THÉORIE DES NOMBRES. — *Sur la résolution approchée de certaines congruences.* Note de M. **Frédéric Riesz**, présentée par M. Émile Picard.

« On sait que, si l'on part d'un point d'une circonférence et qu'on y porte 1, 2, 3, ... fois une partie irrationnelle de la périphérie, la série infinie des extrémités sera dense sur toute la circonférence (1).

» Ce théorème comporte une généralisation.

» On désignera par (x) la différence positive du nombre x et du nombre entier immédiatement inférieur. Pour que, étant donnés les nombres α_1, α_2, ..., α_k, l'ensemble de tous les systèmes $(n\alpha_1)$, $(n\alpha_2)$, ..., $(n\alpha_k)$ (n prend toutes les valeurs entières positives) soit dense dans tout l'intervalle

$$0 \leqq x_1 \leqq 1, \qquad 0 \leqq x_2 \leqq 1, \qquad \ldots, \qquad 0 \leqq x_k \leqq 1,$$

il faut et il suffit qu'il n'existe pas de relation

$$(2) \qquad a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k \equiv 0 \qquad (\text{mod } 1)$$

à coefficients entiers (excepté naturellement le cas singulier

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0).$$

» On appellera le système $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ $(0 \leqq \beta_i < 1)$ point limite de l'ensemble formé par tous les systèmes $(n\alpha_1)$, $(n\alpha_2)$, ..., $(n\alpha_k)$, si, pour chaque nombre positif ε aussi petit que l'on veut, il y a un élément $(n\alpha_1)$, $(n\alpha_2)$, ..., $(n\alpha_k)$ autre que $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, tel que les valeurs absolues des différences $\beta_1 - (n\alpha_1)$, $\beta_2 - (n\alpha_2)$, ..., $\beta_k - (n\alpha_k)$ ne soient pas situées entre ε et $1 - \varepsilon$.

» Or s'il y a entre les α une relation (2) à coefficients entiers (y compris *zéro*), tout point limite $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ de l'ensemble défini doit aussi satisfaire à la relation

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \ldots + a_k\beta_k \equiv 0 \qquad (\text{mod } 1).$$

» La nécessité de la condition est donc évidente.

» D'après (1), la condition est aussi suffisante pour le cas $k = 1$. Or, en raisonnant par récurrence, il nous faut démontrer que, si elle l'est pour $k - 1$ nombres α, elle l'est aussi pour k nombres. Étant alors donnés k nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tels que l'ensemble de tous les éléments $(n\alpha_1)$, $(n\alpha_2)$, ..., $(n\alpha_k)$ n'a pas tous les points $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ $(0 \leqq \beta_i < 1)$ pour points limites, on distinguera deux cas : ou l'on peut chercher $k - 1$ des nombres α_1, α_2, ..., α_k, tels que l'ensemble correspondant n'ait pas tous les points β_1,

$\beta_2, \ldots, \beta_{k-1}$ pour points limites, cas déjà décidé par notre prémisse; ou on ne le peut pas. Il ne nous faudra montrer que pour ce second cas l'existence d'une relation (2).

» Dans ce second cas, on démontre par un raisonnement connu que, si l'on donne $k-1$ des nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k (0 \leqq \beta_i < 1)$, par exemple $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k-1}$, on peut déterminer au moins d'une manière le nombre β_k tel que le point $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k-1}, \beta_k$ soit point limite de notre ensemble (3).

» De la définition du point limite il suit que, si les points $\beta_1, \ldots, \beta_k$ et $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ sont des points limites, le point $(\beta_1 + \gamma_1), \ldots, (\beta_k + \gamma_k)$ l'est aussi (4).

» Étant alors défini un nombre β_k tel que le point $0, 0, \ldots, 0, \beta_k$ soit point limite, tout point $0, 0, \ldots, 0, (n\beta_k)$ l'est aussi. De là suit que, si β_k était irrationnel, l'ensemble de tous les nombres $(n\beta_k)$ étant dense dans tout l'intervalle $(0, 1)$, chaque point $0, 0, \ldots, 0, \gamma_k (0 \leqq \gamma_i < 1)$ serait point limite. Donc, en ce cas, il résulterait de (3) et de (4) que chaque point $\beta_1, \ldots, \beta_k (0 \leqq \beta_i < 1)$ l'est aussi. Alors, pour qu'il y ait des points $\beta_1, \ldots, \beta_k$ qui ne soient pas points limites, chaque nombre β_k tel que le point $0, 0, \ldots, 0, \beta_k$ soit point limite, doit être rationnel. Si β_k peut prendre d'autres valeurs que 0, l'ensemble de tous ces nombres β_k rationnels, différents de 0 est fini parce que, autrement, d'après (4), il serait dense dans tout l'intervalle $(0, 1)$. Entre tous ces nombres il y en a un qui est le plus petit. En le désignant par $\frac{1}{|a_k|}$, $|a_k|$ doit être un nombre entier, autrement il y aurait un nombre $\left(\frac{n}{|a_k|}\right)$ plus petit que $\frac{1}{a_k}$. En appliquant le théorème (4), on voit que les β_k sont fournis par les multiples de $\frac{1}{|a_k|}$.

» On déterminera de la même manière les nombres $|a_i|$ correspondant aux autres nombres α_i.

» On voit aisément que si, pour un point limite de l'ensemble correspondant aux k nombres $|a_1|\alpha_1, \ldots, |a_k|\alpha_k$, $k-1$ des coordonnées sont zéro, la $k^{\text{ième}}$ est aussi nulle.

