SUR CERTAINS SYSTÈMES SINGULIERS

D'ÉQUATIONS INTÉGRALES,

Par M. Frédéric RIESZ,

à Budapest.

I.

Dans ce qui suit, les fonctions à variation bornée vont jouer un rôle principal. On connaît bien l'importance de cette classe de fonctions définies par M. Jordan, dont la plupart des propriétés remarquables deviennent presque évidentes après en avoir énoncé une seule : savoir que toute fonction réelle à variation bornée est la différence de deux fonctions bornées jamais décroissantes.

Posons le problème suivant : *Étant donnée une fonction* $A(x)$, *il faut reconnaître s'il existe ou non une fonction à variation bornée* $\alpha(x)$ *dont elle est l'intégrale indéfinie ?*

La question analogue portant sur l'une ou l'autre classe de fonctions se pose toujours, quand il s'agit de déterminer une fonction, solution de n'importe quel problème, et il est plus facile de calculer d'abord sa fonction primitive. On y connaît la réponse pour certaines classes : ainsi par exemple, grâce à des résultats développés par plusieurs géomètres pendant ces dernières années, on sait reconnaître les intégrales indéfinies des fonctions sommables, de celles de carrés sommables, etc. Quant aux fonctions à variation bornée, j'ai énoncé il y a quelque temps une condition nécessaire et suffisante (1) ; j'y reviens dans le présent Mémoire.

(1) *Sur les opérations fonctionnelles linéaires* (*Comptes rendus*, 29 novembre 1909).

Cherchons d'abord à développer une condition nécessaire. Supposons que $A(x)$ est l'intégrale indéfinie de la fonction réelle $\alpha(x)$, à variation bornée, définie dans l'intervalle (a, b); d'ailleurs $\alpha(x)$ peut être continue ou non. Décomposons l'intervalle (a, b) en un nombre fini d'intervalles partiels (x_k, x_{k+1}) $(k = 0, 1, \ldots, m-1; x_0 = a, x_m = b)$ et envisageons l'expression

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{m-1} \left| \frac{A(x_{k+1}) - A(x_k)}{x_{k+1} - x_k} - \frac{A(x_k) - A(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right|.$$

On a

$$\frac{A(x_{k+1}) - A(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\int_{x_k}^{x_{k+1}} \alpha(x)\,dx}{x_{k+1} - x_k} = \beta_k;$$

β_k désigne une quantité déterminée, située entre les limites inférieure et supérieure de $\alpha(x)$ dans l'intervalle (x_k, x_{k+1}). Il en résulte que la valeur de la somme (1) ne peut pas surpasser la variation totale de $\alpha(x)$. C'est-à-dire toujours, quand $A(x)$ jouit de la propriété exigée, la somme (1) ne surpasse pas une certaine borne finie, indépendante du nombre des intervalles partiels et de la manière de décomposition. Voilà donc une condition *nécessaire*; nous allons voir que cette condition est en même temps *suffisante*.

Supposons la condition remplie; soit G la borne supérieure. Cherchons à déterminer une fonction $\alpha(x)$ à variation bornée dont $A(x)$ est l'intégrale indéfinie.

En réalité, la fonction $A(x)$ admet des dérivées à gauche et à droite. Quant à notre but, il nous suffira de démontrer qu'elle admet l'un quelconque des quatre nombres dérivés, et que celui-ci représente une fonction à variation bornée. Car toute fonction à variation bornée est intégrable au sens de Riemann, et quand un nombre dérivé est intégrable, sa fonction primitive en est l'intégrale indéfinie ([1]).

Or, soit h une quantité positive $< \frac{b-a}{3}$; notre condition étant rem-

---

J'y ai annoncé brièvement les résultats que je développe dans les paragraphes I à III du présent Mémoire; le contenu des paragraphes IV à VIII était résumé dans une seconde Note : *Sur certains systèmes d'équations fonctionnelles et l'approximation des fonctions continues* (*Comptes rendus*, 14 mars 1910).

([1]) *Voir* H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, p. 81.

plie, on en déduit aisément que pour x quelconque et $|h'| < h$, le rapport $\frac{A(x+h') - A(x)}{h'}$ ne peut pas surpasser en module la plus grande des quantités

$$G + \left|\frac{A(a+h) - A(a)}{h}\right|, \qquad G + \left|\frac{A(b-h) - A(b)}{h}\right|.$$

On en conclut que la fonction $A(x)$ admet des nombres dérivés bornés. Soit $\alpha(x)$ un des nombres dérivés, par exemple le nombre dérivé supérieur à droite; la fonction $\alpha(x)$ étant ainsi déterminée pour $a \leqq x < b$, complétons sa définition en posant $\alpha(b)$ égal au nombre dérivé supérieur à gauche en b.

La fonction $\alpha(x)$ est à variation bornée; sa variation totale ne surpasse pas G. En effet, décomposons l'intervalle (a, b) d'une manière quelconque en un nombre fini d'intervalles partiels

$$(x_k, x_{k+1}) \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1;\ x_0 = a,\ x_m = b$$

nous aurons à prouver que la valeur de la somme

$$\sum_{k=0}^{m-1} |\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)| \tag{2}$$

ne surpasse pas G. Or, pour avoir une valeur approchée de cette somme, n'en différant qu'aussi peu qu'on veut, on va remplacer $\alpha(x_k)$ par $\frac{A(x_k + h_k) - A(x_k)}{h_k}$, les quantités h_k, positives pour $k < m$, négative pour $k = m$, étant choisies d'une manière convenable; en même temps, on peut les supposer assez petites pour que les intervalles $(x_k, x_k + h_k)$ n'empiètent pas l'un sur l'autre. Or, il est évident que la somme (2) ainsi modifiée ne surpasse pas G; l'approximation étant aussi grande qu'on veut, on en conclut que la somme (2) elle-même ne surpasse pas G. Ce fait ne dépend point de la manière de décomposer l'intervalle (a, b); par conséquent, la fonction $\alpha(x)$ est à variation bornée et sa variation totale ne surpasse pas G. On en conclut aussi, en appliquant le théorème déjà cité, que la fonction donnée $A(x)$ est l'intégrale indéfinie de $\alpha(x)$.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que les fonctions $A(x)$,

$\alpha(x)$ sont réelles. Nos conclusions s'étendent au cas général de fonctions à valeurs complexes. Pour s'en rendre compte il ne faut que décomposer les fonctions en partie réelle et imaginaire ; toujours que la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ en $A(x)$ satisfont séparément à notre condition par rapport aux bornes G_1, G_2, la fonction $A(x)$ elle-même y satisfera et $G_1 + G_2$ donnera une borne convenable. D'autre part, $A(x)$ elle-même remplissant notre condition par rapport à une borne G, sa partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ la remplissent aussi par rapport à la même borne.

Énonçons notre résultat : *A ce que la fonction* $A(x)$ *définie dans l'intervalle* (a, b), *réelle ou non, soit l'intégrale indéfinie d'une fonction à variation bornée, il faut et il suffit que la valeur de la somme* (1) *ne surpasse pas une certaine borne finie, indépendante du nombre des intervalles partiels et de la manière dont on décompose l'intervalle* (a, b).

