(\lambda)\}$ telle que

$$(5. 7) \quad Xw = \Theta_2(e^{it})w(t) \quad \text{pour tout } w \in L^2(\mathfrak{F});$$

on a fait ici usage de ce que, grâce au choix particulier des sous-espaces ambulants

\mathbb{E}_* et \mathfrak{F} , on a $\Phi^{\mathbb{E}_*}u = u$ pour $u \in L^2(\mathbb{E}_*)$ et $\Phi^{\mathfrak{F}}v = v$ pour $v \in L^2(\mathfrak{F})$. En particulier, pour $w = \Theta_1 v$ ($v \in L^2(\mathbb{E})$), (5. 6) et (5. 7) entraînent

$$\Theta(e^{it})v(t) = \Theta_2(e^{it})\Theta_1(e^{it})v(t) \quad \text{p. p. ;}$$

vu que v est arbitraire et que l'espace \mathbb{E} est séparable, cela donne

$$\Theta(e^{it}) = \Theta_2(e^{it})\Theta_1(e^{it}) \quad \text{p. p.,}$$

d'où il résulte la relation (5. 5); cf. note ¹⁴).

Ad b). Lorsque dans (5. 4) il y a égalité p. p., X est isométrique. Par conséquent, en vertu du point c) du lemme du n°2, la fonction $\Theta_2(\lambda)$ est intérieure. Si de plus la fonction $\Theta(\lambda)$ est extérieure, on a $XH^2(\mathfrak{F}) = X\Theta_1 H^2(\mathbb{E}) = \Theta H^2(\mathbb{E}) = H^2(\mathbb{E}_*)$, d'où

$$X\mathfrak{F} = X[H^2(\mathfrak{F}) \ominus V^* H^2(\mathfrak{F})] = H^2(\mathbb{E}_*) \ominus U_*^* H^2(\mathbb{E}_*) = \mathbb{E}_*$$

donc $X|\mathfrak{F}$ applique \mathfrak{F} unitairement sur \mathbb{E}_* . Par suite, en vertu du point b) du lemme, la fonction $\Theta_2(\lambda)$ est constante unitaire.

Remarque. Les propositions 5. 1 et 5. 2 nous permettent d'obtenir une factorisation en facteurs extérieur et intérieur de toute fonction analytique contractive $\{\mathbb{E}, \mathbb{E}_*, \Theta(\lambda)\}$. En effet, il existe, en vertu de la proposition 5. 1, une fonction analytique contractive *extérieure* $\{\mathbb{E}, \mathfrak{F}, \Theta_e(\lambda)\}$ telle que

$$\Theta_e(e^{it})^* \Theta_e(e^{it}) = \Theta(e^{it})^* \Theta(e^{it}) \quad \text{p. p.}$$

En appliquant ensuite la proposition 5. 2 on obtient qu'il existe une fonction analytique *intérieure* $\{\mathfrak{F}, \mathbb{E}_*, \Theta_i(\lambda)\}$ telle que

$$\Theta(\lambda) = \Theta_i(\lambda)\Theta_e(\lambda) \quad (|\lambda| < 1).$$

C'est ce qu'on appellera la *factorisation canonique* de $\Theta(\lambda)$ en facteurs extérieur $\Theta_e(\lambda)$ et intérieur $\Theta_i(\lambda)$. Elle est déterminée de manière univoque dans le sens que si $\Theta(\lambda) = \Theta_i(\lambda)\Theta'_e(\lambda)$ est une factorisation de même type, avec un espace intermédiaire \mathfrak{F}' peut-être différent, il existe une application unitaire Z de \mathfrak{F} sur \mathfrak{F}' telle que

$$\Theta'_e(\lambda) = Z\Theta_e(\lambda) \quad \text{et} \quad \Theta'_i(\lambda) = \Theta_i(\lambda)Z^{-1} \quad (|\lambda| < 1).$$

Cela s'ensuit aussitôt de la proposition 5. 2, b).

Proposition 5. 3. Soit $\{\mathbb{E}, \mathbb{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ une fonction analytique contractive **-extérieure*, c'est-à-dire telle que la fonction $\{\mathbb{E}_*, \mathbb{E}, \Theta^{\sim}(\lambda)\}$, où $\Theta^{\sim}(\lambda) = \Theta(\bar{\lambda})^*$, est extérieure, et posons $N(t) = [\Theta(e^{it})^* \Theta(e^{it})]^{\frac{1}{2}}$. Soit α un ensemble mesurable dans l'intervalle $[0, 2\pi)$ et définissons

$$N_\alpha(t) = I_{\mathbb{E}} \text{ dans } \alpha \quad \text{et} \quad N_\alpha(t) = N(t) \text{ dans } \alpha' = [0, 2\pi) - \alpha.$$

Il existe alors deux fonctions analytiques contractives, $\{\mathbb{E}, \mathfrak{F}, \Theta_1(\lambda)\}$ et $\{\mathfrak{F}, \mathbb{E}_*, \Theta_2(\lambda)\}$, dont la première est extérieure, telles qu'on ait

$$(5. 8) \quad N_\alpha(t) = [\Theta_1(e^{it})^* \Theta_1(e^{it})]^{1/2} \quad \text{p. p.}$$

et

$$(5. 9) \quad \Theta(\lambda) = \Theta_2(\lambda)\Theta_1(\lambda);$$

de plus cette factorisation de $\Theta(\lambda)$ vérifie la condition (ii) du théorème 1. Dans le

cas où la fonction $\{\mathbb{E}, \mathbb{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ n'est pas intérieure, l'ensemble α peut être choisi de façon que $\Theta(e^{it})$ ne soit pas isométrique aux points d'un ensemble de mesure positive dans α ainsi que d'un ensemble de mesure positive dans α' ; la factorisation obtenue vérifie alors aussi la condition (i).

