De ces observations ressortent les conclusions suivantes :

1° La descente régulière de la température aux trois thermomètres n'a commencé qu'une demi-heure après le premier contact;

2° Le minimum indiqué par le thermomètre noirci correspond exactement au minimum de surface non éclipsée, tandis que les deux autres thermomètres ne sont arrivés au minimum que 5 et 10 minutes après le moment de la plus grande phase;

3° L'abaissement de la température a été de 9° pour le thermomètre noirci, de 6° pour le thermomètre à boule nue et de 2° seulement pour le thermomètre à l'ombre. Au chalet de Courbatissières (altitude 1750^{m}), M. l'abbé Plassier a observé un abaissement de 3°,5 à l'ombre;

4° L'hygromètre, qui marquait 49°,0 au commencement de l'éclipse, s'est élevé à 51°,0 une demi-heure après le moment de la plus grande phase et est revenu à 49°,0 à la fin de l'éclipse.

Le baromètre n'a accusé aucune variation sensible qui puisse être attribuée à l'influence de l'éclipse.

Le vent d'ouest, assez fort au commencement de l'éclipse, s'apaisa ensuite pour reprendre une demi-heure après le maximum avec une plus grande intensité et par saccades.

L'arrêt brusque dans la descente et la montée de la température, indiqué une demi-heure avant et après le maximum de la phase par le thermomètre noirci, semble avoir été produit par la cessation et la reprise du vent.

L'affaiblissement de la lumière était déjà très sensible moins d'une demi-heure après le commencement de l'éclipse. Vers le maximum, la couleur du ciel se rapprochait du violet et la neige, tombée sur les montagnes voisines la nuit précédente, paraissait grisâtre, comme souillée par un dépôt de fumée de houille. L'aspect général de la nature produisait une impression pénible; les oiseaux avaient cessé leur chant et les hirondelles étaient fort agitées.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les ensembles discontinus.* Note de M. FRÉDÉRIC RIESZ, présentée par M. Émile Picard.

1. Un ensemble de points est dit *d'un seul tenant,* s'il ne peut pas être décomposé en deux ensembles, tels qu'aucun point ou point limite de l'un quelconque d'eux ne soit point limite de l'autre. Un ensemble ne contenant aucun ensemble d'un seul tenant est dit *discontinu*. Dans son Mémoire *Sur les fonctions analytiques uniformes* (*Journ. de Math.*, 1905, p. 12), M. Zoretti montre que chaque ensemble parfait discontinu, situé dans un plan, fait partie d'une ligne; il entend par ligne un ensemble parfait d'un seul tenant, ne contenant aucun ensemble superficiel.

Sous cette forme primitive, le théorème servira peu dans les applications.

Mais, en se servant de la notion d'une courbe continue sans point multiple (brièvement *courbe simple*), introduite en Analyse par M. Jordan, on parvient à un théorème plus utile qui éclaircira la topologie des ensembles discontinus.

Envisageons un ensemble plan discontinu E. Avec son dérivé, il forme un ensemble discontinu fermé. Projetons celui-ci sur deux axes, par exemple, rectangulaires. Les deux projections, comme l'a montré M. Baire (*Annali di Math.*, 3e série, t. III, p. 94), seront aussi des ensembles fermés discontinus. Chacun d'eux peut être complété par addition de points, de manière à devenir ensemble parfait discontinu. L'ensemble de tous les points dont les projections appartiennent à ces deux ensembles parfaits est un ensemble plan parfait discontinu. Nous allons montrer qu'il y a une courbe simple, au sens de M. Jordan, contenant cet ensemble *complexe*, et contenant, *a fortiori*, l'ensemble E.

La construction de la courbe repose sur la généralisation d'une idée de M. Osgood (*Transact. of the Amer. math. Soc.*, 1903, p. 107; *voir* aussi LEBESGUE, *Bull. de la Soc. math.*, 1903, p. 200). Parmi les segments des deux axes, contenant tout à fait les ensembles parfaits, il y en a deux qui sont pour leurs axes les plus petits; on les désignera par ab et AB. Les deux ensembles étant parfaits et discontinus, leurs ensembles complémentaires constituent sur chacun des axes un ensemble dénombrable d'intervalles, partout deux sur son segment; deux intervalles du même axe ne se touchent pas. Les deux ensembles dénombrables peuvent être ordonnés de bien des manières; on se fixera pour chacun d'eux un arrangement du type ω. Dans cet arrangement, il y a pour chacun d'eux un intervalle qui est le premier, et un qui est le second; on les désignera par 12,34 et I II, III IV de manière que les points a, 1, 2, 3, 4, b et aussi A, I, II, III, IV, B forment des suites. On désignera par (m, n) le point ayant les points m et n pour projections.

Voulant donc construire la courbe, on prend pour première approximation la ligne brisée

$$(a, \mathrm{A})\,(1, \mathrm{I})\,(2, \mathrm{I})\,(3, \mathrm{A})\,(4, \mathrm{A})\,(b, \mathrm{I})\,(b, \mathrm{II})\,(4, \mathrm{III})\,(3, \mathrm{III})$$
$$(2, \mathrm{II})\,(1, \mathrm{II})\,(a, \mathrm{III})\,(a, \mathrm{IV})\,(1, \mathrm{B})\,(2, \mathrm{B})\,(3, \mathrm{IV})\,(4, \mathrm{IV})\,(b, \mathrm{B}),$$

formée de segments de droites parallèles aux axes ou diagonales à des rectangles ayant pour sommets des points de l'ensemble complexe. Tout point de l'ensemble complexe appartient à un des rectangles (y compris les frontières), dont les diagonales font partie de la ligne brisée.