D'une façon plus précise, la fonction $A(x)$ est l'intégrale indéfinie d'une fonction dont la variation totale est égale à la plus petite de ces bornes supérieures. Quant aux fonctions réelles, ce fait découle immédiatement des considérations ci-dessus; on pourrait aussi adapter ces considérations au cas général. Pourtant, le fait énoncé suit aussi, dans toute sa généralité, des développements du paragraphe II.

II.

Considérons l'intégrale de Stieltjes

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x). \tag{3}$$

Nous y entendons, quand elle existe, la limite de la somme

$$\sum_k f(\xi_k)\,[\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)], \tag{4}$$

correspondant à une décomposition de l'intervalle (a, b) en un nombre fini d'intervalles partiels ; ξ_k désigne un élément d'ailleurs quelconque de l'intervalle (x_k, x_{k+1}). Le passage à la limite n'est assujetti qu'à la seule condition que la longueur des intervalles partiels tende uniformément vers zéro.

Supposons $f(x)$ *continue*, $\alpha(x)$ *à variation bornée. En ce cas l'intégrale* (3) *existe et l'on a*

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right| \leqq \text{maximum de } |f(x)| \times \text{variation totale de } \alpha(x). \tag{5}$$

En effet, si l'intégrale (3) existe, l'inégalité (5) suit immédiatement de l'inégalité analogue portant sur (4), d'ailleurs évidente. Or, dans les conditions posées, l'intégrale (3) existe. Car la différence de deux sommes comme (4) correspondant à deux décompositions ne peut pas surpasser en module la valeur

$$|\varepsilon| \times \text{variation totale de } \alpha(x);$$

nous y désignons par ε l'oscillation la plus grande en module de $f(x)$ dans les intervalles dont la longueur ne surpasse pas le double de celle du plus grand intervalle entrant dans nos deux décompositions. La fonction $f(x)$ étant supposée continue, ε tend vers zéro, pendant que l'on passe de (4) à la limite (3). On en conclut que l'intégrale (3) existe.

En appliquant une transformation bien connue remontant à Abel, on voit sans peine que dans les conditions posées, l'intégrale

$$\int_a^b \alpha(x)\,df(x) \tag{6}$$

existe aussi ; en même temps, on établit la relation

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) + \int_a^b \alpha(x)\,df(x) = f(b)\,\alpha(b) - f(a)\,\alpha(a) \quad [1]. \tag{7}$$

Introduisons encore la fonction

$$\mathrm{A}(x) = \int_a^x \alpha(x)\,dx + \mathrm{A}(a),$$

---

(1) *Cf.* le Mémoire de Stieltjes, *Recherches sur les fonctions continues* (*Académie des Sciences : Mémoires présentés par divers savants*, t. XXXII, n° 2; *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. VIII, 1894).

intégrale indéfinie de $\alpha(x)$. La somme

$$\sum_k \frac{[f(x_{k+1})-f(x_k)][A(x_{k+1})-A(x_k)]}{x_{k+1}-x_k},$$

correspondant à une certaine division de (a, b) et la somme correspondant à la même division

$$\sum_k [f(x_{k+1})-f(x_k)]\,\alpha(\xi_k)$$

qui sert à définir l'intégrale (6), ne diffèrent que d'une quantité $\leqq$ en module que

$$\text{maximum de } |f(x_{k+1})-f(x_k)| \times \text{variation totale de } \alpha(x).$$

Par conséquent, ces deux sommes tendent vers la même limite (6) qu'on pourra aussi désigner par

$$\int_a^b \frac{df\,dA}{dx}.$$

En vertu de (7) on aura

$$(8)\qquad \int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(b)\,\alpha(b) - f(a)\,\alpha(a) - \int_a^b \frac{df(x)\,dA(x)}{dx}.$$

Quelques remarques nous seront utiles. Examinons d'abord si l'on peut modifier la fonction $\alpha(x)$, sans modifier en même temps les valeurs des intégrales (3). Ce qu'on voit immédiatement, c'est que *si l'on ajoute à $\alpha(x)$ une constante, la valeur de (3) ne change pas.* Grâce à la continuité des $f(x)$, on voit aussi sans peine que si l'on attribue à $\alpha(x)$ en un nombre fini de points x intérieurs à (a, b) des valeurs nouvelles quelconques, ce changement ne portera pas non plus sur la valeur de notre intégrale. Mais on a de plus : L'ensemble des points où l'on modifie $\alpha(x)$ peut devenir *infini dénombrable*, sans que cette modification entraîne quelque changement des valeurs (3). Le théorème qui suit mettra en évidence toutes les modifications permises : *A ce que l'intégrale (3) s'annule pour toute fonction continue $f(x)$, il faut et il suffit que la fonction à variation bornée $\alpha(x)$ soit constante sur tout l'inter-*

valle (a, b), *sauf au plus sur un ensemble dénombrable, ne contenant pas les points* a, b.

En effet, supposons la fonction $\alpha(x)$ d'être telle que toutes les intégrales (3) s'annulent. Posons dans (7) successivement $f(x) \equiv 1$; $f(x) = x$ pour $a \leqq x \leqq \xi$, $f(x) = \xi$ pour $x > \xi$. Il en résulte

$$\alpha(a) = \alpha(b), \qquad \int_a^x \alpha(x)\,dx = \alpha(a)\,x;$$

on en tire (les fonctions à variation bornée devant être continues, sauf au plus sur un ensemble dénombrable) que sauf cet ensemble $\alpha(x) = \alpha(a) = \alpha(b)$. D'autre part, pour voir que notre condition suffit, supposons que $\alpha(a) = \alpha(b) = \alpha(x)$, sauf au plus sur un ensemble dénombrable; dans ce cas on a

$$\mathrm{A}(x) = \int_a^x \alpha(x)\,dx = \alpha(a)\,x,$$

et de l'identité (8) découle immédiatement

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = 0.$$

Voilà une conséquence remarquable de ce théorème: *En tous les points de discontinuité de* $\alpha(x)$ *intérieurs à l'intervalle* (a, b) *on peut remplacer* $\alpha(x)$ *soit par* $\alpha(x-0)$, *soit par* $\alpha(x+0)$, *soit par une quelconque des valeurs* $\theta\,\alpha(x-0) + (1-\theta)\,\alpha(x+0)$ $[0 < \theta < 1]$, *sans modifier en même temps les valeurs* (3). Certes ce procédé *n'augmentera pas la variation totale de* $\alpha(x)$; au contraire elle la *diminue toujours que* $\alpha(x)$ *n'égale* $\theta\,\alpha(x-0) + (1-\theta)\,\alpha(x+0)$ *pour aucune valeur* $0 \leqq \theta \leqq 1$.

