Über die Gesamtheit der charakteristischen Funktionen im Hilbertschen Funktionenraum.

Von BÉLA v. SZ. NAGY in Szeged.

Einleitung.

Bedeute $\mathfrak{M}$ ein endliches oder unendliches Intervall auf der x-Achse. Die monoton wachsende Funktion $\alpha(x)$ erzeuge auf $\mathfrak{M}$ einen Lebesgue—Stieltjesschen Maß- und Integralbegriff.

Wir betrachten den Hilbertschen Funktionenraum $\mathfrak{L}_2$ aller solchen auf $\mathfrak{M}$ definierten Funktionen $f(x)$, welche in Bezug auf diesen Maßbegriff meßbar sind und für welche

$$\int_{\mathfrak{M}} |f(x)|^2 \, d\alpha(x)$$

endlich ist. Die Dimension von $\mathfrak{L}_2$ kann endlich oder abzählbar unendlich sein. Es ist wohlbekannt, daß der abstrakte gleichvieldimensionale Hilbertsche Raum $\mathfrak{H}$ eineindeutig, linear und isometrisch auf $\mathfrak{L}_2$ abbildbar ist. Unter der Isometrie dieser Abbildung versteht man bekanntlich Folgendes: Sind φ_1 und φ_2 irgend zwei Elemente von $\mathfrak{H}$ und sind $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ die ihr entsprechenden Funktionen in $\mathfrak{L}_2$, so gilt

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\mathfrak{M}} \varphi_1(x) \, \overline{\varphi_2(x)} \, d\alpha(x).$$

Diese Abbildung $\varphi \to \varphi(x)$ nennt man auch eine Verwirklichung des abstrakten Hilbertschen Raumes durch den mehr konkreten Funktionenraum $\mathfrak{L}_2$.

Ist m eine (im zugrunde gelegten Lebesgue – Stieltjesschen Sinne) meßbare Teilmenge[1]) von $\mathfrak{M}$, so gehört die charakteristi-

[1]) Unter einer meßbaren Menge werden wir nur eine solche verstehen, die ein endliches Maß hat.

sche Funktion von $\mathfrak{m}$, d. h. die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in \mathfrak{m} \\ 0 & \text{für} \quad x \in \mathfrak{M} - \mathfrak{m} \end{cases}$$

zu $\mathfrak{L}_2$.

Es kann nun die folgende Frage aufgeworfen werden:

Welche notwendigen und hinreichenden inneren Eigenschaften muß eine gegebene Teilmenge $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{H}$ besitzen, damit $\mathfrak{H}$ derart durch ein $\mathfrak{L}_2$ verwirklicht werden kann, daß $\mathfrak{h}$ bei dieser Verwirklichung gerade in die Gesamtheit der charakteristischen Funktionen aus $\mathfrak{L}_2$ übergehe.

Bevor wir eine Antwort auf diese Frage geben, führen wir eine nützliche Bezeichnung ein. Gilt für beliebige zwei Elemente φ_1 und φ_2 aus $\mathfrak{H}$ die Gleichung $(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, \varphi_1) = |\varphi_1|^2$, so schreiben wir

$$\varphi_1 \prec \varphi_2.$$

Es gilt also immer $\varphi \prec \varphi$. Haben die Beziehungen $\varphi_1 \prec \varphi_2$ und $\varphi_2 \prec \varphi_1$ gleichzeitig statt, so folgt leicht, daß φ_1 gleich φ_2 ist.

§ 1. Die Bedingungen und ihre Notwendigkeit.

