Méthodes de sommation des séries de Fourier. III.*)

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged.

1. Soit $f(x)$ une fonction périodique de période 2π, intégrable au sens de Lebesgue dans $(0, 2\pi)$, et soit

$$f(x) \sim \sum_{0}^{\infty} c_k(x) \quad (c_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

sa série de Fourier. On sait que les sommes de FEJÉR de la série conjuguée

$$\sum_{1}^{\infty} \bar{c}_k(x) \qquad (\bar{c}_k(x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx),$$

c'est-à-dire les sommes

$$\bar{\sigma}_n^*(f; x) = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \bar{c}_k(x) \tag{1}$$

tendent, lorsque $n \to \infty$, presque partout vers la fonction "conjuguée"

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{+0}^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \operatorname{cotg} \frac{t}{2} \, dt.$$

Envisageons une autre méthode de sommation, engendrée par la matrice triangulaire infinie (λ_{nk}) $(n = 1, 2, \ldots; k = 1, \ldots, n)$. Il s'agit de comparer cette méthode avec celle de Fejér, c'est-à-dire l'allure des sommes

$$\bar{\sigma}_n(f; x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk} \bar{c}_k(x) \tag{2}$$

avec celle des sommes (1).

Dans II on a démontré la proposition suivante:

Lorsque la matrice (λ_{nk}) *satisfait aux conditions:*

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_{nk} = 1 \qquad \textit{(pour toute valeur fixe de } k\textit{)} \tag{A}$$

---

*) Partie I a paru dans *ces Acta,* **12 B** (1950), p. 204—210, Partie II est sous presse dans le *Časopis pro pěstování mat. fys.* (Prague). On les notera par I et II.

et

$$(\overline{\mathrm{B}})\qquad \sum_{k=0}^{\nu-1}\left((k+1)\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{i}\right)|\Delta^2_{nk}|+\sum_{k=\nu}^{n-1}\left((n-k)\sum_{i=n-k}^{n}\frac{1}{i}\right)|\Delta^2_{nk}|<C\ ^{1)}$$

où $\nu=\left[\frac{n}{2}\right]$ *et* $\Delta^2_{nk}=\lambda_{nk}-2\lambda_{n,k+1}+\lambda_{n,k+2}\quad(\lambda_{n0}=1,\ \lambda_{n,n+1}=0),$

alors les sommes (1) *et* (2) *sont équiconvergentes presque partout, notamment en tout point de Lebesgue de la fonction $f(x)$; de plus elles sont uniformément équiconvergentes dans l'intérieur de tout intervalle où $f(x)$ est continue.*

Remarquons que $(\overline{\mathrm{B}})$ entraîne

$$(\mathrm{C})\qquad |\lambda_{nk}|<C_1\qquad \text{(cf. I (10) et II (10))}.$$

La présente communication veut compléments ce résultat en établissant des conditions *nécessaires.* On démontrera le théorème suivant:

Théorème. *Pour que les sommes* (1) *et* (2) *soient équiconvergentes pour toute fonction continue $f(x)$ de période 2π, et cela en tout point x, il est nécessaire que les conditions* (A), (C) *et la condition*

$$(\overline{\mathrm{b}})\qquad \left|\sum_{k=0}^{\nu-1}\left((k+1)\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{i}\right)\Delta^2_{nk}+\sum_{k=\nu}^{n-1}\left((n-k)\sum_{i=n-k}^{n}\frac{1}{i}\right)\Delta^2_{nk}\right|<C_2$$

soient satisfaites. Le couple des conditions (C), $(\overline{\mathrm{b}})$ *est d'ailleurs équivalent avec le couple* (C), (b') *où*

$$(\mathrm{b}')\qquad \sum_{k=1}^{\nu}\frac{\lambda_{nk}+\lambda_{n,n-k+1}}{k}=\log n+O(1).$$

2. Passons à la démonstration du théorème.

La nécessité de (A) résulte immédiatement en envisageant la fonction $f(x)=\sin kx$, puisqu'on a, pour $n\geqq k$,

$$(3)\qquad \bar\sigma_n(f;0)-\bar\sigma_n^*(f;0)=-\lambda_{nk}+\left(1-\frac{k}{n+1}\right),$$

ce qui doit tendre vers 0 lorsque $n\to\infty$.

Considérons maintenant l'espace E des fonctions $f(x)$ continues et de période 2π, la norme $\|f\|$ étant définie par $\max|f(x)|$. Dans cet espace,

$$U_nf=\bar\sigma_n(f;0)-\bar\sigma_n^*(f;0)\qquad(n=1,2,\ldots)$$

est une suite de fonctionnelles linéaires continues. L'hypothèse posée que les sommes (1) et (2) sont équiconvergentes pour toute fonction $f(x)$ continue, entraîne que

$$\lim_{n\to\infty}U_nf=0\quad\text{pour tout}\quad f\in E.$$

---

[1]) C, C_1 etc. désigneront des constantes ne dépendant pas de n.