Quant aux fonctions $\alpha(x)$ telles qu'en tout point intérieur à (a, b), $\alpha(x)$ coïncide avec une des valeurs $\theta\alpha(x-0) + (1-\theta)\alpha(x+0)$, θ variant de 0 jusqu'à 1, la variation totale de $\alpha(x)$ ne pourra pas être diminuée sans que l'une ou l'autre des valeurs (3) change. Ce qui suit de l'inégalité (5), si l'on y ajoute la remarque suivante : *Quant à ces fonctions* $\alpha(x)$ *on peut choisir* $f(x)$ *de telle sorte que*

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right| > \text{maximum de } |f(x)| \times [-\varepsilon + \text{variation totale de } \alpha(x)];$$

ε *désignant une quantité positive aussi petite qu'on veut.* En effet, par définition, on peut approcher la variation totale de $\alpha(x)$ à $\frac{\varepsilon}{2}$ près par la somme

$$\sum_{k=0}^{m-1} |\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)| \qquad (x_0 = a < x_1 < \ldots < x_m = b);$$

on n'a qu'à choisir convenablement les points de division x_k; *dans les conditions actuelles, on pourra, quant au choix de ces points, se borner aux points de continuité de* $\alpha(x)$. En délimitant autour de ces points de division des intervalles assez petits, dans lesquels l'oscillation de $\alpha(x)$ ne surpasse pas en module la quantité $\frac{\varepsilon}{6(m-1)}$, on pose dans les intervalles (y, z) qui restent

$$f(x) = \overline{\text{sign}}[\alpha(z) - \alpha(y)] \quad (^1);$$

pour accomplir la définition de la fonction continue $f(x)$, on la suppose linéaire dans les petits intervalles exclus.

III.

Envisageons la totalité Ω des fonctions continues $f(x)$, réelles ou non, définies pour l'intervalle (a, b). Pour la classe Ω, nous définissons la notion de *fonction limite* par l'hypothèse de la *convergence uniforme*. L'opération fonctionnelle $A[f(x)]$ faisant correspondre à chaque élément de Ω un nombre déterminé, réel ou non, sera dite *continue* si $f(x)$ étant fonction limite des $f_i(x)$, $A[f_i]$ tend vers $A[f]$. Toute opération distributive et continue sera dite *linéaire*.

Par exemple, $a(x)$ désignant une fonction quelconque sommable sur (a, b), la loi

$$A[f(x)] = \int_a^b a(x) f(x)\, dx \tag{9}$$

---

(1) Ici, et dans la suite, nous posons $\text{sign}\, z = e^{\varphi\sqrt{-1}}$, $\overline{\text{sign}}\, z = e^{-\varphi\sqrt{-1}}$, où $z = r e^{\varphi\sqrt{-1}}$, $r > 0$; $\text{sign}\, 0 = \overline{\text{sign}}\, 0 = 0$.

définit une opération linéaire. D'autre part, l'opération linéaire $A[f(x)] = f(x_0)$, où x_0 désigne un point déterminé sur (a, b), ne peut pas être mise sous la forme (9). M. Hadamard avait démontré le fait remarquable que *chaque opération linéaire est la limite d'une suite d'opérations de la forme* (9); d'une façon plus précise, le théorème de M. Hadamard affirme l'existence d'une suite de fonctions continues $\{a_n(x)\}$ telles que

$$A[f(x)] = \lim_{n=\infty} \int_a^b a_n(x) f(x)\, dx \quad (^1).$$

Nous allons montrer que *toute opération linéaire s'exprime par une intégrale de Stieltjes*. La réciproque suit de l'inégalité (5): $\alpha(x)$ désignant une fonction à variation bornée bien déterminée, *l'intégrale* (3) *définit une opération linéaire.*

Commençons par établir le lemme suivant : $A[f(x)]$ *désignant une opération linéaire quelconque, on y peut attacher un nombre positif* M_A *tel que pour toute fonction continue* $f(x)$

$$(10) \qquad |A[f(x)]| \leqq M_A \times \text{maximum de } |f(x)|.$$

En effet, au cas contraire, il existerait une suite infinie de fonctions continues $\{f_k(x)\}$, telles que

$$|f_k(x)| \leqq 1, \qquad |A[f_k(x)]| > k^2.$$

Or, la série

$$\sum_{k=1} \frac{f_k(x)}{k^2} \overline{\text{sign}}\, A[f_k(x)]$$

converge uniformément vers une fonction continue $f^*(x)$; et l'opération $A[f]$ étant supposée continue, il faudrait avoir

$$A[f^*(x)] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|A[f_k(x)]|}{k^2}.$$

---

(1) *Sur les opérations fonctionnelles* (*Comptes rendus*, 9 février 1903). *Cf.* aussi M. Fréchet, *Sur les opérations linéaires* (*Transactions of the American Mathematical Society*, t. V, 1904, p. 493-499); J. Hadamard, *Leçons sur le calcul des variations*, recueillies par M. Fréchet. Paris, 1910.

Mais la série à droite diverge évidemment; par conséquent notre lemme est établi.

Après ces préliminaires, étant donnée l'opération linéaire $A[f(x)]$, on définira la fonction $A(x)$ par la formule $A(\xi) = -A[f(x, \xi)]$, où l'on désigne par $f(x, \xi)$ la fonction égale à x pour $a \leqq x \leqq \xi$, et à ξ pour $x > \xi$. Ceci posé, décomposons l'intervalle (a, b) en un nombre fini d'intervalles partiels (x_k, x_{k+1}) $(k = 0, 1, \ldots, m-1; x_0 = a, x_m = b)$ et définissons les $m-1$ fonctions continues $f_k(x)$ $(k = 1, \ldots, m-1)$ en posant $f_k(x) = 0$ pour $x \leqq x_{k-1}$ et $x \geqq x_{k+1}$,

$$f_k(x_k) = -\overline{\operatorname{sign}}\left[\frac{A(x_{k+1}) - A(x_k)}{x_{k+1} - x_k} - \frac{A(x_k) - A(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right],$$

$f_k(x)$ linéaire dans les intervalles (x_{k-1}, x_k), (x_k, x_{k+1}). Posons

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m-1} f_k(x);$$

on aura évidemment $|f(x)| \leqq 1$. Appliquons à $f(x)$ l'inégalité (10); il en résulte

$$\sum_{k=1}^{m-1}\left|\frac{A(x_{k+1}) - A(x_k)}{x_{k+1} - x_k} - \frac{A(x_k) - A(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right| = A[f(x)] \leqq M_A.$$

Nous en concluons qu'il existe des fonctions à variation bornée dont $A(x)$ est l'intégrale indéfinie; on en définira une, en posant pour les points x intérieurs à (a, b)

$$\alpha(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x-h)}{2h};$$

quant aux points a et b, posons $\alpha(b) = 0$, $\alpha(a) = A[u(x)]$, $u(x)$ désignant la fonction de valeur constante 1.