Sei $\mathfrak{h}$ eine gegebene Teilmenge des endlich- oder abzählbar unendlichviel-dimensionalen abstrakten Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$. Das allgemeine Element von $\mathfrak{H}$ werden wir mit φ, die Elemente von $\mathfrak{h}$ aber mit kleinen lateinischen Buchstaben (f, g, h usw. und Indizes) bezeichnen. Damit es eine solche Verwirklichung von $\mathfrak{H}$ durch ein $\mathfrak{L}_2$ gebe, welche $\mathfrak{h}$ gerade in die Gesamtheit der in $\mathfrak{L}_2$ enthaltenen charakteristischen Funktionen überführt, ist notwendig und hinreichend, daß für $\mathfrak{h}$ die folgenden Bedingungen erfüllt seien:

I. *$\mathfrak{h}$ spannt $\mathfrak{H}$ auf, d. h. es liegen die Linearausdrücke der Elemente f von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{H}$ überall dicht;*

II. *Der Unterschied $f-g$ ist dann und nur dann in $\mathfrak{h}$ enthalten, wenn $g \prec f$ gilt;*

III. *Es gibt zu jedem Elementenpaar f, g ein solches Elementenpaar h, k, für welches $f+g = h+k$ und $h \prec f$, $h \prec g$;*

IV. *$\mathfrak{h}$ ist abgeschlossen im Sinne, daß der Limes jeder konvergenten „monotonen" Folge f_n ($f_n \prec f_{n+1}$) zu $\mathfrak{h}$ gehört.*

Beweis der Notwendigkeit. Nehmen wir nun an, daß $\mathfrak{h}$ bei einer Verwirklichung von $\mathfrak{H}$ durch ein $\mathfrak{L}_2$ in die Gesamtheit der

charakteristischen Funktionen übergeht. Da die charakteristischen Funktionen offenbar $\mathfrak{L}_2$ aufspannen, muß auch I gültig sein.

Es sei nun $f \prec g$ und es seien $f(x)$ und $g(x)$ diejenigen charakteristischen Funktionen, in welche f und g übergehen. Dann ist

$$\int_{\mathfrak{M}} f(x)\,\overline{g(x)}\,d\alpha(x) = (f,g) = |f|^2 = \int_{\mathfrak{M}} |f(x)|^2\,d\alpha(x),$$

also

$$\int_{\mathfrak{M}} f(x)\,g(x)\,d\alpha(x) = \int_{\mathfrak{M}} f(x)\,d\alpha(x).$$

Es muß also

$$f(x)\,(1-g(x)) = 0$$

gelten, woraus $f(x) \leqq g(x)$ folgt. Ist umgekehrt eine charakteristische Funktion $g(x)$ größer als eine andere, $f(x)$, und sind g bzw. f ihre Entsprechenden, so muß offenbar $f \prec g$ gelten.

Die Notwendigkeit von II folgt also daraus, daß $g(x) - f(x)$ dann und nur dann eine charakteristische Funktion ist, wenn $f(x) \leqq g(x)$ gilt. Es gehören ferner mit irgend zwei charakteristischen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ auch $\inf\{f(x), g(x)\} = h(x)$ und $\sup\{f(x), g(x)\} = k(x)$ zu der Gesamtheit der charakteristischen Funktionen und es gilt $f(x) + g(x) = h(x) + k(x)$. Es muß also auch III notwendig gelten.

Ist endlich die monoton wachsende Folge $f_n(x)$ von charakteristischen Funktionen im Quadratintegral-Mittel konvergent, so ist ihr Limes offenbar auch eine charakteristische Funktion, woraus auch die Notwendigkeit von IV folgt.

§ 2. Einige Folgerungen aus den Bedingungen I—IV.

Wir setzen im Folgenden voraus, daß für eine Untermenge $\mathfrak{h}$ des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ die Bedingungen I—IV erfüllt sind. Die Aufgabe dieses Paragraphen ist einige Folgerungen dieser Bedingungen zusammenzustellen.

1. *Gehört mit zwei Elementen, f und g, auch die Summe $f+g$ zu $\mathfrak{h}$, so ist $f \prec f+g$ und es gilt $f \perp g$ (d. h.: $(f,g) = 0$).*

Dies ist eine unmittelbare Folgerung von II und der Definition des $\prec$-Zeichens.

2. *Sei h das durch die Bedingung* III *dem Elementenpaar f, g zugeordnete Element, das wir kurz auch mit $f.g$ bezeichnen werden. Es gilt dann*

$$0 \leqq |h|^2 = |f.g|^2 = (f,g).$$

Da nämlich f und wegen II auch $g-f.g$ zu $\mathfrak{h}$ gehören und da ferner wegen III auch $f+(g-f.g)$ zu $\mathfrak{h}$ gehört, so muß nach 1 gelten: $f \perp g-f.g$, also $(f,g) = (f,f.g)$, woraus wegen $f.g \prec f$ die Behauptung folgt.

