

TABLEAU II. — *Distribution des taches en latitude.*

1906.	Sud.							Nord.						Totaux mensuels.	Surfaces totales réduites.
	90°.	40°.	30°.	20°.	10°.	0°.	Somme.	Somme.	0°.	10°.	20°.	30°.	40°.		
Juillet.....	»	»	1	4	5		10	23	11	9	3	»	»	33	3408
Août.....	»	»	1	7	2		10	9	3	4	2	»	»	19	1480
Septembre..	»	»	1	6	4		11	14	8	4	2	»	»	25	1255
Totaux...	»	»	3	17	11		31	46	22	17	7	»	»	77	6143

TABLEAU III. — *Distribution des facules en latitude.*

1906.	Sud.							Nord.							Totaux mensuels.	Surfaces totales réduites.
	90°.	40°.	30°.	20°.	10°.	0°.	Somme.	Somme.	0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	90°.		
Juillet.....	»	»	2	8	3		13	25	9	10	6	»	»	38	41,5	
Août.....	»	»	3	6	1		10	19	5	7	7	»	»	29	36,4	
Septembre..	»	2	2	7	3		14	15	6	6	3	»	»	29	27,4	
Totaux...	»	2	7	21	7		37	59	20	23	16	»	»	96	105,3	

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les ensembles de fonctions.* Note
de M. FRÉDÉRIC RIESZ, présentée par M. Émile Picard.

1. La plupart des méthodes fécondes de la théorie des ensembles de points ne peuvent être appliquées dans la théorie des ensembles de fonctions. Cependant, en se bornant à des fonctions continues et à convergence uniforme, deux analogies se présentent. D'abord, l'ensemble des fonctions continues définies sur le même ensemble parfait contient un ensemble dénombrable partout dense, par exemple l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels. D'autre part, on peut faire correspondre à tout couple de fonctions f_1, f_2 un nombre $(f_1, f_2) \geq 0$, le maximum de $|f_1 - f_2|$, que nous appellerons l'écart des deux fonctions et qui jouira des deux propriétés suivantes : *a.* l'écart (f_1, f_2) n'est nul que si f_1 et f_2 sont identiques ; *b.* si f_1, f_2, f_3 sont trois fonctions quelconques, on a toujours $(f_1, f_2) \leq (f_1, f_3) + (f_2, f_3)$.

Dans sa Thèse (Paris, 1906), M. Fréchet montre comment une méthode bien connue de la théorie des ensembles de points peut être généralisée pour tous les ensembles présentant avec les ensembles de points les deux analogies ci-dessus, en particulier pour l'ensemble des fonctions continues définies sur le même ensemble parfait. Cette méthode consiste à définir

un ensemble dénombrable de domaines de fonctions de telle façon que la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f soit fonction limite de l'ensemble ε de fonctions soit que chacun de ces domaines qui contient la fonction f contienne au moins une fonction de ε différente de f .

L'application la plus intéressante de cette méthode est, je crois, le théorème que *chaque ensemble isolé de fonctions continues est fini ou dénombrable*. Le théorème reste *a fortiori* vrai, si l'on admet la convergence la plus générale.

2. Envisageons l'ensemble de fonctions continues définies sur un ensemble parfait. On dit que les fonctions f_1, f_2 de l'ensemble sont *orthogonales* si l'intégrale définie de leur produit pris sur l'ensemble parfait est nulle. Un système orthogonal, c'est-à-dire un système de fonctions orthogonales deux à deux, est dit *complet*, s'il n'y a pas de fonction continue orthogonale par rapport à toutes les fonctions du système.

L'année dernière, dans une séance de la Société mathématique, à Göttingen, M. E. Schmidt a énoncé le théorème suivant : *Tout système orthogonal complet est dénombrable*.

Étant donné un système fini de fonctions continues, on construit aisément une fonction continue, orthogonale par rapport à toutes les fonctions du système. Alors un système orthogonal complet ne peut être fini. Ainsi, pour démontrer le théorème de M. Schmidt, il suffit de prouver qu'un système orthogonal est fini ou dénombrable. Or, des propriétés définissant la notion de système orthogonal on déduit que chaque système tel constitue un ensemble isolé. Le théorème de M. Schmidt est donc une application du théorème sur les ensembles isolés. La démonstration donnée par M. Schmidt, mais qu'il n'a pas publiée, repose, comme il vient de me l'apprendre, sur des fondements tout à fait différents.

3. En admettant une notion plus générale de fonction que celle de fonction continue, est-ce que la méthode de M. Fréchet cesse d'être valable? Vraiment, si par exemple pour l'ensemble des fonctions de classes 0 et 1 on introduit la notion de l'écart définie comme pour les fonctions continues, la notion de l'écart ne peut plus être utilisée.

Est-ce qu'on doit chercher de nouvelles méthodes? Est-ce que le théorème sur les ensembles isolés n'a pas son analogue pour une classe plus générale de fonctions? Le concept de système orthogonal peut être défini pour la classe de toutes les fonctions bornées et intégrables sur le même ensemble parfait; soit qu'on admette la notion de l'intégrabilité donnée

par Riemann ou celle de M. Lebesgue, le théorème de M. Schmidt peut-il être généralisé?