La fonction $\alpha(x)$ étant à variation bornée, l'intégrale (3) existe pour toute fonction continue $f(x)$. En particulier, lorsque la fonction $f(x)$ se compose d'un nombre fini de traits linéaires, la formule (8) nous apprend immédiatement que l'intégrale (3) donne $A[f(x)]$. En remarquant que chaque fonction continue est fonction limite de telles fonctions, et en s'appuyant sur les inégalités (5) et (10), on conclut que le même fait subsiste pour toute fonction continue $f(x)$. Ce qui donne le théorème suivant :

Étant donnée l'opération linéaire $A[f(x)]$, *on peut déterminer la fonction à variation bornée* $\alpha(x)$ *telle que pour toute fonction continue* $f(x)$ *on ait*

$$A[f(x)] = \int_a^b f(x)\,d\alpha(x).$$

Ajoutons quelques remarques concernant la variation totale de $\alpha(x)$. *Cette variation totale égale la limite supérieure de*

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right|,$$

la fonction $f(x)$ *variant sous la condition* $|f(x)| \leqq 1$. En effet, l'inégalité (5) nous apprend que la variation totale de $\alpha(x)$ n'est pas moindre que cette limite supérieure; d'autre part, elle ne peut la surpasser, car en vertu des remarques terminant le paragraphe II, la fonction $f(x)$ peut être choisie telle que $|f(x)| \leqq 1$, et que en même temps dans la formule (5) le signe $=$ tienne à ε près, ε désignant une quantité positive aussi petite qu'on veut.

IV.

Envisageons le système d'équations

$$\int_a^b f_k(x)\,d\alpha(x) = c_k \qquad (k = 1, 2, \ldots); \tag{11}$$

les fonctions données $f_k(x)$ sont supposées continues; quant à la fonction cherchée $\alpha(x)$, nous exigeons qu'elle soit à variation bornée.

Supposons qu'il existe une fonction $\alpha(x)$ dont la variation totale ne surpasse pas M et qui satisfasse à notre système d'équations; dans ces conditions, l'inégalité (5) nous apprend immédiatement que l'inégalité

$$\left|\sum^n \mu_k c_k\right| \leqq \mathrm{M} \times \text{maximum de} \left|\sum^n \mu_k f_k(x)\right| \tag{12}$$

a lieu quels que soient le nombre entier n et les nombres réels ou non μ_k. Ainsi *la validité de l'inégalité* (12) *est une condition nécessaire de ce que le système* (11) *admette une solution dont la variation totale ne surpasse pas* M.

Nous allons voir que cette condition est aussi *suffisante*.

Remarquons que ce que nous tentons à démontrer n'est qu'une extension du théorème concernant les opérations linéaires, développé au paragraphe précédent ; ce théorème correspondant au cas particulier d'un système (11) tel que toute fonction continue sur (a, b) y peut être approchée indéfiniment et uniformément par les $f_k(x)$ ou par leurs combinaisons linéaires. La méthode appliquée était adaptée à la nature de ce cas particulier et ne peut pas être étendue au problème général.

V.

Précisons encore le problème à traiter. Nous supposons notre condition remplie ; soit M la plus petite valeur telle que (12) tient pour tout n et tous les μ_k. L'inégalité (5) nous apprend que toujours, lorsque $\alpha(x)$ résout le système (11), sa variation totale $\geqq$ M. Nous allons montrer que *le signe = n'est jamais exclu*, c'est-à-dire qu'il existe une solution de (11) dont la variation totale = M.

En préliminaire, envisageons le cas particulier d'un nombre fini d'équations

$$(13) \qquad \int_a^b f_k(x)\,\xi(x)\,dx = c_k \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Nous supposons les fonctions continues $f_k(x)$ d'être linéairement indépendantes. Le système (13) admet une infinité de solutions $\xi(x)$, et toute fonction $\alpha(x) = \int_a^x \xi(x)\,dx$ résoudra le système (11) correspondant. Mais nous nous sommes proposé de *déterminer une solution de ce dernier système dont la variation totale soit la plus petite possible ; parmi les fonctions $\int_a^x \xi(x)\,dx$, il n'y aura pas, en général, de telle solution.* En général, aucune des fonctions $\xi(x)$, solutions de (13), ne rend minimum la valeur $\int_a^b |\xi(x)|\,dx$ = variation totale de $\int_a^x \xi(x)\,dx$. Ce qui est sûr, c'est que les valeurs $\int_a^b |\xi(x)|\,dx$ ont une limite inférieure $\geqq$ M; nous allons montrer que *cette limite égale précisément* M. Bien entendu, ce ne sera qu'un premier pas vers la solution du problème.

A ce but posons

$$\varphi(\mu, x) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k f_k(x), \qquad \overline{\varphi}(\mu, x) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mu}_k \overline{f}_k(x);$$

$$\gamma(\mu) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k c_k, \qquad \overline{\gamma}(\mu) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mu}_k \overline{c}_k,$$

où nous avons surligné les quantités conjuguées. Soit $2m$ un nombre pair d'ailleurs quelconque. Nous envisageons le problème de rendre maximum la valeur de l'expression

$$\Gamma(\mu) = |\gamma(\mu)|^2 = \gamma(\mu)\overline{\gamma}(\mu),$$

en variant les μ_k réels ou non sous la condition

$$\Phi(\mu) = \int_a^b |\varphi(\mu, x)|^{2m}\,dx = \int_a^b \varphi(\mu, x)^m\,\overline{\varphi}(\mu, x)^m\,dx = 1.$$

Or nous avons supposé les fonctions $f_k(x)$ d'être linéairement indépendantes; on en conclut aisément que les quantités μ_k admises ne peuvent pas surpasser en module une certaine borne finie. En effet, au cas contraire, il en existerait une suite indéfinie de fonctions de la forme $\varphi(\mu, x)$ telle que $\Phi(\mu)$ tende vers zéro et que dans chacune d'elles au moins un des nombres $\mu_k = 1$; on en tirerait, en vertu du théorème Bolzano-Weierstrass, une suite partielle tendant uniformément vers une fonction de la même forme et qui jouirait de la même propriété; quant à cette fonction, on aurait $\Phi(\mu) = 0$ sans que tous les μ_k s'annulent. Mais $\Phi(\mu) = 0$ entraîne $\varphi(\mu, x) \equiv 0$; les fonctions $f_k(x)$ étant linéairement indépendantes, nous voilà arrivés à une contradiction.

D'autre part, $\Gamma(\mu)$ et $\Phi(\mu)$ sont des fonctions continues des μ_k. Nous en concluons qu'il existe au moins un système de valeurs $\mu_k = \mu_k^{(0)}$ qui résout notre problème de maximum. Quant à ce problème, on peut y appliquer la méthode classique fournissant des conditions nécessaires d'un extremum relatif. En effet, les fonctions $\Gamma(\mu)$, $\Phi(\mu)$

admettent des dérivées continues par rapport aux $2n$ variables réelles $\mu'_k, \mu''_k (\mu_k = \mu'_k + \mu''_k \sqrt{-1})$, dont elles dépendent. Par conséquent, les $2n$ dérivées de $\Gamma + \lambda\Phi$ s'annulent pour $\mu_k = \mu_k^{(0)}$ et pour une valeur convenable du multiplicateur λ. Pour simplifier le calcul, nous envisageons les n combinaisons

$$\frac{\partial}{\partial \mu'_k} - \frac{\partial}{\partial \mu''_k}\sqrt{-1},$$

ces combinaisons s'annulant en même temps que les dérivées elles-mêmes. Nous serons conduits au système d'équations

$$c_j \overline{\gamma}(\mu) + \lambda m \int_a^b f_j(x) \, |\varphi(\mu, x)|^{2m-2} \, \overline{\varphi}(\mu, x) \, dx = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n);$$
$$\Phi(\mu) = 1.$$

En éliminant λ, notre système devient

$$\gamma(\mu) \int_a^b f_j(x) \, |\varphi(\mu, x)|^{2m-2} \, \overline{\varphi}(\mu, x) \, dx = c_j \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Les valeurs $\mu_k = \mu_k^{(0)}$ devant satisfaire à ce système, on en conclut que la fonction

$$(14) \qquad \xi^{(2m)}(x) = \gamma(\mu^{(0)}) \, |\varphi(\mu^{(0)}, x)|^{2m-2} \, \overline{\varphi}(\mu^{(0)}, x)$$

sera solution du système (13).