3. *Ist $f \prec g$ und $g \prec h$, so ist auch $f \prec h$.*

Beweis. Es gilt einerseits

$$(f,h) - |f|^2 = (f,h-f) = (f,h-g) + (f,g-f) \geqq 0$$

(da $h-g$ und $g-f$ wegen II zu $\mathfrak{h}$ gehören und da das innere Produkt zweier Elemente von $\mathfrak{h}$ nach 2 stets $\geqq 0$ ist). Andrerseits gilt ebenfalls auf Grund von 2

$$|f|^2 - (f,h) = |f|^2 - |f.h|^2 = |f|^2 - (f,f.h) = (f,f-f.h) \geqq 0$$

(da f und $f-f.h$ zu $\mathfrak{h}$ gehören). Aus den beiden gewonnenen Ungleichungen folgt tatsächlich

$$|f|^2 = (f,h), \text{ w. z. b. w.}$$

4. *Das zu den Elementen f und g gehörige „Produktelement" $f.g$ (siehe 2) hat noch die folgende Eigenschaft. Gilt für ein beliebiges h gleichzeitig $h \prec f$ und $h \prec g$, so gilt auch $h \prec f.g$. Aus dieser Eigenschaft und aus den durch Bedingung* III *erforderten Beziehungen: $f.g \prec f$ und $f.g \prec g$ folgt auch, daß $f.g$ eindeutig durch die beiden Elemente f und g (ohne Rücksicht auf ihre Reihenfolge) bestimmt ist.*

Beweis. Sei[2]) $h_1 = h - h.(f.g)$ und $h_2 = f.g + h_1$; infolge der Bedingungen II—III gehören ja diese zu $\mathfrak{h}$.

Aus $h \prec f$, $h \prec g$ folgt, daß auch $h_1 \prec f$, $h_1 \prec g$ gilt. Es folgt nämlich aus $h = h_1 + h.(f.g)$ und aus 1, daß $h_1 \prec h$ ist. Infolge 3 ergibt sich dann auch die Richtigkeit von $h_1 \prec f$ und von $h_1 \prec g$.

Aus $h_2 = f.g + h_1$ folgt nach 1 die Beziehung $f.g \perp h_1$. Es gilt daher

$$(h_2,f) = (f.g,f) + (h_1,f) = |f.g|^2 + |h_1|^2 = |f.g+h_1|^2 = |h_2|^2,$$

woraus sich $h_2 \prec f$ ergibt. Ebenso läßt sich auch die Beziehung $h_2 \prec g$ rechtfertigen.

Aus 2 gewinnen wir aber

$$-|h_1|^2 = |f.g|^2 - |h_2|^2 = (f,g) - (f,h_2) = (f,g-h_2) \geqq 0.$$

[2]) Da die eindeutige Bestimmtheit der „Produktelemente" noch nicht sichergestellt ist, legen wir in diesem Beweis eine beliebige (aber durchwegs dieselbe) Erklärung von $f.g$ und $h.(f.g)$ von den etwa möglichen mehreren zugrunde.

Es muß also $h_1 = h - h \,.\, (f \,.\, g)$ gleich Null sein. Also gilt tatsächlich $h = h \,.\, (f \,.\, g) \prec f \,.\, g$, w. z. b. w.

Wäre nun $f \,.\, g$ nicht eindeutig definiert, d. h. könnte es gleich k_1, aber auch gleich k_2 sein, so müßte nach den soeben Bewiesenen gleichzeitig $k_1 \prec k_2$ und $k_2 \prec k_1$ gelten, was nur für $k_1 = k_2$ möglich ist.

5 *Ist $f \prec g$, so gilt $f \,.\, g = f$.*

Dies ist eine leichte Folgerung aus 4.