Pour le théorème de M. Schmidt, on voit tout de suite une restriction à faire sans laquelle la généralisation serait impossible. En admettant la définition de l'intégrale de M. Lebesgue, il y a des fonctions de l'intégrale nulle (c'est-à-dire des fonctions dont la valeur absolue intégrée sur l'ensemble est nulle) sur chaque ensemble mesurable; alors il n'y aurait pas de système orthogonal complet. On voit que, si l'on veut espérer obtenir quelque résultat, il faut supprimer les fonctions de l'intégrale nulle; il faut les regarder comme équivalentes à la fonction identiquement nulle.

En fait, si l'on regarde comme identiques deux fonctions dont la différence est une fonction de l'intégrale nulle, on peut définir pour les fonctions intégrables une notion de distance, généralisation de la même notion pour les ensembles de points et qui jouira des propriétés analogues à celles de l'écart. On appellera distance $d(f_1, f_2)$ des fonctions f_1 et f_2 la valeur absolue de $\sqrt{\int (f_1 - f_2)^2}$, l'intégrale étant prise sur tout l'ensemble parfait. On n'aura $d(f_1, f_2) = 0$ que si la différence $f_1 - f_2$ est une fonction de l'intégrale nulle; et comme on le prouve aisément, pour trois fonctions quelconques f_1, f_2, f_3 , on a $d(f_1, f_2) = d(f_1, f_3) + d(f_2, f_3)$.

Je me bornerai à l'ensemble des fonctions bornées et intégrables au sens de M. Lebesgue, définies sur l'intervalle $0 \dots 2\pi$. Les raisonnements se généraliseront sans difficulté. Je dirai que la fonction f est fonction limite de l'ensemble E de fonctions, si la limite inférieure de ses distances par rapport à l'ensemble E est 0. Les fonctions dont la différence est une fonction de l'intégrale nulle seront en même temps fonctions limites ou non par rapport au même ensemble. En les regardant comme identiques, la définition donnée de la fonction limite permettra de faire usage de la méthode de M. Fréchet. En fait, les séries trigonométriques finies de coefficients rationnels forment un ensemble dénombrable partout dense, à l'aide duquel on définira un ensemble dénombrable de domaines de fonctions ayant, par rapport au nouveau principe de condensation, les mêmes propriétés que celles dont se sert M. Fréchet. Or, en appliquant la méthode de M. Fréchet, on sera en outre conduit au résultat : *Un ensemble de fonctions bornées et intégrables ne contenant pas deux fonctions qui ne diffèrent que pour un ensemble de mesure nulle et ne contenant aucune fonction limite, est fini ou dénombrable.*

4. Pour généraliser le théorème de M. Schmidt, on réservera la défini-

tion de l'orthogonalité; on fera la restriction qu'un système orthogonal ne contienne aucune fonction de l'intégrale nulle. On définira le système orthogonal complet, comme un système tel qu'il n'y a pas de fonction autre que les fonctions de l'intégrale nulle, orthogonale par rapport à toutes les fonctions du système. Après ces restrictions, le théorème restera valable pour notre classe étendue de fonctions.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes.*
Note de M. GAMBIE, présentée par M. Painlevé.

Dans une Note précédente (18 juin 1906) j'ai annoncé que je procédais à une revision minutieuse des Tableaux dressés par M. Painlevé pour les équations $y'' = R(y', y, x)$, où R est rationnel en y' et y et analytique en x . Je rappelle que, par une transformation $Y = \frac{l(x)y + m(x)}{p(x)y + q(x)}$, ces équations peuvent être ramenées à la forme

$$Y'' = A(Y, X)Y'^2 + B(Y, X)Y' + C(Y, X)$$

où A est l'une des huit expressions qu'indique M. Painlevé dans son Mémoire (*Acta mathematica*, 1902, p. 30).

Les Tableaux de M. Painlevé relatifs au cas $A = 0$ et au cas $A = \frac{1}{Y}$ sont complets; mais dans l'application de sa méthode, M. Painlevé avait laissé échapper certaines équations du cas $A = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{Y}$; j'ai énuméré ces équations dans deux Notes des *Comptes rendus* (18 et 25 juin 1906).

Comme les résultats de la discussion de ce troisième cas jouent un rôle essentiel dans la discussion des cinq cas suivants, cette omission entraîne d'autres dans ces cinq cas. Je vais les énumérer ici pour

$$A = \frac{1}{2Y} + \frac{1}{Y-1} \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1} + \frac{1}{Y-H} \right).$$

Cas où $A(Y, X) = \frac{1}{2Y} + \frac{1}{Y-1}$. — Une transformation préalable $Y = y$, $x = \lambda(X)$ ou $Y = \frac{1}{y}$, $x = \lambda(X)$, où λ est une fonction algébrique des coefficients de l'équation proposée, permet de ramener cette équation à l'un