Ce qui nous intéresse le plus, c'est *la valeur de l'intégrale*

$$\int_a^b |\xi^{(2m)}(x)| \, dx,$$

c'est-à-dire la variation totale de $\alpha^{(2m)}(x) = \int_a^x \xi^{(2m)}(x) \, dx$.

On en trouve aisément une borne supérieure. En vertu de (14) on a

$$\int_a^b |\xi^{(2m)}(x)| \, dx = \Gamma(\mu^{(0)})^{\frac{1}{2}} \int_a^b |\varphi(\mu^{(0)}, x)|^{2m-1} \, dx.$$

On en tire, en appliquant l'inégalité

$$\left| \int_a^b g(x) \, h(x) \, dx \right| \leqq \left[\int_a^b |g(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b |h(x)|^{\frac{p}{p-1}} dx \right]^{\frac{p-1}{p}} \quad (^1),$$

---

(1) Pour $p = 2$, c'est l'inégalité bien connue de M. Schwarz, que l'on déduit aisément

aux données particulières $g(x) = 1$, $h(x) = |\varphi(\mu^{(0)}, x)|$, $p = 2m$,

$$\int_a^b |\xi^{(2m)}(x)|\, dx \leqq (b-a)^{\frac{1}{2m}} \Gamma(\mu^{(0)})^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$
$$\leqq (b-a)^{\frac{1}{2m}} \mathrm{M} \times \text{maximum de } |\varphi(\mu^{(0)}, x)|.$$

Éliminons encore la valeur : *maximum de* $|\varphi(\mu^{(0)}, x)|$. Soit θ une quantité positive < 1 ; désignons par $l(f, \theta)$ la longueur du plus grand des intervalles sur lesquels

$$|f(x)| \geqq \theta \text{ maximum de } |f(x)|;$$

et soit $l(\theta)$ la limite inférieure de $l(f, \theta)$, quand $f(x)$ parcourt toutes les combinaisons linéaires des $f_k(x)$. On a

$$[l(\theta)]^{\frac{1}{2m}} \theta \text{ maximum de } |\varphi(\mu^{(0)}, x)| < \Phi(\mu^{(0)}, x)^{\frac{1}{2m}} = 1;$$

ce qui donne avec (15)

$$\int_a^b |\xi^{(2m)}(x)|\, dx < \left[\frac{b-a}{l(\theta)}\right]^{\frac{1}{2m}} \frac{\mathrm{M}}{\theta}. \tag{16}$$

Jusqu'ici $2m$ désignait un nombre pair d'ailleurs quelconque. Envisageons maintenant *les grandes valeurs de m*. Supposons $l(\theta) \neq 0$; du reste $l(\theta)$ ne dépend pas du choix de m; par conséquent, si l'on fait croître m indéfiniment, le membre à droite en (16) tend vers $\frac{\mathrm{M}}{\theta}$. Pour en conclure que m croissant indéfiniment, la valeur de l'intégrale à gauche devient inférieure à toute quantité $\mathrm{M}' > \mathrm{M}$, il suffit de montrer que $l(\theta) \neq 0$, quel que soit $\theta < 1$. D'autre part, comme nous l'avons vu, la valeur de notre intégrale surpasse toute quantité $\mathrm{M}'' < \mathrm{M}$; il s'ensuivra

$$\lim_{m \to \infty} \int_a^b |\xi^{(2m)}(x)|\, dx = \mathrm{M}.$$

---

de l'inégalité de Cauchy

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2.$$

Notre inégalité générale, valable pour tous les $p > 1$, résulte à l'aide d'un raisonnement analogue de l'inégalité de M. Hölder (*Ueber einen Mittelwertsatz, Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen*, 1889, p. 44) qui est l'extension de celle de Cauchy.

Il nous reste à prouver que $l(\theta) \neq 0$. Or, il existe par définition une suite de fonctions $\varphi_k(x)$, combinaisons linéaires des n fonctions $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, telle que

$$\lim_{k \to \infty} l(\varphi_k, \theta) = l(\theta);$$

de plus, $l(f, \theta)$ ne changeant pas, quand on multiplie $f(x)$ par un nombre quelconque, nous pouvons supposer

$$\text{maximum de } |\varphi_k(x)| = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Les fonctions $\varphi_k(x)$, combinaisons linéaires du même nombre fini de fonctions, étant bornées dans leur ensemble, on en peut tirer une suite partielle $\{\varphi_{k_i}(x)\}$, tendant uniformément vers une fonction $\varphi^*(x)$. Le maximum de $|\varphi^*(x)| = 1$. Or, pour que sur l'intervalle (c, d) on ait $|\varphi^*(x)| > \theta' > \theta$, il faut aussi y avoir à partir d'un j suffisamment grand, $|\varphi_{k_j}(x)| > \theta$. Ce qui donne pour tout $\theta' > \theta$

$$l(\varphi^*, \theta') \leqq l(\theta).$$

Supposons $l(\theta) = 0$; il s'ensuivrait $l(\varphi^*, \theta') = 0$; la fonction $\varphi^*(x)$ étant continue, ce résultat est contradictoire.

En résumé, nous avons défini une suite de fonctions $\xi^{(2m)}(x)$, solutions du système (13), *telles que*

$$\lim_{m \to \infty} \int_a^b |\xi^{(2m)}(x)|\, dx = \mathrm{M},$$

où l'on a désigné par M *le plus petit nombre tel que*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \mu_k c_k \right| \leqq \mathrm{M} \times \text{maximum de} \left| \sum_{k=1}^{n} \mu_k f_k(x) \right|$$

pour tout système des nombres μ_k, réels ou non. Posons

$$\int_a^x \xi^{(2m)}(x)\, dx = \alpha^{(2m)}(x);$$

les fonctions $\alpha^{(2m)}(x)$ satisfont au système

$$\int_a^b f_k(x)\, d\alpha(x) = c_k \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

et quand $\frac{1}{m} \to 0$, leur variation totale tend vers M.

Jusqu'ici nous avons supposé que les fonctions $f_k(x)$ sont linéairement indépendantes. *Cette restriction n'est nullement essentielle.* Pour la lever, il suffit de remarquer que l'on peut tirer de tout système (11) qui ne contient qu'un nombre fini d'équations et qui remplit notre condition, un système partiel équivalent remplissant la même condition (par rapport au même M) et tel que les fonctions coefficients y sont linéairement indépendantes.