Démonstration. Puisque $N_\alpha(t) \cong N(t)$ partout, on a $\|N_\alpha v\|_{L^2(\mathbb{E})} \cong \|Nv\|_{L^2(\mathbb{E})} = \|\Theta v\|_{L^2(\mathbb{E}_*)}$ pour $v \in L^2(\mathbb{E})$, donc on définit par

$$(5.10) \quad Y(N_\alpha v) = \Theta v \quad (v \in L^2(\mathbb{E}))$$

une contraction Y de $N_\alpha L^2(\mathbb{E})$ dans $L^2(\mathbb{E}_*)$, qui s'étend par continuité à une contraction de $\overline{N_\alpha L^2(\mathbb{E})}$ dans $L^2(\mathbb{E}_*)$. En désignant par U^\times et U_*^\times l'opérateur de la multiplication par e^{it} dans $L^2(\mathbb{E})$ et $L^2(\mathbb{E}_*)$, suivant les cas, il résulte de (5.10) que $YU^\times = U_*^\times Y$ dans $\overline{N_\alpha L^2(\mathbb{E})}$. On en déduit la relation

$$Y \bigcap_{n \geq 0} \overline{U^{\times n} N_\alpha H^2(\mathbb{E})} \subseteq \bigcap_{n \geq 0} \overline{U_*^{\times n} \Theta H^2(\mathbb{E})} \subseteq \bigcap_{n \geq 0} \overline{U_*^{\times n} H^2(\mathbb{E}_*)} = \{0\}.$$

Afin d'établir la condition (5.1) pour $N_\alpha(t)$, il ne reste donc qu'à démontrer que le seul élément $w \in \overline{N_\alpha L^2(\mathbb{E})}$ pour lequel $Yw=0$, est $w=0$. Cela revient à démontrer que si $\{v_n\}$ est une suite d'éléments de $L^2(\mathbb{E})$ telle que

$$N_\alpha v_n \rightarrow w \quad \text{et} \quad \Theta v_n \rightarrow 0 \quad (\text{convergences } L^2),$$

alors $w=0$. En remplaçant la suite au besoin par une suite partielle¹⁹⁾ on aura même

$$N_\alpha(t)v_n(t) \rightarrow w(t) \quad \text{et} \quad \Theta(e^{it})v_n(t) \rightarrow 0 \quad \text{p. p.}$$

Ainsi, on a p. p. dans α

$$\Theta(e^{it})w(t) = \Theta(e^{it}) \lim_n N_\alpha(t)v_n(t) = \Theta(e^{it}) \lim_n v_n(t) = \lim_n \Theta(e^{it})v_n(t) = 0$$

et p. p. dans α'

$$\|\Theta(e^{it})w(t)\| \leq \|w(t)\| = \lim_n \|N_\alpha(t)v_n(t)\| = \lim_n \|\Theta(e^{it})v_n(t)\| = 0,$$

donc

$$\Theta(e^{it})w(t) = 0 \quad \text{p. p.}$$

et par conséquent

$$(5.11) \quad \int_0^{2\pi} (w(2\pi-t), \Theta^\sim(e^{it})v(t))_{\mathbb{E}} dt = \int_0^{2\pi} (\Theta(e^{-it})w(2\pi-t), v(t))_{\mathbb{E}_*} dt = 0$$

pour toute fonction $v \in L^2(\mathbb{E}_*)$. Comme Θ^\sim est extérieure, $\Theta^\sim H^2(\mathbb{E}_*)$ est dense dans $H^2(\mathbb{E})$ et par conséquent $\Theta^\sim L^2(\mathbb{E}_*)$ est dense dans $L^2(\mathbb{E})$, donc (5.11) entraîne $w(2\pi-t) = 0$ p. p., donc $w=0$.

En vertu de la proposition 5.1 il existe donc une fonction analytique contractive extérieure $\{\mathbb{E}, \mathfrak{F}, \Theta_1(\lambda)\}$ telle que $N_\alpha(t) = [\Theta_1(e^{it})^* \Theta_1(e^{it})]^\dagger$ p. p., et puisque $N_\alpha(t) \cong N(t)$ il existe en vertu de la proposition 5.2 une fonction analytique contractive $\{\mathfrak{F}, \mathbb{E}_*, \Theta_2(\lambda)\}$ telle que $\Theta = \Theta_2 \Theta_1$.

¹⁹⁾ Notamment telle que $\sum_n \|N_\alpha v_n - w\| < \infty$ et $\sum_n \|\Theta v_n\| < \infty$.

Cette factorisation de $\Theta(\lambda)$ vérifie (ii). En effet, on a

$$\begin{aligned}\Theta_1(e^{it})^* \Delta_2(t)^2 \Theta_1(e^{it}) &= \Theta_1(e^{it})^* [I - \Theta_2(e^{it})^* \Theta_2(e^{it})] \Theta_1(e^{it}) = \\ &= N_\alpha(t)^2 - N(t)^2 = O \quad \text{p. p. dans } \alpha'\end{aligned}$$

et

$$\Delta_1(t)^2 = I_{\mathbb{E}} - \Theta_1(e^{it})^* \Theta_1(e^{it}) = I_{\mathbb{E}} - N_\alpha(t)^2 = O \quad \text{p. p. dans } \alpha,$$

donc

$$(5.12) \quad \Delta_2(t) \Theta_1(e^{it}) = O \quad \text{p. p. dans } \alpha' \quad \text{et} \quad \Delta_1(t) = O \quad \text{p. p. dans } \alpha.$$

Soient v_1, v_2 deux fonctions quelconques dans $L^2(\mathbb{E})$ et posons

$$(5.13) \quad v(t) = v_1(t) \quad \text{dans } \alpha' \quad \text{et} \quad v(t) = v_2(t) \quad \text{dans } \alpha;$$

on aura alors $v \in L^2(\mathbb{E})$ et, en vertu de (5.12) et (5.13),

$$\Delta_2(t) \Theta_1(e^{it}) v(t) \oplus \Delta_1(t) v(t) = \Delta_2(t) \Theta_1(e^{it}) v_2(t) \oplus \Delta_1(t) v_1(t) \quad \text{p. p.}$$

ou en bref

$$(5.14) \quad \Delta_2 \Theta_1 v \oplus \Delta_1 v = \Delta_2 \Theta_1 v_2 \oplus \Delta_1 v_1.$$

Comme Θ_1 est extérieure, $\Theta_1 H^2(\mathbb{E})$ est dense dans $H^2(\mathbb{E})$ et par conséquent $\Theta_1 L^2(\mathbb{E})$ est dense dans $L^2(\mathbb{E})$. Lorsque v_1 et v_2 varient dans $L^2(\mathbb{E})$, le second membre de (5.14) parcourt donc un ensemble dense dans $\Delta_2 L^2(\mathbb{E}) \oplus \Delta_1 L^2(\mathbb{E})$, ce qui achève la démonstration de ce que la condition (ii) est vérifiée.