Il en vient, par un théorème général de la théorie des opérations linéaires[2]) que la suite des normes $\|U_n\|$ est bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constante M telle que

(4) $$|U_n f| \leqq M\|f\|$$

pour tout $f \in E$ et pour $n = 1, 2, \ldots$.

Comme $\|\sin kx\| = 1$, (3) et (4) démontrent (C) avec $C_1 = M + 1$.

Envisageons maintenant les fonctions

$$g_n(x) = s_\nu(x)\,[1 - 2\cos(n+1)x] \quad \text{où} \quad s_\nu(x) = \sum_1^\nu \frac{\sin kx}{k}, \quad \nu = \left[\frac{n}{2}\right].$$

Il est bien connu que les fonctions $s_\nu(x)$ sont bornées en module par une constante γ ne dépendant ni de ν ni de x. Donc on a

(5) $$\|g_n\| \leqq 3\gamma.$$

Un calcul simple fournit:

$$g_n(x) = \frac{\sin x}{1} + \cdots + \frac{\sin \nu x}{\nu} + \frac{\sin(n-\nu+1)x}{\nu} + \cdots + \frac{\sin nx}{1} - \\ - \frac{\sin(n+2)x}{1} - \cdots - \frac{\sin(n+\nu+1)x}{\nu},$$

d'où l'on voit que

$$-U_n g_n = \frac{\mu_{n1}}{1} + \cdots + \frac{\mu_{n\nu}}{\nu} + \frac{\mu_{n,n-\nu+1}}{\nu} + \cdots + \frac{\mu_{nn}}{1} = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\mu_{nk} + \mu_{n,n-k+1}}{k}$$

avec

$$\mu_{nk} = \lambda_{nk} - \left(1 - \frac{k}{n+1}\right).$$

Or

$$\mu_{nk} + \mu_{n,n-k+1} = \lambda_{nk} + \lambda_{n,n-k+1} - 1;$$

en écrivant (4) avec $f = g_n$ et faisant usage de (5) on obtient donc:

$$\left| \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\lambda_{nk} + \lambda_{n,n-k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} \right| \leqq 3\gamma M,$$

ce qui est équivalent avec la condition (b′).

Reste à montrer que le couple des conditions (C), ($\bar{\text{b}}$) est équivalent avec le couple (C), (b′). Désignons la quantité figurant entre $|\cdots|$ dans le premier membre de ($\bar{\text{b}}$) par Σ_n, et désignons le premier membre de (b′) par Σ'_n. On vérifie par deux transformations abéliennes, que

$$\Sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \lambda_{n0} - \lambda_{n1} - \Sigma'_n - \lambda_{nn} + \\ + \left(1 - \sum_{i=\nu+1}^{n} \frac{1}{i}\right) \cdot \begin{cases} (\lambda_{n\nu} + \lambda_{n,\nu+1}) & \text{lorsque } n = 2\nu, \\ 2\lambda_{n,\nu+1} & \text{lorsque } n = 2\nu+1. \end{cases}$$

[2]) Cf. S. Banach, *Théorie des opérations linéaires* (Warszawa, 1932), p. 80.

Vu que $\lambda_{n0}=1$ et

$$\sum_{i=\nu+1}^{n}\frac{1}{i}\leq\sum_{i=\nu+1}^{n}\frac{1}{\nu+1}=\frac{n-\nu}{\nu+1}\leq 1,$$

on a, en effet, dans la condition (C),

$$\Sigma_n=\log n-\Sigma_n'+O(1),$$

ce qui prouve que (b) et (b′) sont équivalentes.

3. Observons que si les nombres

$$1=\lambda_{n0},\lambda_{n1},\ldots,\lambda_{nn},\lambda_{n,n+1}=0$$

forment, pour chaque n, une suite convexe ou concave, c'est-à-dire que

$$\Delta_{n0}^2,\Delta_{n1}^2,\ldots,\Delta_{n,n-1}^2$$

sont tous positifs ou tous négatifs (le signe pouvant dépendre de n), alors les conditions ($\bar{\text{B}}$) et ($\bar{\text{b}}$) se confondent. Dans ce cas, les conditions (A), ($\bar{\text{b}}$), ou (A), (b′), (C) sont donc nécessaires et suffisantes pour qu'il y ait équiconvergence pour toute fonction continue $f(x)$; elles entraînent de plus, pour toute fonction intégrable $f(x)$, l'équiconvergence en tout point de Lebesgue et l'équiconvergence uniforme dans l'intérieur de tout intervalle où $f(x)$ est continue.