VI.

Les fonctions $\alpha^{(2m)}(x)$ satisfont au système (11); leur variation totale tend vers M; mais, en général, *elle ne l'atteint pas.* Pour en tirer une solution $\alpha(x)$ dont la variation totale égale M, il nous faut encore appliquer à la suite $\{\alpha^{(2m)}(x)\}$ un principe de choix.

Passons d'abord de la suite $\{\alpha^{(2m)}(x)\}$ à la suite des opérations linéaires

$$A^{(2m)}[f(x)] = \int_a^b f(x)\, d\alpha^{(2m)}(x) = \int_a^b f(x)\, \xi^{(2m)}(x)\, dx.$$

De plus envisageons un ensemble dénombrable de fonctions continues sur (a, b) tel que toute fonction continue en soit fonction limite. C'est par exemple que les fonctions composées d'un nombre fini de traits linéaires, à valeurs rationnelles pour les x rationnels, constituent un tel ensemble dénombrable; nous les supposons numérotées en les désignant par $r_1(x)$, $r_2(x)$, ...

Les valeurs $M_{A^{(2m)}}$ restant inférieures à une borne finie, ce fait subsiste pour les valeurs $|A^{(2m)}[r_1(x)]|$. Par conséquent, de notre suite d'opérations on peut tirer une suite partielle A'_1, A'_2, ..., telle que la suite $A'_1[r_1(x)]$, $A'_2[r_1(x)]$, ... converge. De cette suite, par la raison analogue, on peut tirer une seconde A''_1, A''_2, ... telle que la suite $A''_1[r_2(x)]$, $A''_2[r_2(x)]$, ... converge aussi, etc. La suite des opérations A'_1, A''_2, A'''_3, ... est contenue (sauf toujours un nombre fini de termes) dans toutes ces suites partielles; appliquée à l'une quelconque des fonctions $r_j(x)$, elle fournira une suite convergente. Quant aux valeurs limites $A^*[r_j(x)]$ de ces suites, on a

$$|A^*[r_j(x)]| \leqq M \times \text{maximum de } |r_j(x)|;$$

on en conclut *que pour toutes les fonctions $f(x)$ continues sur (a, b), les* *suites* $A'_1[f(x)]$, $A''_2[f(x)]$, $A'''_3[f(x)]$ *tendent vers des valeurs limites* $A^*[f(x)]$, *et que ces valeurs limites définissent une opération linéaire* A^* *telle que* $M_{A^*} \leqq M$. En particulier, quant à $f_k(x)$, toutes les opérations $A^{(2m)}$ y appliquées fournissant la même valeur c_k, on aura aussi

$$(17) \qquad A^*[f_k(x)] = c_k \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Or, appliquons le théorème du paragraphe III. D'après ce théorème il existe une fonction à variation bornée $\alpha^*(x)$ dont la variation totale $M_{A^*} \leqq M$, et telle que

$$A^*[f(x)] = \int_a^b f(x)\, d\alpha^*(x).$$

En vertu de (17), cette fonction $\alpha^*(x)$ résout notre système (11); elle sera la solution cherchée, parce que sa variation totale ne surpasse pas M. D'une façon plus précise, cette variation totale égale M; car M étant supposé d'être le plus petit nombre qui satisfait à (12), la variation totale de $\alpha^*(x)$ ne peut être, d'après (5), moindre que M.

En résumé, on avait à résoudre le système

$$\int_a^b f_k(x)\, d\alpha(x) = c_k \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

A ce que cela soit possible, il fallait et il suffisait l'existence d'un nombre M *tel que pour tout système des valeurs* μ_k, *réelles ou non*,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \mu_k c_k\right| \leqq M \times \text{maximum de} \left|\sum_{k=1}^{n} \mu_k f_k(x)\right|.$$

Cette condition étant remplie, il existe au moins une solution $\alpha(x)$ *dont la variation totale ne surpasse pas* M; *de plus,* M *étant choisi le plus petit possible, il en existe une dont la variation totale égale précisément* M, *et il n'y en a pas de solution à variation totale* $<$ M.

On peut encore remarquer que, tandis que la détermination des fonctions $\xi^{(2m)}(x)$ par le problème d'extremum correspondant est toujours *univoque*, le procédé fournissant $\alpha^*(x)$ permet, en général, plusieurs déterminations.

VII.

Quand le système (11) se compose d'*une infinité dénombrable d'équations*, on appliquera le résultat que nous venons d'établir aux systèmes partiels finis de (11). La condition (12) supposée remplie, il existe pour chaque n une solution $\alpha_n(x)$ des n premières équations dont la variation totale ne surpasse pas M. On passera de nouveau aux opérations

$$A_n[f(x)] = \int_a^b f(x)\, d\alpha_n(x);$$

et par un procédé analogue à celui que nous venons d'employer, on tirera de la suite des A_n une suite partielle qui convergera vers l'opération linéaire

$$A^{**}[f(x)] = \int_a^b f(x)\, d\alpha^{**}(x).$$

La fonction $\alpha^{**}(x)$ ainsi définie satisfait au système complet (11) *et sa variation totale ne surpasse pas* M. *De plus, le nombre* M *étant choisi le plus petit possible, la variation totale de $\alpha^{**}(x)$ égale précisément* M.

On sait aussi bien que le cas d'une infinité dénombrable d'équations *représente le cas général*. Cela revient au fait que chaque ensemble infini, non dénombrable de fonctions continues contient un sous-ensemble dénombrable tel que toute fonction de l'ensemble primaire en est fonction limite.

VIII.

Notre résultat contient en particulier la réponse à un problème bien intéressant, posé par M. Erhard Schmidt. On sait depuis Weierstrass que toute fonction continue dans un intervalle (a, b) y peut être approchée indéfiniment et uniformément par des polynomes ou aussi, quand $b - a < 2\pi$, par des sommes trigonométriques. La question se pose : Étant donné un système dénombrable de fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... continues sur l'intervalle (a, b), comment reconnaître si l'on peut ou non approcher indéfiniment et uniformément toute fonction $f(x)$, continue sur (a, b), par les $\varphi(x)$ ou par leurs combinaisons linéaires? C'est ce que se demande M. Schmidt et il donne deux conditions. L'une, nécessaire, mais pas suffisante, exige qu'il n'existe pas de fonction continue, différente de zéro, orthogonale à toutes les fonctions $\varphi_i(x)$. L'autre, suffisante, mais pas nécessaire, suppose que les fonctions $\varphi_i(x)$ admettent des dérivées secondes continues et qu'il n'existe pas de fonction continue, différente de zéro, orthogonale à toutes ces fonctions dérivées; dans ces conditions, d'après M. Schmidt, toute fonction continue sur (a, b) peut être approchée uniformément par les combinaisons linéaires des fonctions $1, x, \varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ [1].