6. *Es gilt immer $f \,.\, (g \,.\, h) = (f \,.\, g) \,.\, h$.*

Beweis. Es folgt aus $f \,.\, (g \,.\, h) \prec g \,.\, h$ und $g \,.\, h \prec g$, $g \,.\, h \prec h$ wegen 3: $f \,.\, (g \,.\, h) \prec g$ und $f \,.\, (g \,.\, h) \prec h$. Da auch

$$f \,.\, (g \,.\, h) \prec f$$

gilt, so muß nach 4 auch $f \,.\, (g \,.\, h) \prec f \,.\, g$, $f \,.\, (g \,.\, h) \prec h$ und daher auch $f \,.\, (g \,.\, h) \prec (f \,.\, g) \,.\, h$ richtig sein. Ebenso ließe sich offenbar auch die Beziehung $(f \,.\, g) \,.\, h \prec f \,.\, (g \,.\, h)$ beweisen; es gilt also notwendig $f \,.\, (g \,.\, h) = (f \,.\, g) \,.\, h$.

7. *Ist $f_1 \perp g_1$ und $f_2 \prec f_1$, $g_2 \prec g_1$, so gilt auch $f_2 \perp g_2$.*

Beweis. Aus $f_2 \,.\, g_2 \prec f_2 \prec f_1$ und $f_2 \,.\, g_2 \prec g_2 \prec g_1$ folgt wegen 3 und 4 $f_2 \,.\, g_2 \prec f_1 \,.\, g_1$. Da nach 2 $|f_1 \,.\, g_1|^2 = (f_1, g_1) = 0$ gilt, muß tatsächlich $(f_2, g_2) = |f_2 \,.\, g_2|^2 = (f_2 \,.\, g_2, 0) = 0$ sein.

8. *Es gilt $f \,.\, (g + h) = f \,.\, g + f \,.\, h$, vorausgesetzt, daß auch $g + h$ in $\mathfrak{h}$ enthalten (also (vgl. 1) $g \perp h$) ist.*

Beweis. Aus $f \,.\, g \prec f$, $f \,.\, g \prec g$ und $g \prec g + h$ (letztere Beziehung folgt aus 1) ergibt sich nach 3 und 4

$$f \,.\, g \prec f \,.\, (g + h).$$

Ebenso gewinnt man:

$$f \,.\, h \prec f \,.\, (g + h).$$

Da nach 7 auch $f \,.\, g \perp f \,.\, h$ gilt, so bekommen wir

$$\begin{aligned} |f \,.\, (g+h) - f \,.\, g - f \,.\, h|^2 &= |f \,.\, (g+h)|^2 + |f \,.\, g|^2 + |f \,.\, h|^2 - \\ &- 2(f \,.\, (g+h), f \,.\, g) - 2(f \,.\, (g+h), f \,.\, h) + 2(f \,.\, g, f \,.\, h) = \\ &= |f \,.\, (g+h)|^2 - |f \,.\, g|^2 - |f \,.\, h|^2 = \\ &= (f, g+h) - (f, g) - (f, h) = 0, \end{aligned}$$

woraus schon die Behauptung folgt.

9. *Ist die Folge f_n „monoton wachsend“ (d. h. $f_n \prec f_{n+1}$) und ist die Zahlenfolge $|f_n|$ beschränkt (dies ist z. B. immer dann der Fall, wenn es ein g gibt, so daß $f_n \prec g$ für jedes n gilt), so konvergiert f_n gegen ein Element aus $\mathfrak{h}$.*

Beweis. Aus der Relation $h \prec k$ folgt wegen 2 stets

$$|k|^2 - |h|^2 = |k|^2 - (h, k) = (k-h, k) \geqq 0,$$

also

$$|h| \leqq |k|.$$

Ist also $f_n \prec g$ für jedes n, so bleibt $|f_n|$ unter $|g|$.

Ebenso folgt für $m \leqq n$: $|f_m| \leqq |f_n|$. Die beschränkte, monoton wachsende Zahlenfolge $|f_n|$ konvergiert, also gilt mit beliebig gegebenem $\varepsilon > 0$ und für genügend große m und n $(m \leqq n)$

$$|f_n - f_m|^2 = |f_n|^2 - 2(f_n, f_m) + |f_m|^2 =$$
$$= |f_n|^2 - 2|f_m|^2 + |f_m|^2 = |f_n|^2 - |f_m|^2 \leqq \varepsilon,$$

woraus wegen der Bedingung IV $f_n \to f$ folgt.