En cas où la fonction $\Theta(\lambda)$ n'est pas intérieure, il existe par définition un ensemble ρ de mesure positive dans $[0, 2\pi)$, aux points duquel $N(t) \neq I_{\mathbb{E}}$; on peut donc choisir α de sorte que $\alpha \cap \rho$ et $\alpha' \cap \rho$ soient de mesure positive. Montrons qu'aucune des fonctions $\Theta_1(\lambda), \Theta_2(\lambda)$ n'est alors une constante unitaire. En effet, si $\Theta_2(\lambda)$ était une constante unitaire, on aurait

$$\|N(t)e\| = \|\Theta(e^{it})e\| = \|\Theta_1(e^{it})e\| = \|N_\alpha(t)e\| \quad \text{pour tout } e \in \mathbb{E}, \text{ p. p.,}$$

et par conséquent $N(t) = N_\alpha(t)$ p. p., ce qui n'est certainement pas le cas pour $t \in \alpha \cap \rho$. De même, si $\Theta_1(\lambda)$ était une constante unitaire, (5.8) entraînerait $N_\alpha(t) = I_{\mathbb{E}}$ p. p., ce qui n'est pas le cas pour $t \in \alpha' \cap \rho$.

Cela achève la démonstration de la proposition.

2. Pour les fonctions numériques $\Theta(\lambda)$, analytiques et bornées dans le disque unité et telles que $\Theta(\lambda) \neq 0$, $\log|\Theta(e^{it})|$ est intégrable (théorème de SZEGÖ), de plus on a l'inégalité²⁰⁾

$$\log|\Theta(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|\Theta(e^{it})| dt$$

où l'égalité a lieu si la fonction $\Theta(\lambda)$ est extérieure et dans ce cas seulement²¹⁾. Ces faits s'étendent aux fonctions à valeurs opérateurs de la façon suivante:

²⁰⁾ Admettant la valeur $-\infty$ pour le premier membre.

²¹⁾ Cf. [6], p. 52 et p. 62.

Proposition 5.4. a) *Pour toute fonction analytique contractive $\{\mathbb{C}, \mathbb{C}_*, \Theta(\lambda)\}$ et pour tout $f \in \mathbb{C}$ tel que $\Theta(\lambda)f \neq 0$, la fonction $\log \|\Theta(e^{it})f\|$ est intégrable et on a l'inégalité²⁰⁾*

$$(5.15) \quad \log \|\Theta(0)f\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|\Theta(e^{it})f\| dt.$$

b) *Pour que dans (5.15) on ait égalité pour tout f tel que $\Theta(\lambda)f \neq 0$, il faut et il suffit que dans la factorisation canonique de $\Theta(\lambda)$ le facteur intérieur soit constant. Dans ce cas on a même*

$$(5.16) \quad -\infty < \log \|\Theta(\lambda)f\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \tau - t) \log \|\Theta(e^{it})f\| dt \quad (\lambda = re^{it}, 0 \leq r < 1)$$

pour tout f tel que $\Theta(\lambda)f \neq 0$; $P(r, t)$ est le noyau de Poisson.

Démonstration. Envisageons une fonction analytique contractive extérieure $\{\mathbb{C}, \mathbb{C}_*, \Theta(\lambda)\}$ et posons

$$N(t) = [\Theta(e^{it})^* \Theta(e^{it})]^{1/2}.$$

Soit Z l'application isométrique de $\Theta H^2(\mathbb{C})$ dans $NH^2(\mathbb{C})$ définie par

$$Z\Theta u = Nu \quad (u \in H^2(\mathbb{C})).$$

Puisque Θ est extérieure, Z se prolonge par continuité en une application unitaire de $H^2(\mathbb{C}_*)$ sur $\mathfrak{N} = NH^2(\mathbb{C})$. En désignant par U^* et U_*^* l'opérateur de multiplication par e^{it} dans \mathfrak{N} et $H^2(\mathbb{C}_*)$, selon les cas, on a évidemment $ZU_*^* = U^*Z$ et par suite (grâce à ce que Z est unitaire)

$$Z(I - U_*^* U_*^{**}) = (I - U^* U^{**})Z.$$

Mais comme pour tout $u(\lambda) \in H^2(\mathbb{C}_*)$ on a évidemment

$$(I - U_*^* U_*^{**})u = u(0),$$

on obtient en particulier

$$(5.17) \quad Z[\Theta(0)f] = (I - U^* U^{**})Z\Theta f = (I - U^* U^{**})Nf \quad (f \in \mathbb{C}).$$

Ici, le dernier membre est la projection orthogonale de Nf sur $\mathfrak{N} \ominus U^* \mathfrak{N}$, projection que nous désignerons par P_f . Puisque Z est unitaire, il résulte de (5.17):

$$(5.18) \quad \|\Theta(0)f\| = \|P_f\|.$$

Désignons par \mathfrak{N}_f le sous-espace de \mathfrak{N} sous-tendu par les éléments

$$U^{*n}Nf \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

on a en particulier $Nf \in \mathfrak{N}_f$. Soit p_f la projection orthogonale de Nf sur $\mathfrak{N}_f \ominus U^* \mathfrak{N}_f$. Nous allons montrer que

$$(5.19) \quad P_f = p_f.$$

Comme on a

$$Nf - p_f \in U^* \mathfrak{N}_f \subseteq U^* \mathfrak{N},$$

il n'y a qu'à prouver, à cet effet, que $p_f \perp U^* \mathfrak{N}$. Dans ce but observons d'abord que $U^{*n} Nf \in U^* \mathfrak{N}_f$ ($n=1, 2, \dots$) et par suite

$$(5.20) \quad (p_f, U^{*n} Nf) = 0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

Introduisons pour tout $n=1, 2, \dots$ la forme sesquilinéaire

$$[f_1, f_2]_n = (p_{f_1}, U^{*n} Nf_2) \quad (f_1, f_2 \in \mathfrak{E}).$$

En vertu de (5.20) on a $[f, f]_n = 0$ pour tout $f \in \mathfrak{E}$, d'où

$$4[f_1, f_2]_n = [f_1 + f_2, f_1 + f_2]_n - [f_1 - f_2, f_1 - f_2]_n + \\ + i[f_1 + if_2, f_1 + if_2]_n - i[f_1 - if_2, f_1 - if_2]_n = 0 \quad (f_1, f_2 \in \mathfrak{E}),$$

donc

$$(p_f, U^{*n} Ng) = 0 \quad (f, g \in \mathfrak{E}; n=1, 2, \dots).$$

Or, les éléments $U^{*n} Ng$ ($g \in \mathfrak{E}; n=1, 2, \dots$) sous-tendent $U^* \mathfrak{N}$, donc p_f est orthogonal à $U^* \mathfrak{N}$ pour tout $f \in \mathfrak{E}$, ce qui achève la démonstration de (5.19).