On peut bien approfondir les résultats de M. Schmidt en se servant de la notion d'intégrale de M. Lebesgue. C'est par exemple que, quant à la condition nécessaire, on peut aussi exiger qu'il n'existe pas de fonction sommable, bornée ou non, orthogonale à toutes les fonctions $\varphi_i(x)$; on exclura naturellement les fonctions qui ne diffèrent de zéro que sur un ensemble de mesure nulle. J'ai aussi réussi, il y a quelques années, d'élargir la condition suffisante de M. Schmidt, en ne supposant que ce que les fonctions $\varphi_i(x)$ soient des intégrales indéfinies de fonctions $\psi_i(x)$ sommables et telles que $|\psi_i(x)|^2$ soit sommable et qu'il n'existe pas de fonction $f(x)$ sommable, telle que $|f(x)|^2$ soit aussi sommable, qui soit orthogonale en même temps à toutes les $\psi_i(x)$; dans ces conditions, toute fonction continue sur (a, b) y peut être approchée uniformément par les combinaisons linéaires des fonctions $1, \varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ [2].

On pourrait aller encore plus loin et ne supposer que ce que les fonctions $\varphi_i(x)$ soient des intégrales indéfinies de fonctions sommables $\psi_i(x)$ et dont la $p^{\text{ième}}$ puissance du module est sommable, p désignant une quantité quelconque > 1 et qu'il n'y ait pas de fonction sommable, orthogonale à tous les $\psi_i(x)$, et dont la $\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\text{ième}}$ puissance du mo-

---

(1) *Entwickelung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener* (*Inauguraldissertation*, Göttingen, 1905; *Math. Annalen*, Bd. LXIII, p. 433-476).

(2) *Sur une espèce de Géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables* (*Comptes rendus*, 24 juin 1907). Je n'y avais envisagé que des fonctions réelles; ci-dessus la rédaction de la condition est adaptée au cas général de fonctions quelconques, cette extension ne comportant d'ailleurs aucune difficulté nouvelle.

dule est sommable; ce qui donnerait toujours une condition suffisante. *Mais pas une de ces conditions n'est nécessaire. Ce n'est qu'en appliquant l'intégrale de Stieltjes que nous réussîmes à donner une condition à la fois nécessaire et suffisante.*

Envisageons le système d'équations

$$(18) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = 1, \\ \displaystyle\int_a^b \varphi_i(x)\,d\alpha(x) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Pour qu'il admette une solution $\alpha(x)$ à variation bornée dont la variation totale $\leqq \frac{1}{\varepsilon}$, il faut et il suffit que l'inégalité

$$|\mu_0| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \times \text{maximum de} \left| \mu_0 f(x) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \varphi_i(x) \right|$$

tienne pour tout n et tout système des μ_i; ou, de même, que les fonctions

$$-\frac{1}{\mu_0} \sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i(x)$$

n'approchent la fonction $f(x)$ que d'une erreur $\geqq \varepsilon$. On pourra aussi exprimer ce fait en disant que *pour que $f(x)$ puisse être approchée à ε près par les combinaisons linéaires des $\varphi_i(x)$ il faut et il suffit que le système* (18) *n'admette pas de solution dont la variation totale $< \frac{1}{\varepsilon}$. En particulier, pour que $f(x)$ puisse être approchée indéfiniment et uniformément par les combinaisons linéaires des $\varphi_i(x)$, il faut et il suffit que le système* (18) *n'admette aucune solution à variation bornée.*

En corollaire, *pour qu'on puisse approcher toute fonction continue sur (a, b), il faut et il suffit que toute fonction à variation bornée $\alpha(x)$ qui satisfait au système homogène*

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,d\alpha(x) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

soit constante sur tout l'intervalle, sauf au plus sur un ensemble dénombrable de valeurs x, différentes de a et b.

IX.

Quant au système (11), nous avons développé les conditions de ce que ce système admette une solution à variation bornée dont la variation totale $\leqq M$. Mais on peut aller plus loin, en imposant à la solution quelques conditions restrictives ; on pourra par exemple exiger qu'elle soit *réelle*, ou de plus qu'elle soit *monotone*.

En ce qui concerne les solutions réelles, voilà une condition suffisante : *si les données du système sont réels, il en existe aussi de solution réelle ;* de plus on peut affirmer que *la partie réelle de chaque solution résout elle-même le système*. Bien entendu, *on suppose remplie la condition portant sur les inégalités* (12); pourtant, dans le cas actuel, *il suffit de se borner aux valeurs réelles des* μ_k. Pour en tirer une condition nécessaire et suffisante, portant sur le système (11) dans toute sa généralité, il ne faut que séparer dans les données les parties réelles et imaginaires, ce qui conduira au système réel

$$\int_a^b f'_k(x)\,d\alpha(x) = c'_k, \qquad \int_a^b f''_k(x)\,d\alpha(x) = c''_k$$
$$\left[k = 1, 2, \ldots;\ f_k(x) = f'_k(x) + f''_k(x)\sqrt{-1};\ c_k = c'_k + c''_k\sqrt{-1}\right].$$

Cherchons maintenant les conditions de ce que le système (11) admette de solution monotone, cette recherche nous étant suggérée par plusieurs problèmes bien connus de l'analyse qui y sont liés ; il suffira de citer le « *problème des moments* » de Stieltjes, les recherches fondamentales de M. Hilbert concernant les *formes quadratiques d'une infinité de variables* [1] et les beaux et importants travaux de M. Carathéodory qui se rattachent au théorème de Picard-Landau.

La recherche de ces conditions se ramène au problème suivant :

Déterminer les conditions de ce que le système (11) à données réelles

---

[1] *Cf.* ma Note *Ueber quadratische Formen von unendlich vielen Veränderlichen* qui paraîtra prochainement (Göttingen, *Nachrichten der k. Gesellschaft d. W.*, 1910).

admette une solution $\alpha(x)$ *jamais décroissante et dont la croissance totale* $\alpha(b) - \alpha(a) = 1$. Or la relation

$$\alpha(b) - \alpha(a) = \int_a^b d\alpha(x) = \text{variation totale de } \alpha(x)$$

caractérisant tout à fait les fonctions jamais décroissantes, notre problème revient à déterminer les conditions de ce que le système

$$\tag{19} \left\{ \begin{aligned} &\int_a^b d\alpha(x) = 1, \\ &\int_a^b f_k(x)\, d\alpha(x) = c_k \qquad (k = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \right.$$

admette une solution $\alpha(x)$ dont la variation totale $\leqq 1$. En vertu de notre théorème général et la remarque faite ci-dessus concernant les systèmes réels, la condition nécessaire et suffisante s'exprime par l'inégalité

$$\tag{20} \left| \mu_0 + \sum_{k=1}^{n} \mu_k c_k \right| \leqq \text{maximum de} \left| \mu_0 + \sum_{k=1}^{n} \mu_k f_k(x) \right|,$$

cette inégalité ayant lieu quels que soient le nombre entier n et les nombres réels μ_k.

Fixons un instant les nombres $n, \mu_1, \ldots, \mu_n$ et ne faisons varier que μ_0; l'inégalité (20) ne tiendra pour toute valeur de μ_0 que si la valeur

$$\tag{21} \sum_{k=1}^{n} \mu_k c_k$$

est située entre le minimum et le maximum de

$$\tag{22} \sum_{k=1}^{n} \mu_k f_k(x).$$

Nous y avons une nouvelle forme de la condition nécessaire et suffisante de ce que le système (11) à données réelles admette une solution jamais décroissante dont la croissance totale $= 1$. Ce n'est que le paramètre μ_0 que nous avons éliminé ; pour donner à notre condition une forme finale, nous allons en éliminer tous les μ_k.

