Soit $\lambda_0 > 0$ une valeur telle que $\lambda_0 - \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)''$ soit constamment positive. Calculons la constante c (PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III) pour l'intervalle (a, t) et avec la fonction $B_0(x) = A\left[\lambda_0 - \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)''\right]$. Si l'on a $c = 1$, λ_0 est la valeur cherchée de λ. Si $c \neq 1$, on peut arriver à $c = 1$ de la manière suivante : Supposons, par exemple, $c > 1$; alors si nous faisons décroître, dans $B(x) = A\left[\lambda - \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)''\right]$, λ à partir de λ_0, de manière que $B(x)$ reste positif dans (a, b), ce qui est possible ; comme pour $B(x) \equiv 0$ on a $c = 0$, il résulte qu'il y a une valeur λ_1 pour laquelle $c = 1$. L'équation (3) admet pour $\lambda = \lambda_1$ une intégrale $z(x)$ telle que $z(a) = 0$, $z(b) = 0$ et qui ne s'annule pas dans l'intervalle ; par conséquent (1) admet pour $\lambda = \lambda_1$ une intégrale $y(x)$ telle que $y'(a) = y'(b) = 0$ et $y'(x)$ ne s'annule pas dans (a, b).

II. On peut employer une méthode encore plus simple et qui ne demande même pas que les dérivées de $A(x)$ existent. Je démontre de la même manière que M. Picard qu'il y a une valeur λ' de λ pour laquelle (1) a une intégrale $y_1(x)$ telle que $y_1(a) = 0$, $y_1'(b) = 0$, de même une valeur λ'' et une intégrale $y_2(x)$ pour laquelle $y_2'(a) = 0$, $y_2(b) = 0$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ ne s'annulant pas dans (a, b). On peut raccorder ces intégrales en un certain point de (a, b) et pour une même valeur de λ, soit $\lambda = \lambda_1$. On aura ainsi une intégrale $y(x)$ de (1) pour $\lambda = \lambda_1$ telle que $y'(a) = y'(b) = 0$ et s'annulant une seule fois entre a et b, dont la dérivée, par conséquent, ne s'annule qu'en a et b.

III. Nous venons de trouver par deux voies une valeur λ_1 de λ pour laquelle (1) admet une intégrale $y(x)$ dont la dérivée ne s'annule qu'aux extrémités de l'intervalle (a, b). Je vais prouver qu'il n'y en a pas d'autres. Supposons qu'il y ait encore la valeur λ_2 et l'intégrale $y_2(x)$. On a

$$(\lambda_2 y_2 y_1' - \lambda_1 y_1 y_2')' = (\lambda_1 - \lambda_2) y_1' y_2',$$

donc

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b y_1' y_2' \, dx,$$

égalité absurde si $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

IV. Arrivés là, il est facile d'établir, par un procédé géométrique tout à fait semblable à celui de M. Picard, qu'il y a une suite de valeurs de λ pour lesquelles on a des intégrales dont les dérivées s'annulent non seulement en a et b, mais aussi dans un certain nombre de points intermédiaires.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur un théorème de M. Borel.* Note de M. F. RIESZ, présentée par M. E. Picard.

I. Le théorème de M. Borel, qu'un ensemble dénombrable d'intervalles, tel que chaque point d'un intervalle ab est intérieur au moins à un intervalle de l'ensemble, contient un ensemble fini d'intervalles jouissant de la même propriété, peut être énoncé sous une forme plus générale, en laissant à part la restriction de la dénombrabilité de l'ensemble. Sous cette nouvelle forme, le théorème sert de base commune à plusieurs théorèmes principaux de la théorie des fonctions de variables réelles.

Pour démontrer le théorème, soit c un point de l'intervalle ab tel que pour l'intervalle ac il y ait un ensemble fini, partie de l'ensemble infini d'intervalles, tel que chaque point de l'intervalle ac soit intérieur au moins à un intervalle de l'ensemble fini. c étant un tel point, chaque point de l'intervalle ac l'est aussi; de même chaque point intérieur à un intervalle de l'ensemble, auquel le point c est aussi intérieur. Le point a lui-même étant intérieur à un intervalle, chaque point intérieur en même temps à cet intervalle et à l'intervalle ab pourra servir de point c. Nier le théorème, ce serait affirmer que, dans certains cas, il y aurait des points de l'intervalle ab, n'appartenant pas à la classe des points c. Or, ces points formeraient une seconde classe et les deux classes définiraient une coupure, dans le sens de M. Dedekind, ayant pour point limite un point p de l'intervalle ab. Donc, il y aurait un intervalle de l'ensemble, auquel le point p serait intérieur; cet intervalle contiendrait des points de chacune des classes, résultat qui serait absurde.