Soit maintenant $f \in \mathfrak{E}$ tel que $\Theta(0)f \neq 0$. En vertu de (5.18) et (5.19) on a alors $p_f \neq 0$. D'autre part, en désignant par A_0 l'ensemble des polynômes numériques s'annulant à l'origine on a

$$0 \neq \|p_f\|^2 = \inf \{ \|Nf - g\|^2 : g \in U^* \mathfrak{N}_f \} = \inf \{ \|Nf - \varphi(U^*)Nf\|^2 : \varphi \in A_0 \} = \\ = \inf_{\varphi \in A_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |1 - \varphi(e^{it})|^2 \|N(t)f\|^2 dt.$$

Or, en vertu d'un théorème de SZEGŐ²²), ce dernier infimum est égal à

$$\exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|N(t)f\|^2 dt \right].$$

Par conséquent, en vertu de (5.18) et (5.19) on a

$$\log \|\Theta(0)f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|N(t)f\|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|\Theta(e^{it})f\|^2 dt,$$

ce qui montre en particulier que $\log \|\Theta(e^{it})f\|$ est intégrable et que (5.15) subsiste avec le signe d'égalité. Cela, répétons-le, pour toute fonction extérieure $\Theta(\lambda)$ et tout vecteur $f \in \mathfrak{E}$ tel que $\Theta(0)f \neq 0$.

Remplaçons la dernière condition par celle moins exigeante $\Theta(\lambda)f \neq 0$; il ne restreindra pas la généralité de supposer aussi que $\|f\|=1$. Désignons par A_f l'ensemble des points λ ($|\lambda| < 1$) où $\Theta(\lambda)f \neq 0$; puisque la fonction $\Theta(\lambda)f$ est analytique, l'ensemble A_f épuise le disque unité ouvert sauf peut-être un ensemble dénom-

²²) Cf. [6], p. 49.

brable de points, ne s'accumulant pas dans l'intérieur du disque. Pour $|\lambda_1| < 1$ envisageons la fonction

$$\Theta_1(\lambda) = \Theta((\lambda + \lambda_1)(1 + \bar{\lambda}_1\lambda)^{-1})$$

qui est aussi analytique contractive et même extérieure, conséquence du fait, facile à démontrer, que les homographies de type envisagé engendrent des transformations linéaires bicontinues des espaces H^2 en question sur eux-mêmes. Lorsque $\lambda_1 \in A_f$ on a $\Theta_1(0)f = \Theta(\lambda_1)f \neq 0$ et par conséquent

$$-\infty < \log \|\Theta_1(0)f\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|\Theta_1(e^{it})f\| dt,$$

d'où par la substitution

$$(e^{it} + \lambda_1)(1 + \bar{\lambda}_1 e^{it})^{-1} = e^{it}$$

il résulte

$$(5.21) \quad -\infty < \log \|\Theta(\lambda_1)f\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r_1, \tau_1 - t) \log \|\Theta(e^{it})f\| dt,$$

$P(r, t)$ étant le noyau de Poisson et $\lambda_1 = r_1 e^{i\tau_1}$. Puisque $\|f\| = 1$ entraîne $\log \|\Theta(e^{it})f\| \leq 0$, et comme, d'autre part,

$$(5.22) \quad \frac{1-r}{1+r} \leq P(r, t) \leq \frac{1+r}{1-r} \quad (0 \leq r < 1),$$

de (5.21) on déduit que

$$-\infty < \frac{1}{2\pi} \frac{1-r_1}{1+r_1} \int_0^{2\pi} \log \|\Theta(e^{it})f\| dt,$$

donc $\log \|\Theta(e^{it})f\|$ est intégrable. Cela entraîne, à son tour, que le troisième membre de (5.21) est une fonction finie et continue de $\lambda_1 = r_1 e^{i\tau_1}$ dans tout l'intérieur du cercle unité. Comme $\|\Theta(\lambda_1)f\|$ aussi est fonction continue de λ_1 , la relation (5.21), démontrée pour $\lambda_1 \in A_f$, s'étend par continuité à tout $\lambda_1, |\lambda_1| < 1$. Cela prouve (5.16) pour toute fonction $\Theta(\lambda)$ extérieure et tout f tel que $\Theta(\lambda)f \neq 0$ et $\|f\| = 1$; la dernière condition peut être omise en envisageant $f/\|f\|$ au lieu de f .

Passons au cas d'une fonction analytique contractive quelconque $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$. Soit $\Theta(\lambda) = \Theta_i(\lambda)\Theta_e(\lambda)$ sa factorisation canonique en facteurs extérieur $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}; \Theta_e(\lambda)\}$ et intérieur $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{E}_*, \Theta_i(\lambda)\}$. Pour $f \in \mathfrak{E}$ tel que $\Theta(\lambda)f \neq 0$ on a aussi $\Theta_e(\lambda)f \neq 0$ et par suite la fonction $\log \|\Theta(e^{it})f\|$, étant égale p. p. à la fonction $\log \|\Theta_e(e^{it})f\|$, est intégrable et de plus

$$(5.23) \quad \|\Theta(0)f\| = \|\Theta_i(0)\Theta_e(0)f\| \leq \|\Theta_e(0)f\| = \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|\Theta(e^{it})f\| dt \right].$$

La condition $\Theta(\lambda)f \neq 0$ étant équivalente à la condition $\Theta_e(\lambda)f \neq 0$, et celle-ci, en vertu de ce qui précède, équivalente à la condition $\Theta_e(0)f \neq 0$, on aura

égalité dans (5. 23) pour tout f tel que $\Theta(\lambda)f \neq 0$ si, et seulement si l'on a l'égalité

$$(5. 24) \quad \|\Theta_i(0)\Theta_e(0)f\| = \|\Theta_e(0)f\|$$

pour tout f tel que $\Theta_e(0)f \neq 0$. Comme l'égalité (5. 24) est évidemment vérifiée si $\Theta_e(0)f = 0$, elle doit être valable pour tout $f \in \mathfrak{E}$. Or, $\Theta_e(\lambda)$ étant extérieure, on a

$$(5. 25) \quad \overline{\Theta_e(0)\mathfrak{E}} = \mathfrak{F}.^{23)}$$

Par conséquent, pour que (5. 24) subsiste pour tout $f \in \mathfrak{E}$, il faut et il suffit que $\|\Theta_i(0)g\| = \|g\|$ subsiste pour tout $g \in \mathfrak{F}$. Or, cette condition est évidemment vérifiée si $\Theta_i(\lambda)$ est une constante isométrique et il résulte de la proposition 4. 1 qu'elle est vérifiée dans ce cas seulement. Cela achève la démonstration de la proposition 5. 4.