Pour avoir une seconde approximation, on conserve les segments de droites parallèles aux axes, mais on remplace les diagonales par des lignes brisées, ayant les mêmes extrémités que les diagonales et construites dans les rectangles, dont elles remplacent les diagonales, de la même manière que nous l'avons fait dans le rectangle

$$(a, \mathrm{A})\,(a, \mathrm{B})\,(b, \mathrm{B})\,(b, \mathrm{A}).$$

Ainsi, par une suite dénombrable d'opérations on définit un ensemble dénombrable de segments de droites parallèles aux axes. En ajoutant les points limites, l'ensemble formé contiendra notre ensemble complexe. D'autre part, on démontre aisément que l'ensemble ainsi formé constitue une courbe simple (pour plus de détails, *voir* Osgood, *loc. cit.*).

On a donc le théorème : *Tout ensemble discontinu, situé dans un plan, fait partie d'une courbe continue sans point multiple, située dans ce plan.*

Le théorème reste exact pour des dimensions quelconques; on le démontre en raisonnant de n à $n+1$; ou aussi directement, par une méthode tout analogue à celle appliquée au cas de l'ensemble plan.

Il suit de notre théorème qu'*au point de vue de l'*analysis situs, *tous les ensembles parfaits discontinus sont équivalents* (*homœomorphes*).

2. Cherchons à attribuer à chaque ensemble E de points un nombre de dimensions, c'est-à-dire un nombre $d(E)$ qui satisfasse aux conditions suivantes :

1° Si l'ensemble E fait partie de l'ensemble E', $d(E) \leqq d(E')$;

2° L'ensemble (E_1, E_2) étant l'ensemble des points contenus au moins dans l'un des ensembles E_1, E_2, on n'a pas en même temps

$$d(E_1, E_2) > d(E_1) \quad \text{et} \quad d(E_1, E_2) > d(E_2);$$

3° L'ensemble complexe formé de deux ensembles de dimensions m et n a la dimension $m+n$;

4° La dimension d'un ensemble reste invariante, si l'on y applique une transformation continue biunivoque de l'espace;

5° La dimension du segment $(0, 1)$ est 1.

Ce *problème des dimensions* peut être résolu. On appellera *ensemble simple à n dimensions* chaque ensemble qui peut être transformé par une transformation continue biunivoque de l'espace de manière à devenir un rectangle à n dimensions, l'ensemble complexe de n segments de droites. Un point unique sera ensemble simple à dimension 0. Cette convention faite, on attribuera à l'ensemble E le nombre de dimensions n, s'il contient des parties partout denses sur des ensembles simples à n dimensions et ne contient aucune partie partout dense sur un ensemble simple à $n+1$ dimensions.

On vérifie aisément que les conventions faites répondent à tous les postulats ci-dessus. Mais on ne sait pas s'il n'y a d'autres conventions y répondant de même. La solution de cette question comporte bien des difficultés; les méthodes employées jusqu'ici pour traiter les ensembles de points n'y suffisent pas. Mais, pour les ensembles discontinus, le théorème donné nous permet la réponse. Pour la dimension de ces ensembles, on peut, grâce à notre théorème et au postulat 4°, se borner à des ensembles discontinus situés sur une droite. L'ensemble complexe formé de n quelconques de tels ensembles sera lui-même un ensemble discontinu, sera donc situé sur une courbe simple, et sa dimension ne sera pas plus grande que 1. Alors, l'ensemble discontinu E étant de dimension d, on a $nd \leqq 1$, pour chaque nombre positif entier n. D'autre part, d'après 1° et 3°, $nd \geqq d$ pour chaque ensemble de points; donc le nombre de dimensions ne peut jamais être négatif. Alors, d est précisément 0. Ce qui prouve que *chaque ensemble discontinu est nécessairement de dimension* 0.

De là, on conclut, pour une grande classe d'ensembles, l'uniformité de la solution du problème des dimensions. Mais, pour certaines classes d'ensembles, on ne sait rien.

PHYSIQUE. — *Recherches sur la gravitation.* Note de M. V. **Crémieu**, présentée par M. H. Poincaré.

Les phénomènes d'attraction entre gouttes liquides que j'ai précédemment décrits m'ont amené [1] à effectuer l'expérience de Cavendish en plongeant les masses attirantes fixes et les masses attirées mobiles au sein d'une même masse liquide.

La méthode des oscillations ne pouvant être utilisée, j'ai opéré avec une balance de torsion ayant un zéro stable et susceptible, sous l'action des attractions qu'on lui fait subir, de passer sans oscillation d'une position d'équilibre à une autre. La balance est disposée de telle sorte qu'on peut faire des mesures croisées dans l'air et dans un liquide; on n'a qu'à comparer alors les déviations obtenues sans se préoccuper de faire des mesures absolues.

Il fallait disposer d'une enceinte dans laquelle aucun courant gazeux ou liquide ne puisse prendre naissance.

Trois années d'études préliminaires m'ont amené à réaliser le dispositif que je vais très sommairement décrire.

---

[1] *Comptes rendus*, t. CXL, 1905, p. 80.