Applications. — 1. Le théorème de Weierstrass, que pour chaque fonction bornée définie dans un intervalle ab il y a au moins une valeur de l'argument telle que pour chaque intervalle interceptant cette valeur la limite supérieure de la fonction sera la même que pour tout l'intervalle ab, résulte immédiatement de notre théorème; parce que, s'il n'en était pas ainsi, chaque valeur de l'argument serait intérieure à un intervalle, dans lequel la limite supérieure serait inférieure à celle dans l'intervalle ab; alors il y aurait un ensemble fini d'intervalles, recouvrant tout l'intervalle ab, tels que dans chacun d'eux la limite supérieure serait inférieure à celle dans tout l'intervalle, ce qui serait absurde.

2. Pour démontrer le théorème bien connu que chaque fonction continue est uniformément continue, on déterminera autour de chaque valeur de l'argument un intervalle pour lequel l'oscillation soit plus petite que le nombre donné ε. L'ensemble de ces intervalles contiendra un ensemble fini d'intervalles, tel que chaque point de l'intervalle ab sera intérieur au moins à un intervalle de cet ensemble fini. Ces intervalles auront des parties communes; soit δ la longueur de la plus petite de ces parties. Alors, dans tout intervalle inférieur à δ l'oscillation sera inférieure à ε.

II. Autour de chaque point de l'ensemble complémentaire d'un ensemble fermé contenu dans l'intervalle ab, on peut déterminer un intervalle ne contenant aucun point de l'ensemble fermé. De là il suit que notre théorème et ses conséquences restent vrais, si l'on substitue à l'intervalle *ab* un ensemble fermé quelconque.

Le théorème peut être généralisé pour des dimensions quelconques. En raisonnant de n à $n+1$, on le démontrera d'abord pour un ensemble fermé de points et pour un ensemble de domaines par exemple rectangulaires, chaque point de l'ensemble fermé étant intérieur au moins à un des domaines. De là, on passera aisément à un ensemble de domaines quelconques. (On appellera *domaine* chaque ensemble d'un seul tenant, dont aucun point n'est point limite de l'ensemble complémentaire). On énoncera alors le théorème :

Un ensemble de domaines tel que chaque point d'un ensemble fermé de points est intérieur au moins à un domaine de l'ensemble, contient toujours un ensemble fini de domaines jouissant de la même propriété.

De là on déduit aisément que, si pour un domaine D il y a un ensemble Δ de domaines tel que chaque point intérieur à D l'est aussi au moins à un domaine de Δ, l'ensemble Δ contiendra un ensemble *dénombrable* de domaines, jouissant de la même propriété. En outre, ce théorème rendra des services dans la théorie du prolongement analytique.

MÉCANIQUE. — *Sur la déviation des graves vers le sud et sur la courbure des lignes de force.* Note de M. **Maurice Fouché**, présentée par M. H. Poincaré.

Dans la séance du 2 janvier, M. de Sparre a communiqué à l'Académie des formules relatives à la déviation des graves. Comme je me suis occupé autrefois de la question et que je trouve des résultats différents, je demande à l'Académie la permission d'y revenir.

M. de Saint-Germain (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1883) et M. de la Fresnaye se sont déjà inquiétés de l'effet de la courbure des lignes de force. Le travail de M. de la Fresnaye a fait l'objet, à la Société astronomique de France, d'un rapport de M. Caspari (*Bulletin de la Société astronomique de France*, 1903, p. 175 et seq.).

Le mouvement relatif du mobile est déterminé par trois forces : 1° l'attraction ; 2° la force centrifuge ; 3° la force centrifuge composée. Comme les deux premières se composent pour former le *poids* du corps, il suffira de considérer le champ de la pesanteur et la force centrifuge composée. On traitera comme des infiniment petits : 1° la vitesse angulaire ω du globe terrestre ; 2° la hauteur h et, par suite, la durée de la chute.