Proposition 5. 5. Soit $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ extérieure. a) Pour un $f \in \mathfrak{E}$, la fonction $\Theta(\lambda)f$ s'annule ou bien en chaque point λ ($|\lambda| < 1$) ou bien en aucun. b) $\Theta(\lambda)$ admet une inverse au sens strict²⁴⁾ ou bien en chaque point λ ($|\lambda| < 1$) ou bien en aucun.

Démonstration. a) est évident de ce qui précède. Quant à b), observons d'abord que (5. 16) et (5. 22) entraînent

$$-\infty < \frac{1+r}{1-r} \log \|\Theta(0)f\| \leq \log \|\Theta(\lambda)f\| \leq \frac{1-r}{1+r} \log \|\Theta(0)f\| \quad (|\lambda| = r < 1)$$

pour tout $f \in \mathfrak{E}$ tel que $\|f\| = 1$ et $\Theta(\lambda)f \neq 0$, d'où il résulte que, dans les mêmes conditions,

$$\log \|\Theta(\lambda_1)f\| \leq \frac{1-r_1}{1+r_1} \frac{1-r_2}{1+r_2} \log \|\Theta(\lambda_2)f\| \quad \text{pour } |\lambda_i| = r_i < 1 \quad (i = 1, 2).$$

Supposons que $\Theta(\lambda_1)^{-1}$ existe au sens strict. On a alors pour tout $f \in \mathfrak{E}$ tel que $\|f\| = 1$ et pour tout λ_2

$$(5. 26) \quad \|\Theta(\lambda_1)^{-1}\|^{-1} = \inf_{\|g\|=1} \|\Theta(\lambda_1)g\| \leq \|\Theta(\lambda_1)f\| \leq \|\Theta(\lambda_2)f\|^{e_{12}}$$

où

$$e_{12} = \frac{1-r_1}{1+r_1} \frac{1-r_2}{1+r_2}.$$

D'autre part, pour toute fonction extérieure $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ on a

$$(5. 27) \quad \overline{\Theta(\lambda)\mathfrak{E}} = \mathfrak{E}_* \quad (|\lambda| < 1).^{25)}$$

Les relations (5. 26) et (5. 27) entraînent que $\Theta(\lambda_2)^{-1}$ existe aussi, au sens strict, et que

$$(5. 28) \quad \|\Theta(\lambda_2)^{-1}\| \leq \|\Theta(\lambda_1)^{-1}\|^{1/e_{12}}.$$

Ainsi, le point b) de la proposition 5. 5 est démontré.

²³⁾ En effet, $g \in \mathfrak{F}$ et $g \perp \Theta_e(0)\mathfrak{E}$ entraînent que la fonction constante $g(\lambda) \equiv g$ est orthogonale dans $H^2(\mathfrak{F})$ à $\Theta_e H^2(\mathfrak{E})$.

²⁴⁾ C'est-à-dire une inverse définie partout dans \mathfrak{E}_* et bornée.

²⁵⁾ Cette proposition se réduit au cas $\lambda=0$, envisagé plus haut (5. 25), par une homographie.

Proposition 5. 6. Soit $\{\mathbb{C}, \mathbb{C}_*, \Theta(\lambda)\}$ une fonction analytique extérieure telle que $\Theta(0)^{-1}$ existe au sens strict et que $\Theta(e^{it})$ soit isométrique pour presque tous les points e^{it} , d'un arc ω de la circonférence unité. On peut alors prolonger $\Theta(\lambda)$ analytiquement au travers de ω à tout l'extérieur du cercle unité.

Démonstration. Commençons par le suivant complément à la relation (5. 27): Pour toute fonction extérieure $\{\mathbb{C}, \mathbb{C}_*, \Theta(\lambda)\}$ on a

$$(5. 29) \quad \overline{\Theta(e^{it})\mathbb{C}} = \mathbb{C}_* \text{ p. p.}$$

En effet, de $\overline{\Theta H^2(\mathbb{C})} = H^2(\mathbb{C}_*)$ il s'ensuit en particulier que pour toute fonction constante $e_*(t) = e_* \in \mathbb{C}_*$ il existe une suite d'éléments $u_n \in H^2(\mathbb{C})$ telle que $\Theta u_n \rightarrow e_*$ dans $H^2(\mathbb{C}_*)$; en passant au besoin à une suite partielle on aura même $\Theta(e^{it})u_n(e^{it}) \rightarrow e_*$ p. p. Grâce à ce que \mathbb{C}_* est séparable il en résulte (5. 29).

De cette manière (5. 29) et notre hypothèse que $\Theta(e^{it})$ est isométrique p. p. sur ω entraînent que $\Theta(e^{it})$ y est même unitaire p. p.

Observons ensuite que si pour un $f \in \mathbb{C}$ on a $\Theta(\lambda)f \equiv 0$, on a aussi $\Theta(e^{it})f = 0$ p. p. sur ω , donc $f = 0$. Ainsi, on peut appliquer (5. 16) pour tout $f \in \mathbb{C}, f \neq 0$. En désignant

$$\varepsilon(\lambda) = \sup \{P(r, \tau - t) : e^{it} \notin \omega\} \quad (\lambda = re^{it}, 0 \leq r < 1)$$

on aura donc pour tout $f \in \mathbb{C}, \|f\| = 1$

$$\begin{aligned} \log \|\Theta(\lambda)f\| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \tau - t) \log \|\Theta(e^{it})f\| dt = {}^{26)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int'' P(r, \tau - t) \log \|\Theta(e^{it})f\| dt \cong \varepsilon(\lambda) \frac{1}{2\pi} \int'' \log \|\Theta(e^{it})f\| dt = \\ &= \varepsilon(\lambda) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|\Theta(e^{it})f\| dt = \varepsilon(\lambda) \log \|\Theta(0)f\| \end{aligned}$$

d'où

$$\|\Theta(\lambda)f\| \cong \|\Theta(0)f\|^{e(\lambda)} \cong \inf_{\|g\|=1} \|\Theta(0)g\|^{e(\lambda)} = \|\Theta(0)^{-1}\|^{-e(\lambda)}$$

et par conséquent

$$(5. 30) \quad \|\Theta(\lambda)^{-1}\| \cong \|\Theta(0)^{-1}\|^{e(\lambda)} \quad (|\lambda| < 1).$$

Envisageons la fonction $\Phi(\lambda) = [\Theta(\bar{\lambda})^{-1}]^*$ qui est, ainsi que $\Theta(\lambda)^{-1}$, analytique pour $|\lambda| < 1$. (5. 30) entraîne

$$(5. 31) \quad \|\Phi(\lambda)\| \cong \|\Theta(0)^{-1}\|^{e(\bar{\lambda})}.$$

Soit ω^* l'image de l'arc ω par rapport à l'axe réel; soit ω_1^* un arc fermé dans l'intérieur de ω^* et soit G le domaine limité par ω_1^* et la corde correspondante. Comme $e(\bar{\lambda})$ est une fonction bornée de λ dans G , (5. 31) entraîne que $\Phi(\lambda)$ est une fonction analytique bornée dans G . En se servant d'une représentation conforme de G sur

²⁶⁾ On désignera par \int' l'intégrale prise sur l'ensemble des points $t \in (0, 2\pi)$ tels que $e^{it} \notin \omega$.

le disque unité et en appliquant le théorème de Fatou sous sa forme vectorielle²⁷⁾ à la fonction transformée, puis en revenant à la fonction initiale $\Phi(\lambda)$, on obtient que celle-ci admet une limite forte non-tangentielle p. p. sur ω^* et par conséquent p. p. sur ω^* .