§ 3. Eine Aufspaltung von $\mathfrak{H}$ in paarweise orthogonale Teilräume.

Es sei $f_1, f_2, f_3, \ldots$ eine endliche bzw. unendliche Folge von Elementen aus $\mathfrak{h}$, die zusammen $\mathfrak{H}$ aufspannen (es gibt ja wegen der Separabilität von $\mathfrak{H}$ und wegen der Bedingung I eine solche).

Wir definieren eine andere Folge durch

$$g_1 = f_1, \quad g_2 = f_2 - g_1 \cdot f_2, \ldots, g_\nu = f_\nu - \Big(\sum_{\mu<\nu} g_\mu\Big) \cdot f_\nu, \ldots$$

Damit diese Definition einen Sinn habe, muß gezeigt werden, daß $\sum_{\mu<\nu} g_\mu$ zu $\mathfrak{h}$ gehört. Für $\nu = 1, 2$ ist dies offenbar der Fall. Nehmen wir an, daß $\sum_{\mu<\nu} g_\mu$ zu $\mathfrak{h}$ gehört, dann ist wegen der Bedingung III auch

$$\sum_{\mu<\nu+1} g_\mu = \sum_{\mu<\nu} g_\mu + g_\nu = \sum_{\mu<\nu} g_\mu + f_\nu - \Big(\sum_{\mu<\nu} g_\mu\Big) \cdot f_\nu$$

in $\mathfrak{h}$ enthalten. Damit ist die Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen.

Aus 1 folgt auch $g_\nu \perp \sum_{\mu<\nu} g_\mu$, d. h. $\sum_{\mu<\nu} (g_\mu, g_\nu) = 0$. Da $(g_\mu, g_\nu) \geqq 0$, muß $(g_\mu, g_\nu) = 0$ für $\mu \neq \nu$ sein.

Sei h ein beliebiges Element aus $\mathfrak{h}$. Man sieht leicht auf Grund von 8 durch vollständige Induktion ein, daß $h \cdot \sum_{\mu<\nu} g_\mu = \sum_{\mu<\nu} h \cdot g_\mu$ gilt. Nach 1 ist also $h \cdot \sum_{\mu<\nu} g_\mu \prec h \cdot \sum_{\mu<\nu+1} g_\mu$. Da auch $h \cdot \sum_{\mu<\nu} g_\mu \prec h$ für jedes ν, so bekommen wir aus 9:

$$\sum_{\mu<\nu} h \cdot g_\mu \to h' \qquad \text{für} \qquad \nu \to \infty.$$

Da nach 7 auch $h \cdot g_\mu \perp g_\varkappa$ für $\mu \neq \varkappa$ gilt, so ist für $\nu > \varkappa$

$$\left(h - \sum_{\mu<\nu} h \cdot g_\mu, g_\varkappa\right) = (h, g_\varkappa) - \sum_{\mu<\nu} (h \cdot g_\mu, g_\varkappa) =$$

$$= (h, g_\varkappa) - (h \cdot g_\varkappa, g_\varkappa) = (h, g_\varkappa) - |h \cdot g_\varkappa|^2 = 0.$$

Aus der Stetigkeit des inneren Produkts ergibt sich daher für jedes $\varkappa$ $h - h' \perp g_\varkappa$, also auch $h - h' \perp \sum_{\mu<\nu} g_\mu$. Wegen

$$\sum_{\mu<\nu+1} g_\mu = g_\nu + \sum_{\mu<\nu} g_\mu = f_\nu + \left[\sum_{\mu<\nu} g_\mu - \left(\sum_{\mu<\nu} g_\mu\right) \cdot f_\nu\right]$$

und 1 ist $f_\nu \prec \sum_{\mu<\nu+1} g_\mu$, also gilt wegen 7 auch $h - h' \perp f_\nu$ für jedes ν. Da die Folge f_ν vollständig ist, muß somit die Gleichung

$$(*) \qquad h = h' = \sum_\mu h \cdot g_\mu$$

gelten.

