Korollar: *Für ein reelles Klassenpaar (K), (K̆) und nur für dieses beträgt die Summe der Anzahlen der l. u. „eigentlichen" überall endlichen Integrale $n(s-2)$, oder m. a. W. das Periodenschema wird quadratisch.*[1])

Schlußbemerkung.

Durch die in § 7 gegebene Charakterisierung ist die wichtigste und seit dem Erscheinen des Riemannschen Fragmentes: „Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen", Ges. Werke, 2. Aufl. 1892. S. 379ff. offen gelassene Frage in der einfachsten Weise beantwortet und dasselbe zu einem gewissen Abschluß gebracht.

Eine ausführlichere und tiefer eindringendere Theorie der Elementarfunktionen und Differentiale, bei der sich alle Zusammenhänge zwischen denselben — soweit sie arithmetischer Natur sind — ergeben werden, führe ich in einer Reihe folgender Arbeiten durch.[2])

Über Integration unendlicher Folgen.

Von FRIEDRICH RIESZ in Kolozsvár.

Ich teile hier einen elementaren Beweis für den Osgoodschen Satz mit, nach welchem *jede beschränkte Folge von längs eines Intervalls abstetigen Funktionen $f_n(x)$, die gegen eine ebenfalls stetige Grenzfunktion $f(x)$ konvergieren, gliedweise integriert werden darf.*[3]) Ich kam zu diesem Beweise im Laufe von Untersuchungen über die Grundlagen der Lebesgueschen Integrationstheorie, über die ich an anderer Stelle berichte.[4]) Bekanntlich spielt in dieser Theorie der entsprechend er-

---

1) S. A. Hirsch, Über bilineare Relationen zwischen den Perioden der Integrale reziproker Formenscharen, Math. Ann. Bd. 54 (1901) S. 241 und O. Haupt, Bemerkung über die Integrale Riemannscher Funktionsscharen, Sitz.-Ber. d. Heidelberger Ak. d. Wissensch. Math. Klasse, Abt. A. Jahrgang 1914, S. 9.

2) I. Die Elementartheoreme und die Vertauschungstheoreme 1. Ordnung bei den Riemannschen Transzendenten. Berlin, 6. Juni 1917. — II. Funktionen- und zahlentheoretische Analogien. Berlin, 27. Juni 1917. — III. Neue Beiträge zur Charakterisierung der Riemannschen Transzendenten. Berlin, 4. September 1917. — IV. Die Vertauschungstheoreme bei den Riemannschen Transzendenten. Berlin, 26. September 1917. — V. Die Reduktions- und Reziprozitätstheoreme bei den Riemannschen Transzendenten. Berlin, 24. November 1917.

3) W. F. Osgood, *Non-uniform convergence and the integration of series term by term,* American Journal, vol. XIX (1897), p. 155—190.

4) F. Riesz, *Sur l'intégrale de Lebesgue* (erscheint in den Acta mathematica); vgl. auch die Note: *Sur quelques points de la théorie des fonctions sommables,* Comptes rendus. le 4 mars 1912.

weiterte Satz[1]) eine äußerst wichtige Rolle; dagegen finde ich, daß dem Osgoodschen Satze seinerzeit keineswegs jene Würdigung und Verbreitung zuteil wurde, die eine derart einfache Verallgemeinerung von klassischen Sätzen, welche auch noch den Elementen der Analysis angehört, sicher verdient hätte. Es dürfte dies besonders daran gelegen sein, daß der Verfasser seinen Satz inmitten von verwandten Fragestellungen etwas verborgen darstellte.

Um den Beweis zu führen, bemerke ich erstens, daß der allgemeine Fall sich unmittelbar auf jenen zurückführen läßt, wo die Funktionen $f_n(x)$ sämtlich nicht-negativ sind, während $f(x)$ identisch gleich Null ist. In der Tat folgt aus der Annahme

$$|f_n(x)| < G \qquad (n=1,2,\cdots)$$

auch $\quad |f(x)| \leqq G \quad$ und somit $\quad |f_n(x) - f(x)| < 2G;$

da ferner aus $\quad f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad$ auch $\quad |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$

folgt und mit den $f_n(x)$ und $f(x)$ zugleich auch die Funktionen $|f_n(x) - f(x)|$ stetig sind, so sind die spezielleren Voraussetzungen für die Folge $\{|f_n - f|\}$ erfüllt; gilt daher der Satz unter diesen spezielleren Voraussetzungen, so hält das Integral von $|f_n(x) - f(x)|$ gegen Null, woraus sich dann auf Grund der Abschätzung

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx\right| \leqq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx$$

die Grenzgleichung $\quad \int_a^b f_n(x)\,dx \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \quad$ ergibt.