Soit $\Omega(\lambda) = \Theta(\lambda)$ pour $|\lambda| < 1$ et $\Omega(\lambda) = \Phi(1/\lambda)$ pour $|\lambda| > 1$. D'après ce que nous venons de voir,

$$\Omega_+(e^{it}) = \lim_{R \rightarrow 1+0} \Omega(Re^{it}) = \lim_{R \rightarrow 1+0} \Phi\left(\frac{1}{R} e^{-it}\right)$$

existe au sens fort p. p. sur ω . D'autre part, pour $r \rightarrow 1-0$ on a

$$I = \Theta(re^{it})^* \Theta(re^{it})^{*-1} = \Theta(re^{it})^* \Phi(re^{-it}) = \Theta(re^{it})^* \Omega\left(\frac{1}{r} e^{it}\right) \rightarrow \Theta(e^{it})^* \Omega_+(e^{it})$$

au sens faible, p. p. sur ω , donc $I = \Theta(e^{it})^* \Omega_+(e^{it})$ p. p. sur ω ; comme $\Theta(e^{it})$ est unitaire p. p. sur ω , il résulte que

$$(5.32) \quad \Omega_-(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1-0} \Omega(re^{it}) = \Theta(e^{it}) = \Omega_+(e^{it}) \quad \text{p. p. sur } \omega.$$

Puisque $\Omega(\lambda)$ est analytique dans l'intérieur du cercle unité ainsi que dans son extérieur, de (5.32) on conclut de la manière familière (principe de réflexion de Schwarz) que les deux parties de $\Omega(\lambda)$ se rattachent analytiquement au travers de l'arc ω . Cela achève la démonstration de la proposition 5.6.

6. Existence et propriétés spectrales des sous-espaces invariants pour certaines classes de contractions

1. Rappelons que dans [VII] on a introduit les suivantes classes des contractions complètement non-unitaires:

$T \in C_0$. si $T^n f \rightarrow 0$ pour toute f ; $T \in C_1$. si $T^n f \rightarrow 0$ pour aucun $f \neq 0$;

$T \in C_{.0}$ si $T^{*n} f \rightarrow 0$ pour toute f ; $T \in C_{.1}$ si $T^{*n} f \rightarrow 0$ pour aucun $f \neq 0$;

et

$$C_{\alpha\beta} = C_\alpha \cap C_{.\beta} \quad (\alpha, \beta = 0, 1).$$

Toute contraction complètement non-unitaire admet des triangulations de types

$$(a) \quad \begin{pmatrix} C_{0.} & * \\ O & C_{1.} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (a') \quad \begin{pmatrix} C_{.1} & * \\ O & C_{.0} \end{pmatrix}$$

où dans la diagonale on a indiqué seulement la classe de l'opérateur et on a admis l'opérateur O de l'espace $\{0\}$ comme appartenant à toutes ces classes.

Ainsi, de nombreux problèmes pour les contractions, y compris celui sur les sous-espaces invariants, se réduisent aux cas particuliers des contractions appartenant à une de nos classes. Nous allons montrer comment les résultats des nos pré-

²⁷⁾ Cf. [VIII], § 1, pour l'existence des limites radiales, d'où l'on passe aux limites non-tangentes de la façon familière.

cédents permettent l'étude des classes $C_{.1}$, $C_{1.}$, C_{11} . D'ailleurs chaque résultat pour l'une des classes $C_{.1}$ et $C_{1.}$ porte aussi pour l'autre: il n'y a qu'à considérer T^* au lieu de T .

Théorème 2. Soit $T \in C_{.1}$. a) *Le spectre $\sigma(T)$ ou bien ne contient aucun point à l'intérieur du cercle unité, ou bien coïncide avec le disque unité fermé. De plus, dans le deuxième cas, ou bien chaque point à l'intérieur du cercle unité est une valeur propre de T , ou bien aucun. Toutes les situations mentionnées se présentent actuellement.* b) *Dans le cas où du moins un des indices de défaut $\delta_T = \dim(I - T^*T)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{H}$, $\delta_{T^*} = \dim(I - TT^*)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{H}$ est fini, ou bien chaque point à l'intérieur du cercle unité est une valeur propre de T , ou bien aucun tel point n'appartient à $\sigma(T)$.*

Démonstration. En vertu de [VIII], Corollaire à p. 58, $T \in C_{.1}$ veut dire que la fonction caractéristique de T est extérieure. Les premières deux assertions du théorème sont alors des conséquences immédiates de la proposition 5.5 du n° précédent et du théorème 4 de [VIII]. Quant à la dernière assertion de a), remarquons d'abord que la fonction numérique $\frac{1}{2}(\lambda - 1)$ est analytique contractive pure *extérieure* (cf. [VI], p. 146). La contraction dont la fonction caractéristique coïncide avec celle-ci, aura comme spectre la circonférence unité (cf. th. 4 de [VIII]). D'autre part, dans [VIII], p. 63, on a construit une contraction $T \in C_{11}$ dont le spectre coïncide avec le disque unité fermé et qui évidemment n'a pas de valeur propre (conséquence de ce que $T \in C_{.1}$). Enfin, on construit une contraction $T \in C_{.1}$ telle que chaque point à l'intérieur du cercle unité soit une valeur propre de T , de la manière suivante. Soit $\{E^2, E^1, \Theta(\lambda)\}$ définie par

$$\Theta(\lambda) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda - 1), & \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Il est manifeste que c'est une fonction analytique contractive pure. De plus elle est extérieure. En effet, nous avons

$$\Theta(\lambda) \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}u(\lambda) \\ \sqrt{2}u(\lambda) \end{pmatrix} = u(\lambda) \quad (u \in H^2),$$

ce qui montre que $\Theta H^2(E^2) = H^2 = H^2(E^1)$. Comme, pour chaque λ , $\Theta(\lambda)$ applique E^2 dans E^1 , $\Theta(\lambda)^{-1}$ ne peut exister, même pas au sens large. En vertu du th. 4 de [VIII], la contraction T correspondante, de classe $C_{.1}$, aura donc tout point λ ($|\lambda| < 1$) comme valeur propre.