Envisageons, à titre d'exemple, deux cas particuliers: [3])

1) Méthodes de sommation de Nörlund:

$$\lambda_{nk}=P_{n-k}/P_n \quad \text{où} \quad P_m=p_0+p_1+\cdots+p_m.$$

Supposons que $p_k>0$, alors $0<\lambda_{nk}\leq 1$, donc (C) est satisfaite. Les conditions (A) et (b′) prennent la forme

$$(\mathrm{A_N})\quad \lim_{n\to\infty}\frac{p_{n-m}}{P_n}=0,\qquad (\mathrm{b_N'})\quad \left|\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k}(P_{n-k}+P_{k-1}-P_n)\right|<C.$$

Dans le cas où la suite $\{p_k\}$ est monotone (croissante ou décroissante), les Δ_{nk}^2 sont de même signe; dans ce cas, ($\mathrm{A_N}$) et ($\mathrm{b_N'}$) sont donc nécessaires et suffisantes pour l'équiconvergence.

2) Soit $\bar{S}_n=\bar{S}_n(f;x)=\sum_{k=1}^{n}\bar{c}_k(x)$ et

$$\bar{\sigma}_n(f;x)=\frac{1}{p+1}(\bar{S}_{n-p}+\bar{S}_{n-p+1}+\cdots+\bar{S}_n) \tag{6}$$

où $p=p(n)$, $0\leq p(n)\leq n$. La matrice correspondante est définie par

$$\lambda_{nk}=1 \qquad \text{pour } k=0,1,\ldots,n-p$$

et

$$\lambda_{nk}=\frac{n-k+1}{p+1} \qquad \text{pour } k=n-p+1,\ldots,n+1.$$

---

[3]) Dont le second a été ajouté pendant les épreuves, le 10 novembre 1950.

Pour chaque n, la suite $\{\lambda_{nk}\}$ $(k=1,\ldots, n+1)$ est concave: on a

$$\Delta^2_{nk}=0 \text{ pour } k\neq n-p-1 \quad \text{et} \quad \Delta^2_{n,n-p-1}=-\frac{1}{p+1}.$$

On a

$$1\geqq\lambda_{nk}=\min\left\{1,\frac{n-k+1}{p+1}\right\}\geqq\min\left\{1,\frac{n-k+1}{n+1}\right\}=\frac{n-k+1}{n+1}\to 1$$

pour k fixe, $n\to\infty$; les conditions (A), (C) sont donc toujours satisfaites. La condition (B) prend la forme

(7) $$\frac{n-p}{p+1}\sum_{i=n-p}^{n}\frac{1}{i}<C \text{ lorsque } n-p-1\leqq\nu-1, \text{ c'est-à-dire que } p\geqq\nu,$$

(8) $$\sum_{i=p+1}^{n}\frac{1}{i}<C \text{ lorsque } n-p-1\geqq\nu, \text{ c'est-à-dire que } p<\nu.$$

Le premier membre de (7) étant toujours inférieur à 1, c'est la condition (8) qui est essentielle; la restriction $p<\nu$ y est d'ailleurs inutile puisque $\sum_{p+1}^{n}\frac{1}{i}<1$ lorsque $p\geqq\nu$. La condition (8) est équivalente avec chacune des suivantes:

$$\log\frac{n}{p+1}<C,\quad \frac{n}{p+1}<C_1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{p}{n}>0.$$

Donc, *pour que les sommes* (6) *soient équiconvergentes avec les sommes de Fejér* (1) *pour toute fonction continue, il faut et il suffit qu'on ait* $\lim\,(p/n)>0$. *Dans cette condition, il y a équiconvergence même pour toute fonction intégrable* $f(x)$, *en tout point de Lebesgue de* $f(x)$, *et l'équiconvergence est uniforme dans l'intérieur de tout intervalle où* $f(x)$ *est continue*[4]).

(Reçu le 5 juin 1950)

[4]) Ce résultat vient d'être obtenu aussi par A. D. Ščerbina, Sur une méthode de sommation des séries conjuguées des séries de Fourier, *Mat. Sbornik*, N. S. **27** (1950), p. 157–170 (en russe). Remarquons qu'on a la même condition pour les sommes analogues formées à partir des sommes partielles de la série de Fourier originelle; *cf.* S. M. Nikolsky, Sur des méthodes linéaires de sommation des séries de Fourier, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR*, série math., **12** (1948), p. 259–278, en particulier p. 277 (en russe).