Es bleibt uns somit zu zeigen, daß für eine beschränkte Folge stetiger, nicht-negativer Funktionen $f_n(x)$, die längs des Intervalls ab gegen Null konvergieren, die Grenzgleichung

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \longrightarrow 0$$

besteht. Wir machen zunächst auch noch die weitere einschränkende Annahme, daß für alle n $\quad f_{n+1}(x) \leqq f_n(x)$

sei, d. h. daß die Folge monoton abnehme. Dann ist nach einem Satze von Dini die Konvergenz eine gleichmäßige und somit die gliedweise

1) H. Lebesgue, *Intégrale, longueur, aire,* Thèse, Paris 1902 (erschien auch in den Annali di Matematica, ser. 3, t. 7, p. 231—359); *Leçons sur l'intégration* Paris 1904, p. 114. — Für den Fall Riemannscher Integrierbarkeit der auftretenden Funktionen wurde der Osgoodsche Satz schon von C. Arzelà verallgemeinert: *Sulle serie di funzioni* (parte seconda), Memorie Accad. Bologna 1900, p. 701—744, vgl. speziell p. 723/4. Der obenstehende Beweis läßt sich leicht auf den Arzeläschen Satz ausdehnen.

Integration gestattet. Ohne den Dinischen Satz kann man so schließen: Die Integrale bilden eine monoton abnehmende Folge von nicht-negativen Zahlen und streben daher einem Grenzwerte $I_0 \geqq 0$ zu. Teilt man das Intervall ab in zwei gleiche Teile, so gilt dasselbe für beide Teilintervalle, und es ist für wenigstens eines derselben der entsprechende Grenzwert $I_1 \geqq \frac{I_0}{2}$. Durch fortgesetztes Halbieren ergibt sich eine unendliche Folge ineinander geschachtelter Intervalle, die auf einen einzigen Grenzpunkt x^* zusammenschrumpfen; für alle diese Intervalle sind die entsprechenden Grenzwerte

$$I_k \geqq \frac{I_0}{2^k}.$$

Es sei nun andererseits ε eine beliebig klein gewählte positive Größe; dann gibt es infolge der Voraussetzung $f_n(x) \longrightarrow 0$ eine Zahl n derart, daß

$$f_n(x^*) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist; ferner gibt es zufolge der Stetigkeit von $f_n(x)$ eine Umgebung $x^* - \delta < x < x^* + \delta$ von x^* derart, daß für alle Punkte x dieser Umgebung

$$|f_n(x^*) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. Dann ist auch für alle Punkte x der Umgebung

$$f_n(x) < \varepsilon.$$

Nun sind aber die oben betrachteten Intervalle für genügend große Werte k in der Umgebung $(x^* - \delta,\ x^* + \delta)$ enthalten; daher ist für dieselben

$$I_k < \varepsilon \frac{b-a}{2^k}.$$

Somit ist auch

$$\frac{I_0}{2^k} \leqq I_k < \varepsilon \frac{b-a}{2^k},$$

d. h. $I_0 < \varepsilon(b-a)$. Da ε beliebig klein gewählt werden darf, während I_0 eine feste nicht-negative Zahl ist, so folgt hieraus $I_0 = 0$. Damit ist der betrachtete Spezialfall erledigt.

Es sei nun allgemein $\{f_n(x)\}$ eine beschränkte Folge stetiger nicht-negativer Funktionen, die längs des Intervalls ab gegen Null konvergieren. Wir bezeichnen mit $f_m^n(x)$ (wo $m \leqq n$) jene sicher stetige Funktion, deren Wert an jeder Stelle x gleich ist dem *größten* unter den Werten $f_m(x)$, $f_{m+1}(x)$, ... $f_n(x)$. Das Integral längs ab von $f_m^n(x)$ bezeichnen wir mit I_m^n. Hält man m fest und läßt n ins Unendliche wachsen, so bilden die Zahlen I_m^n eine steigende Folge, die sicher beschränkt ist, da mit den $f_k(x)$ zugleich auch die $f_m^n(x)$ unterhalb einer

Schranke G liegen und daher $I_m^n < (b-a)G$ ist. Somit hält jene Folge gegen einen Grenzwert J_m. Da nun $f_m \leqq f_m^n$ ist, so ist auch ihr Integral $\leqq I_m^n \leqq J_m$. Gelingt es daher zu zeigen, daß

$$J_m \to 0,$$

so folgt daraus auch
$$\int_a^b f_m(x)\,dx \to 0,$$

d. i. die Behauptung unseres Satzes.