Quant à b), il ne reste qu'à démontrer que tout point de $\sigma(T)$ à l'intérieur du cercle unité (s'il y en a) est une valeur propre de T . Dans ce but soit $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ la fonction caractéristique de T où l'un des espaces \mathfrak{E} et \mathfrak{E}_* est de dimension finie. Grâce à la relation (5.27) il résulte que \mathfrak{E}_* est alors nécessairement de dimension finie. Mais alors si $\Theta(\lambda)^{-1}$ existe au sens large, elle existe aussi au sens strict ce qui en vertu du th. 4 de [VIII] achève la démonstration du théorème 2.

2. Nous allons maintenant établir l'existence d'une variété de sous-espaces invariants pour une contraction T de l'espace $\mathfrak{H} \neq \{0\}$, telle que $T \in C_{11}$, et cela en relation avec les sous-espaces spectraux de la dilatation unitaire minimum U de T . Dans ce but, reprenons les notations du n° 1. En vertu du th. 3 de [VII], T est

quasi similaire²⁸) à la restriction U^0 de U à \mathfrak{R}_0 . Soit $\{E^0(\omega)\}$ la mesure spectrale de U^0 , étalée sur la circonférence unité.

Théorème 3. Soit $T \in C_{11}$. Pour chaque ensemble borélien β sur la circonférence unité, tel que $O \neq E^0(\beta) \neq I$, il existe un sous-espace non banal \mathfrak{H}_β de \mathfrak{H} , invariant pour T et tel que $T_\beta = T|_{\mathfrak{H}_\beta}$ est de classe C_{11} et quasi similaire à $U^0|_{E(\beta)\mathfrak{R}_0}$. Lorsque $E(\beta_1) \neq E(\beta_2)$, on a $\mathfrak{H}_{\beta_1} \neq \mathfrak{H}_{\beta_2}$.

Remarques. (i) D'après le th. 3 de [V], $\{E^0(\omega)\}$ est absolument continue. Ainsi, le théorème ci-dessus assure l'existence d'une variété riche de sous-espaces invariants pour $T \in C_{11}$.

(ii) Grâce aux triangulations (a) et (a') et à la remarque précédente il résulte aussitôt que pour toute contraction T d'un espace de Hilbert \mathfrak{H} de dimension > 1 , telle que ni T^n ni T^{*n} ne tendent pas vers O lorsque $n \rightarrow \infty$, il existe un sous-espace non banal invariant.²⁹)

Démonstration. Envisageons le modèle fonctionnel de T , donné par (3. 16)–(3. 17).³⁰) En vertu du n° 4 de [VIII] on aura alors

$$\mathfrak{R} = L^2(\mathfrak{C}_*) \oplus \overline{\Delta L^2(\mathfrak{C})}, \quad \mathfrak{R}_0 = \overline{\Delta L^2(\mathfrak{C})}$$

et U sera la multiplication par la fonction e^{it} . L'opérateur $\{E^0(\omega)\}$ sera, dans ce modèle, la multiplication par la fonction χ_ω où $\chi_\omega(t) = 1$ si $e^{it} \in \omega$ et $\chi_\omega(t) = 0$ ailleurs. Remarquons que ces faits subsistent pour toute contraction complètement non-unitaire, l'espace \mathfrak{R}_0 étant $\neq \{0\}$ si $T \notin C_{\cdot 0}$ et dans ce cas seulement (donc en particulier dans le cas qui nous occupe).

La condition $O \neq E^0(\beta) \neq I$ veut dire que l'ensemble des points t où $\Delta(t) \neq O$, c'est-à-dire où $\Theta(e^{it})$ n'est pas isométrique, a des parties de mesure positive dans $i_\beta = \{t: e^{it} \in \beta\}$ ainsi que dans $i'_\beta = [0, 2\pi] - i_\beta$. Ainsi, les conditions de la proposition 5. 3 sont vérifiées pour $\alpha = i_\beta$ (Θ est *-extérieure parce que $T \in C_{11} \subseteq C_{1\cdot}$). Soit $\Theta = \Theta_2 \Theta_1$ la factorisation correspondante (5. 9). En vertu du théorème 1, cette factorisation donne naissance à un sous-espace non banal \mathfrak{H}_β de \mathfrak{H} , invariant pour T . Soit $T_\beta = T|_{\mathfrak{H}_\beta}$. Puisque $T \in C_{1\cdot}$, on a aussi $T_\beta \in C_{1\cdot}$; et puisque la fonction caractéristique de T_β coïncide avec la partie pure de Θ_1 (proposition 4. 2) qui est évidemment extérieure ainsi que Θ_1 , on a $T_\beta \in C_{\cdot 1}$ (cf. [VIII], p. 58). Ainsi $T_\beta \in C_{11}$. En vertu du n° 4, § 2, et de ce que nous venons de remarquer, l'opérateur U_β^0 attaché à T_β (dans le même sens que U^0 était attaché à T) s'identifie à la multiplication par e^{it} dans $\overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{C})}$. Comme

$$\Delta_1(t) = O \text{ pour } t \in i_\beta \text{ et } \Delta_1(t) = \Delta(t) \text{ ailleurs,}$$

on aura

$$\overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{C})} = \chi_\beta \overline{\Delta L^2(\mathfrak{C})},$$

donc U_β^0 s'identifie à $U^0|_{E^0(\beta)\mathfrak{R}_0}$. Ainsi, comme $T_\beta \in C_{11}$, T_β est quasi similaire à $U^0|_{E^0(\beta)\mathfrak{R}_0}$. Cela achève la démonstration de la première assertion du théorème.

²⁸) Deux transformations linéaires bornées, A et B , sont quasi similaires lorsqu'il existe des transformations linéaires bornées X et Y , admettant des inverses à domaines denses (mais non nécessairement bornées) telles que

$$AX = XB \text{ et } BY = YB.$$

²⁹) La condition $\dim \mathfrak{H} > 1$ assure que cette proposition soit valable même dans le cas où T est unitaire.

³⁰) Nous maintenons les notations T, \mathfrak{R}, U etc. aussi dans le modèle envisagé.