Bedeute nun $\mathfrak{H}_\nu$ diejenige abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit in $\mathfrak{H}$, welche durch die Elemente f mit der Eigenschaft $f \prec g_\nu$ aufgespannt ist. Da $g_\mu \perp g_\nu$ für $\mu \neq \nu$, so ist wegen 7 auch $\mathfrak{H}_\mu \perp \mathfrak{H}_\nu$. Da nach (*) jedes Element h in der Form

$$h = \sum_\nu h_\nu \quad \text{mit} \quad h_\nu \prec g_\nu, \quad \text{also} \quad h_\nu \in \mathfrak{H}_\nu,$$

darstellbar ist, so müssen die $\mathfrak{H}_\nu$ (infolge der Bedingung I) den ganzen Raum $\mathfrak{H}$ aufspannen.

Sei $\mathfrak{h}_\nu$ die Menge derjenigen Elemente von $\mathfrak{h}$, die in $\mathfrak{H}_\nu$ liegen. Aus (*) folgt leicht, daß für jedes Element f von $\mathfrak{h}_\nu$ die Beziehung $f \prec g_\nu$ gilt. Wenn wir statt $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{h}$ diese $\mathfrak{H}_\nu$ und $\mathfrak{h}_\nu$ (mit einem beliebig gewählten Index ν) betrachten, so sieht man leicht ein, daß die Bedingungen I—IV auch für $\mathfrak{H}_\nu$ und $\mathfrak{h}_\nu$ gültig bleiben.

Aus den Betrachtungen des nächsten Paragraphen wird folgen, daß es auf einem endlichen Intervall $\mathfrak{M}_\nu$ einen Lebesgue—Stieltjesschen Maß- und Integralbegriff gibt, so daß $\mathfrak{M}_\nu$ endliches Maß hat und daß der zugehörige Funktionenraum $\mathfrak{L}_2^{(\nu)}$ eine Verwirklichung von der gesuchten Art von $\mathfrak{H}_\nu$ liefert.

Wir können nun $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \ldots$ so auf der x-Achse $\mathfrak{M}$ nebeneinanderreihen, daß sie paarweise punktfremd seien. Wenn wir der Menge der übrigbleibenden Punkte von $\mathfrak{M}$ das Maß Null zuschreiben, dann ist somit auf dem ganzen $\mathfrak{M}$ ein Lebesgue—Stieltjessches Maß- und Integralbegriff definiert. Der zugehörige

Funktionenraum sei mit $\mathfrak{L}_2$ bezeichnet. Die eineindeutigen isometrischen linearen Abbildungen $\mathfrak{H}_\nu \leftrightarrow \mathfrak{L}_2^{(\nu)}$ erzeugen dann offenbar eine ebensolche Abbildung $\mathfrak{H} \leftrightarrow \mathfrak{L}_2$.

Aus (*) folgt, daß ein beliebiges Element h aus $\mathfrak{h}$ bei dieser Abbildung in eine charakteristische Funktion aus $\mathfrak{L}_2$ übergeht. Umgekehrt ist jede charakteristische Funktion $h(x)$ aus $\mathfrak{L}_2$ in der Form $\sum_\nu h_\nu(x)$ darstellbar, wo $h_\nu(x)$ außerhalb $\mathfrak{M}_\nu$ verschwindet und es gilt

$$\int_{\mathfrak{M}} \Big(\sum_{\mu<\nu} h_\mu(x)\Big)^2 \leqq \int_{\mathfrak{M}} \Big(\sum_{\mu} h_\mu(x)\Big)^2 = \int_{\mathfrak{M}} h(x).$$

Es sei nun h_ν das zu $h_\nu(x)$ entsprechende Element in $\mathfrak{H}_\nu$, dann ist auch

$$\Big|\sum_{\mu<\nu} h_\mu\Big|$$

beschränkt. Aus 9 folgt dann

$$\sum_{\mu<\nu} h_\mu \to h \quad (\in \mathfrak{h}) \quad \text{für} \quad \nu \to \infty.$$

Dieses h ist dann das zu $h(x)$ entsprechende Element.