Es sei nun σ eine beliebig kleine positive Größe, und es sei $n = n_1$ eine Zahl, für welche $I_1^n > J_1 - \frac{\sigma}{2}$ ist, z. B. die erste solche Zahl, es sei dann $n = n_2$ eine auf n_1 folgende Zahl, für welche $I_2^n > J_2 - \frac{\sigma}{4}$ ist und so fort, allgemein $n = n_m$ eine auf n_{m-1} folgende Zahl, für welche $I_m^n > J_m - \frac{\sigma}{2^m}$ wird. Endlich bedeute $g_m(x)$ jene sicher stetige Funktion, die an jeder Stelle x gleich dem *kleinsten* unter den Werten $f_1^{n_1}(x), f_2^{n_2}(x), \ldots, f_m^{n_m}(x)$ ist. Ich behaupte, daß

$$\int_a^b g_m(x)\,dx > J_m - \sigma\left(1 - \frac{1}{2^m}\right) > J_m - \sigma$$

ist. Für $m = 1$ ist die Behauptung auf Grund der über $I_1^{n_1}$ gemachten Voraussetzung richtig, da doch $g_1(x) = f_1^{n_1}(x)$ ist. Es genügt somit, von $m-1$ auf m zu schließen. Nehmen wir also an, es sei

$$\int_a^b g_{m-1}(x)\,dx > J_{m-1} - \sigma\left(1 - \frac{1}{2^{m-1}}\right).$$

Da die Funktion $g_m(x)$ an jeder Stelle x gleich dem kleineren unter den beiden Werten $g_{m-1}(x)$ und $f_m^{n_m}(x)$, also auch gleich der Summe der beiden Werte vermindert um den größeren unter ihnen ist, während dieser größere Wert wegen $g_{m-1}(x) \leqq f_{m-1}^{n_{m-1}}(x)$ keinesfalls den größeren der beiden Werte $f_{m-1}^{n_{m-1}}(x)$ und $f_m^{n_m}(x)$, das ist den Wert von $f_{m-1}^{n_m}(x)$ übersteigt, so ist

$$g_m(x) \geqq g_{m-1}(x) + f_m^{n_m}(x) - f_{m-1}^{n_m}(x);$$

die entsprechende Ungleichung besteht auch für die Integrale dieser Funktionen, woraus auf Grund der Ungleichungen

$$\int_a^b g_{m-1}(x)\,dx > J_{m-1} - \sigma\left(1 - \frac{1}{2^{m-1}}\right), \quad I_m^{n_m} > J_m - \frac{\sigma}{2^m}, \quad I_{m-1}^{n_m} \leqq J_{m-1}$$

die zu beweisende Ungleichung folgt:

$$\int_a^b g_m(x)\,dx > J_{m-1} - \sigma\left(1 - \frac{1}{2^{m-1}}\right) + J_m - \frac{\sigma}{2^m} - J_{m-1}$$
$$= J_m - \sigma\left(1 - \frac{1}{2^m}\right) > J_m - \sigma.$$

Nun aber bilden die Funktionen $g_m(x)$ eine monoton abnehmende Folge, und zwar da $g_m(x) \leqq f_m^{n_m}(x) = f_\nu(x)$ ist, wo ν für jeden Wert x eine (im allgemeinen von x abhängende) Zahl $\geqq m$, nämlich eine der Zahlen $m, m+1, \cdots, n_m$ bedeutet, so folgt aus $f_m(x) \to 0$ auch

$$g_m(x) \to 0.$$

Wir befinden uns daher in dem oben erledigten Spezialfall, und das Integral von $g_m(x)$ hält daher gegen Null. Auf Grund der soeben bewiesenen Ungleichung folgt daraus, daß auch

$$J_m - \sigma$$

unter jede positive Zahl, speziell also auch unter σ herabsinken muß, daß somit für genügend große m sicher

$$J_m < 2\sigma$$

wird. Da die J_m nicht-negativ sind und σ beliebig klein gewählt werden darf, so folgt schließlich $\qquad J_m \to 0$

und damit die Richtigkeit des Osgoodschen Satzes.

Der Beweis gilt auch, ohne wesentliche Änderung, für Funktionen von mehreren Veränderlichen.

Einfaches Beispiel einer stetigen, nirgends differenzierbaren Funktion.

Von Konrad Knopp in Berlin-Lichterfelde.

G. Faber hat im 16. Bande dieser Berichte (1907; S. 538) ein überaus einfaches und besonders für Vorlesungszwecke geeignetes Beispiel einer stetigen nirgends differenzierbaren Funktion gegeben. Immerhin hat es gegenüber dem klassischen Beispiel von Weierstraß den Nachteil, von einer künstlichen Funktion, nämlich der durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{in } 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2} \\ 1 - x, & \text{in } \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

und die Periodizitätsbedingung $f(x+1) = f(x)$ definierten Funktion auszugehen. Faber zeigt dann nämlich, daß

$$y = F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{10^\nu} f(2^{\nu!} x)$$

durchweg stetig, aber nirgends differenzierbar ist.