» On va démontrer qu'en donnant aux nombres $|a_1|\alpha_1, \ldots, |a_k|\alpha_k$ des signes convenables, leur somme sera un nombre entier.

» D'abord, l'ensemble correspondant aux nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ ayant chaque point $\frac{\beta_1}{|a_1|}, \ldots, \frac{\beta_{k-1}}{|a_{k-1}|} (0 \leqq \beta_i < 1)$ pour point limite, chaque point $\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$ l'est aussi pour l'ensemble correspondant aux $k-1$ nombres $a_1|\alpha_1, \ldots, |a_{k-1}|\alpha_{k-1}$. Étant alors donnés les nombres $\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$, il y a d'après (3) toujours un nombre β_k tel que le point $\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, \beta_k$ soit point limite de l'ensemble correspondant aux nombres $|a_1|\alpha_1, \ldots, |a_k|\alpha_k$. Mais il n'y en a qu'un; parce qu'en outre, d'un point limite ayant $(-\beta_1)$, $(-\beta_2), \ldots, (-\beta_{k-1})$ et de deux points limites ayant $\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$ pour leurs $k-1$ premières coordonnées on pourrait déduire d'après (4) deux points limites différents, ayant leur $k-1$ premières coordonnées égales à zéro.

» Ainsi chaque coordonnée des points limites de notre nouvel ensemble est une fonction uniforme des autres. Or, cette fonction est continue, car aux nombres limites correspondent des nombres limites. D'après (4) cette fonction continue satisfait à la congruence fonctionnelle

$$(5)\quad f[(x_1+x_2),(y_1+y_2),\ldots] \equiv f(x_1,y_1,\ldots)+f(x_2,y_2,\ldots) \pmod 1.$$

» *A fortiori*, si $k-2$ des coordonnées s'annulent, et si l'on fait varier les deux autres, celles-ci sont des fonctions uniformes continues l'une de l'autre et satisfont à la congruence fonctionnelle

$$(5a)\qquad f[(x_1+x_2)] \equiv f(x_1)+f(x_2) \pmod 1$$

n'ayant que les deux solutions continues

$$(5aa)\qquad f(x) \equiv \pm x \pmod 1.$$

» Alors, deux points limites ayant $k-2$ des coordonnées correspondantes communes, les différences des autres deux à deux satisfont à l'une des congruences $(5aa)$. Or, du point limite o, o, ..., o, on peut passer à chaque point limite par une chaîne de points limites, ayant deux à deux $k-2$ coordonnées communes. Ainsi, d'après $(5aa)$, si l'on donne aux β des signes convenables, leur somme sera un nombre entier pour chaque élément de la chaîne, et par suite aussi pour chaque point limite. Or, le point $(|a_1|\alpha_1), (|a_2|\alpha_2), \ldots, (|a_k|\alpha_k)$ étant point limite, pour les nombres entiers $a_1, \ldots, a_k$ de signes convenables,

$$a_1\alpha_1+\ldots+a_k\alpha_k \equiv 0 \pmod 1,$$

ce qui montre que notre condition est suffisante.

» On établit de la même façon le théorème plus général :

» Pour que le système de congruences

$$\sum_k \alpha_{ik}x_k \equiv \beta_i \pmod 1 \qquad \left\{\begin{matrix} i=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,n \end{matrix}\right\}$$

soit résoluble en nombres entiers pour des β quelconques, avec une approximation à volonté, il faut et il suffit qu'on ne puisse pas résoudre précisément le système de congruences

$$\sum_i \alpha_{ik} x_i \equiv 0 \qquad (\text{mod } 1)$$

en nombres entiers non tous nuls. »

MÉCANIQUE CHIMIQUE. — *Sur les formules de la Tonométrie et de la Cryoscopie.* Note de M. E. **Ariès**, présentée par M. Mascart.

« Dans une précédente Communication ([1]) nous avons montré comment on pouvait tirer de la loi de van't Hoff l'expression du potentiel de chacun des deux corps engagés dans une solution diluée. Nous avons trouvé pour le potentiel h_0 du dissolvant

$$h_0 = H_0 - x_1 RT,$$

x_1 étant la proportion moléculaire du corps dissous dans *le poids moléculaire* du dissolvant.

» On déduit de cette expression les formules en usage dans la Tonométrie et la Cryoscopie.

» Considérons d'abord un dissolvant très volatil dont la vapeur, ayant H'_0 pour potentiel, soit en équilibre avec la solution. On aura

$$H'_0 = H_0 - x_1 RT. \tag{1}$$

» Si l'on fait croître de Δx_1 la quantité x_1, la variation de pression Δp nécessaire au maintien de l'équilibre à température constante s'obtient en différentiant l'équation (1) considérée comme fonction de p et de x_1, ce qui donne

$$\left(\frac{\partial H_0}{\partial p} - \frac{\partial H'_0}{\partial p}\right) \Delta p = RT \,\Delta x_1.$$

» Pour se placer dans les conditions limites que tendent à réaliser les expériences de Tonométrie, il faut supposer $x_1 = 0$, $\Delta x_1 = \frac{\Delta\varpi}{\varpi}$, ϖ étant le poids moléculaire du corps à dissoudre et $\Delta\varpi$ le poids très petit de ce corps réellement dissous; la formule précédente devient alors

$$-(v'_0 - v_0)\,\Delta p = RT \frac{\Delta\varpi}{\varpi}; \tag{2}$$

([1]) Voir *Comptes rendus*, séance du 8 août 1904, p. 401.