$\mathfrak{L}_2$ liefert also die gewünschte Verwirklichung von $\mathfrak{H}$.

§ 4. Verwirklichung durch ein $\mathfrak{L}_2$.

Der Beweis des Hinreichens der Bedingungen I—IV wurde durch die Betrachtungen des vorigen Paragraphen auf den Beweis der folgenden Behauptung zurückgeführt:

Gilt für die Teilmenge $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{H}$ außer I—IV noch die folgende Bedingung

V. *Es gibt ein ausgezeichnetes Element f_0 in $\mathfrak{h}$, so daß für jedes Element f die Beziehung $f \prec f_0$ gilt,*

so gibt es eine Verwirklichung von $\mathfrak{H}$ durch ein $\mathfrak{L}_2$ mit den gewünschten Eigenschaften. Die Grundmenge $\mathfrak{M}$, auf welcher die Funktionen aus $\mathfrak{L}_2$ definiert sind, ist dabei von endlichem Maß.

Es sei f ein gegebenes Element. Alle solche Elemente f', für welche $f' \prec f$ gilt, spannen eine abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit in $\mathfrak{H}$ auf. Der zugehörige Projektionsoperator sei mit P_f bezeichnet.

Es gilt für beliebiges g $P_f g = f.g$. Zum Beweis beachte man erstens, daß wegen $f.g \prec f$ $P_f(f.g) = f.g$ gilt und zwei-

tens, daß für $h \prec f$ nach 2, 5 und 6

$$(h, g-f.g) = (h,g)-(h,f.g) = (h,g)-|h.(f.g)|^2 =$$
$$= (h,g)-|(h.f).g|^2 = (h,g)-|h.g|^2 = 0,$$

also $g-f.g \perp h$ folgt.

Es gilt: $P_f P_g = P_g P_f = P_{f.g}$. Es folgt nämlich aus 5

$$P_f P_g h = f.(g.h) = (f.g).h = P_{f.g}h = P_{g.f}h = P_g P_f h$$

für beliebiges h. Wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{H}$ (Bedingung I) folgt also ganz allgemein $P_f P_g \varphi = P_g P_f \varphi = P_{f.g}$.

Ist $P_g - P_f$ positiv definit, so ist $f \prec g$ und so gilt

$$P_g - P_f = P_{g-f}.$$

Aus der Positivität von $P_g - P_f$ folgt bekanntlich die Gleichung $P_f P_g = P_f$. Aus Bedingung V ergibt sich also

$$f = P_f f_0 = P_f P_g f_0 = f.(g.f_0) = f.g, \text{ d. h. } f \prec g.$$

Ferner folgt aus 8 für beliebiges h

$$P_g h = g.h = (g-f+f).h = (g-f).h + f.h = P_{g-f}h + P_f h,$$

woraus sich wegen Bedingung I auch allgemeiner die Gleichung

$$P_g \varphi = P_{g-f}\varphi + P_f \varphi$$

ergibt.

Ist die Folge P_{f_n} $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ monoton wachsend (d. h. ist $P_{f_{n+1}} - P_{f_n}$ positiv definit), so existiert $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ $(\in \mathfrak{h})$ *und es gilt* $\lim_{n\to\infty} P_{f_n} = P_f$.

Dann gilt ja nach den Obigen $f_n \prec f_{n+1}$. Wegen 9 und Bedingung V gilt also $f_n \to f$ $(\in \mathfrak{h})$. Da offenbar $f_n \prec f$ für jedes n, so erhalten wir für beliebiges h

$$|P_f h - P_{f_n} h|^2 = |P_{f-f_n} h|^2 = |(f-f_n).h|^2 = (f-f_n, h) \to 0.$$

Für die vertauschbaren Operatoren P_f können wir eine simultane Spektraldarstellung finden[3]). D. h. es gibt eine Zerlegung der Einheit E_x $(0 \leqq x \leqq 1)$ und Funktionen $p_f(x)$, so daß

$$P_f = \int_0^1 p_f(x)\, dE_x.$$

Es sei $u(x)$ die charakteristische Funktion eines beliebigen Teilintervalls von $[0, 1]$ und es sei