Envisageons deux ensembles de type β , soit β_1 et β_2 , tels que $\mathfrak{H}_{\beta_1} = \mathfrak{H}_{\beta_2}$. Alors $T_{\beta_1} = T_{\beta_2}$ et par suite les opérateurs

$$U_1 = U^0|E^0(\beta_1)\mathfrak{R}_0 \text{ et } U_2 = U^0|E^0(\beta_2)\mathfrak{R}_0$$

sont quasi similaires: $U_1X = XU_2$, $YU_1 = U_2Y$. U_1 est un opérateur unitaire dans l'espace $\mathfrak{R}_1 = E^0(\beta_1)\mathfrak{R}_0$ et U_2 est un opérateur unitaire dans l'espace $\mathfrak{R}_2 = E^0(\beta_2)\mathfrak{R}_0$. Les mesures spectrales correspondantes sont

$$E_1(\omega) = E^0(\omega \cap \beta_1)|\mathfrak{R}_1 \text{ et } E_2(\omega) = E^0(\omega \cap \beta_2)|\mathfrak{R}_2.$$

En appliquant le théorème de FUGLEDE—PUTNAM [8] on obtient que $E_1(\omega)X = XE_2(\omega)$, $YE_1(\omega) = E_2(\omega)Y$. Puisque $E_2(\beta_2) = I_{\mathfrak{R}_2}$, on aura donc $YE_1(\beta_2) = Y$, d'où $E_1(\beta_2) = I_{\mathfrak{R}_1}$ et par conséquent $E^0(\beta_2 \cap \beta_1) = E^0(\beta_1)$. De manière analogue, $E^0(\beta_1 \cap \beta_2) = E^0(\beta_2)$. Ainsi, $E^0(\beta_1) = E^0(\beta_2)$. Cela achève la démonstration du théorème.

3. Les sous-espaces invariants \mathfrak{H}_β que nous venons de construire jouissent des propriétés spectrales additionnelles du moins dans le cas où le spectre de T ne recouvre pas la circonférence unité. A cet effet, démontrons d'abord le suivant

Théorème 4. *Soit $T \in C_{.1}$ telle que $\sigma(T)$ ne recouvre pas la circonférence unité. On a alors $\sigma(T) = \sigma(U^0)$.*

Démonstration. Puisque $T \in C_{.1}$, la fonction caractéristique $\Theta_T(\lambda)$ est extérieure. De plus, comme $\sigma(T)$ ne recouvre pas la circonférence unité, on déduit du théorème 2 que $\sigma(T)$ ne contient aucun point à l'intérieur de ce cercle, donc $\Theta_T(\lambda)^{-1}$ existe au sens strict pour tout λ ($|\lambda| < 1$). En vertu du th. 4 de [V] on a $\sigma(U^0) \subseteq \sigma(T)$; il ne reste donc qu'à montrer que si un arc ω de la circonférence unité est disjoint à $\sigma(U^0)$, il est disjoint aussi à $\sigma(T)$. Or, faisant usage du modèle fonctionnel de T et U^0 on voit que $\Delta_T(t) = O$, et par conséquent $\Theta_T(e^{it})$ est isométrique, en presque tous les points t tels que $e^{it} \in \omega$. En vertu de la proposition 5. 6, $\Theta_T(\lambda)$ peut alors être prolongée analytiquement au travers de l'arc ω , ce qui entraîne, d'après le th. 4 de [VIII], que ω appartient à l'ensemble résolvant de T . Cela achève la démonstration.

Des théorèmes 3 et 4 nous déduisons le suivant

Corollaire. *Soit $T \in C_{11}$ telle que $\sigma(T)$ ne recouvre pas la circonférence unité. Dans les conditions du théorème 3 on a alors $\sigma(T_\beta) \subseteq \bar{\beta}$.*

Démonstration. Pour $|\lambda| > 1$ on a

$$(6. 1) \quad (\lambda I_{\mathfrak{H}_\beta} - T_\beta)^{-1} = (\lambda I_{\mathfrak{H}} - T)^{-1}|_{\mathfrak{H}_\beta},$$

ce qu'on voit en envisageant les développements de Taylor autour du point à l'infini. Or, comme $\sigma(T)$ est un sous-ensemble propre de la circonférence unité, la fonction $(\lambda I_{\mathfrak{H}} - T)^{-1}$ se prolonge analytiquement au travers de certains arcs et il en sera de même pour la fonction (6. 1). Ainsi, $\sigma(T_\beta)$ ne recouvre pas la circonférence unité (on a même $\sigma(T_\beta) \subseteq \sigma(T)$). Comme de plus $T_\beta \in C_{11}$, on déduit du théorème 4 que $\sigma(T_\beta) = \sigma(U_\beta^0) = \sigma(U^0|E^0(\beta)\mathfrak{R}_0)$; or le spectre de $U^0|E^0(\beta)\mathfrak{R}_0$ est évidemment inclus dans $\bar{\beta}$, ce qui achève la démonstration du corollaire.

Ouvrages cités

- [V] B. SZ.-NAGY et C. FOIAŞ, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. V. Translations bilatérales, *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 106—129.
- [VI] B. SZ.-NAGY et C. FOIAŞ, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VI. Calcul fonctionnel, *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 130—167.
- [VII] B. SZ.-NAGY et C. FOIAŞ, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VII. Triangulations. Fonction minimum, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 12—37.
- [VIII] B. SZ.-NAGY et C. FOIAŞ, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VIII. Fonctions caractéristiques. Modèles fonctionnels, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 38—71.
- [1] B. SZ.-NAGY et C. FOIAŞ, Propriétés des fonctions caractéristiques, modèles triangulaires et une classification des contractions de l'espace de Hilbert, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **256** (1963), 3413—3415.
- [2] B. SZ.-NAGY et C. FOIAŞ, Une caractérisation des sous-espaces invariants pour une contraction de l'espace de Hilbert, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **258** (1964), 3426—3429.
- [3] М. С. Бродский—М. С. Лившиц, Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, *Успехи Матем. Наук*, **13:1** (79) (1958), 3—58.
- [4] Ю. Л. Шмульян, Некоторые вопросы теории операторов с конечным рангом неэрмитовости, *Матем. Сборник*, **57** (1962), 105—136.
- [5] Ю. Л. Шмульян, Операторы с вырожденной характеристической функции, *Доклады АН СССР*, **93** (1953), 985—988.
- [6] K. HOFFMAN, *Banach spaces of analytic functions* (Englewood Cliffs, N. J., 1962).
- [7] D. B. LOWDENSLAGER, On factoring matrix valued functions, *Annals of Math.*, **78** (1963), 450—454.
- [8] C. R. PUTNAM, On normal operators in Hilbert space, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 357—362.

(Reçu le 1 mai 1964)