[3]) Vgl. J. v. Neumann, Über Funktionen von Funktionaloperationen, *Annals of Math.* (2), 32 (1931), S. 191—226, insbesondere S. 214.

$$U = \int_0^1 u(x)\, dE_x.$$

Aus Bedingung I folgt, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine lineare Komposition $\sum_{i=1}^{n} c_i f_i$ gibt, so daß

$$\left| U f_0 - \sum_{i=1}^{n} c_i f_i \right|^2 < \varepsilon,$$

also

$$\left| \left(U - \sum_{i=1}^{n} c_i P_{f_i} \right) f_0 \right|^2 < \varepsilon$$

gilt.

Es ist daher

$$\int_0^1 \left| u(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i p_{f_i}(x) \right|^2 d(E_x f_0, f_0) < \varepsilon.$$

Die Funktionen $p_f(x)$ bilden also im Raume $\mathfrak{L}_2$ der in Bezug auf die monoton wachsende Funktion $\alpha(x) = (E_x f_0, f_0)$ meßbaren und absolutwert-quadratisch integrierbaren Funktionen ein vollständiges Funktionensystem.

Seien f und g beliebig, dann ist

$$|f-g|^2 = |(P_f - P_g) f_0|^2 = ((P_f - P_g)^2 f_0, f_0) = \int_0^1 |p_f(x) - p_g(x)|^2 d\alpha(x)$$

und allgemeiner, seien f_i und g_j beliebig und seien die c_i, c_j' komplexe Zahlen, dann ist

$$\left| \sum_{i=1}^{n} c_i f_i - \sum_{j=1}^{m} c_j' g_j \right|^2 = \left| \left(\sum_{i=1}^{n} c_i P_{f_i} - \sum_{j=1}^{m} c_j' P_{g_j} \right) f_0 \right|^2 =$$

$$= \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{n} c_i p_{f_i}(x) - \sum_{j=1}^{m} c_j' p_{g_j}(x) \right|^2 d\alpha(x).$$

Daraus folgt, daß die Zuordnung

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i p_{f_i}(x)$$

der Linearkompositionen eineindeutig, linear und isometrisch ist. Da diese Linearkompositionen in $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{L}_2$ überall dicht liegen, so kann man diese Zuordnung mit Erhaltung der obigen Eigenschaften auch für die übrigen Elemente von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{L}_2$ erweitern.

Wir können nun leicht einsehen, daß die so gewonnene Verwirklichung von $\mathfrak{H}$ durch dieses $\mathfrak{L}_2$ von der gewünschten Eigenschaft ist. Die zu f zugeordnete Funktion $p_f(x)$ ist ja äquivalent in Bezug auf $\alpha(x)$ mit einer charakteristischen Funktion, da P_f ein Projektionsoperator ist. Umgekehrt ist die charakteristische Funktion einer beliebigen in Bezug auf $\alpha(x)$ meßbaren Menge äquivalent mit einem $p_f(x)$, was man unschwer auf Grund der Vollständigkeit und der folgenden Abgeschlossenheitseigenschaften der $p_f(x)$ rechtfertigen kann:

a) $1-p_f(x)=p_{f_0-f}(x)$;

b) $p_f(x)\,.\,p_g(x)=p_{f.g}(x)$;

c) Ist die Folge $p_{f_n}(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ monoton wachsend, so strebt f_n gegen ein f aus $\mathfrak{h}$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} p_{f_n}(x)=p_f(x)$.

(Die Gleichungen in *a)—c)* sollen so verstanden werden, daß sie fast überall in Bezug auf $\alpha(x)$ gelten.)

Diese Eigenschaften folgen aber leicht aus den entsprechenden Eigenschaften der Projektionsoperatoren P_f, wenn man bemerkt, daß wegen der Bedingungen I und V $P_{f_0}=E$ (die identische Operation), also $p_{f_0}(x)=1$ ist.

Das Maß des Intervalls [0, 1] ist gleich $\alpha(1)=(f_0,f_0)$, also tatsächlich endlich, womit alles bewiesen ist.

(Eingegangen am 1. Oktober 1936.)