Or, le fait que la valeur (21) est située entre le minimum et le maximum de la fonction (22) s'exprime aussi comme suit : *L'équation en x*

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k [f_k(x) - c_k] = 0$$

admet au moins une racine x située entre a et b. Or, envisageons *l'espace à n dimensions;* lorsque x parcourt l'intervalle (a, b), le point

$$y_1 = f_1(x), \quad \ldots, \quad y_n = f_n(x)$$

y décrit une courbe Γ_n et en langage géométrique, notre condition se traduit en ce que tout sous-espace linéaire à $n-1$ dimensions de notre espace passant par le point C_n

$$y_1 = c_1, \quad \ldots, \quad y_n = c_n$$

coupe ou touche la courbe Γ_n. Désignons par k_n le plus petit ensemble convexe de notre espace qui contient Γ_n ; notre condition équivaut à ce que le point C_n appartient à l'ensemble k_n.

Énonçons le résultat trouvé : *Pour que le système (11) à données réelles admette une solution $\alpha(x)$ jamais décroissante et dont la croissance totale $\alpha(b) - \alpha(a) = 1$, il faut et il suffit que pour tout n le point*

$$y_1 = c_1, \quad \ldots, \quad y_n = c_n$$

de l'espace à n dimensions appartienne au plus petit ensemble convexe qui contient la courbe

$$y_1 = f_1(x), \quad \ldots, \quad y_n = f_n(x) \qquad (a \leqq x \leqq b).$$

Remarquons que ce n'était qu'une forme bien particulière de notre théorème général dont nous nous sommes servis ; en effet, on peut s'en débarrasser tout à fait, en suivant une voie plus directe. De ce point de vue, ce n'est que la suffisance de notre condition qui mérite d'être traitée ; car ce n'était que la suffisance de la condition portant sur le système général (11) qui nous causait des efforts; la nécessité découlait immédiatement de l'inégalité (5).

Voilà une démonstration plus directe de ce que notre condition portant sur le système (19) suffit. Supposons notre condition remplie, c'est-à-dire supposons que pour tout n, le point $(y_1 = c_1, \ldots, y_n = c_n)$ appartient à l'ensemble convexe k_n. En formules ce fait s'exprime en ce que le système

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} f_k(x_i^{(n)}) = c_k \qquad (k = 1, \ldots, n;\ \lambda_i^{(n)} \geqq 0;\ a \leqq x_i \leqq b),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} = 1,$$

contenant les inconnues $\lambda_i^{(n)}, x_i^{(n)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ peut être satisfait. Supposons le système résolu et posons

$$A^{(n)}[f(x)] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} f(x_i);$$

nous y avons défini une opération linéaire telle que

$$A^{(n)}[1] = 1; \qquad A^{(n)}[f_k(x)] = c_k \qquad (k = 1, \ldots, n), \qquad M_{A^{(n)}} = 1;$$

ou plutôt nous avons défini une suite de telles opérations. On passera, comme au paragraphe VI, à l'opération limite

$$A^*[f(x)] = \int_a^b f(x)\, d\alpha^*(x),$$

telle que

$$A^*[1] = 1, \qquad A^*[f_k(x)] = c_k \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

et l'on conclura aussi $M_{A^*} \leqq 1$. La fonction $\alpha^*(x)$ résout le système (19); de plus elle ne décroît jamais, parce que sa variation totale ne surpasse pas la quantité $\alpha(b) - \alpha(a) = 1$. La suffisance de notre condition est donc établie.

Naturellement, quand on n'a qu'un nombre fini d'équations, le passage à la limite $A^*[f]$ n'intervient pas dans le raisonnement. On peut aussi remarquer qu'on n'a nullement besoin de marcher pas à pas, en traversant tous les n, quand on énonce la condition trouvée, soit qu'il s'agisse d'un nombre fini, soit d'une infinité dénombrable d'équations. Dans le premier cas, il suffit d'énoncer la condition en y faisant seulement intervenir l'espace à n dimensions, n désignant le nombre des équations. Dans le second cas, on pourra introduire l'espace à une infinité de dimensions. Nous n'y insistons pas.

Nous terminons par établir les liens qui joignent nos résultats à ceux de M. Carathéodory. Rappelons brièvement l'ordre d'idées de ses recherches. D'après le théorème classique de M. Picard, *toute fonction entière, qui n'est pas constante, prend au moins une fois l'une des valeurs zéro ou un*. Ce théorème était complété par M. Landau d'une façon bien subtile; M. Landau démontrait que *pour déterminer un cercle* $|z| < \mathrm{R}$, *à l'intérieur duquel la série entière*

$$a_0 + a_1 z + \ldots \qquad (a_1 \neq 0)$$

supposée convergente, prend au moins une fois l'une des valeurs zéro ou un, il suffit d'envisager les deux coefficients a_0, a_1. C'est M. Carathéodory qui a donné *l'expression précise de* R *en fonction de* a_0, a_1; de plus, dans le Mémoire où il développait ses idées, il abordait une grande classe de problèmes analogues [1]. Tous ces problèmes se ramènent au suivant: *On se donne les* $n+1$ *premiers membres de la série entière*

$$1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

et une quantité positive R; *peut-on compléter la série d'une façon telle qu'elle converge dans tout l'intérieur du cercle* $|z| < \mathrm{R}$ *et que la partie réelle de la fonction qu'elle y représente n'y devienne jamais négative?* Voilà la réponse de M. Carathéodory: *Pour qu'il existe une telle série, il faut et il suffit que le point*

$$(23) \quad \begin{cases} y'_1 = \mathrm{R}c'_1, \quad y''_1 = -\mathrm{R}c''_1, \quad \ldots, \quad y_n = \mathrm{R}^n c'_n, \quad y''_n = -\mathrm{R}^n c''_n \\ \qquad\qquad (c_k = c'_k + c''_k\sqrt{-1}) \end{cases}$$

de l'espace réel à $2n$ *dimensions appartienne au plus petit domaine*

---

[1] *Ueber den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen* (*Matematische Annalen*, t. LXIV, 1907, p. 95-115).

convexe qui contient la courbe

$$(24)\quad \begin{cases} y'_1 = 2\cos\vartheta, \quad y''_1 = 2\sin\vartheta, \quad \ldots, \quad y'_n = 2\cos n\vartheta, \quad y''_n = 2\sin n\vartheta \\ \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi). \end{cases}$$

Dans l'ordre d'idées indiqué par ce théorème, M. Carathéodory pousse encore plus loin l'étude de son problème. Évidemment, quand le point (23) se trouve dans l'intérieur du domaine convexe, on peut faire agrandir R sans sortir du domaine. C'est donc le cas où le point (23) se trouve *sur la surface* du domaine qui mérite le plus d'attention. *Dans ce cas,* continue M. Carathéodory, *il n'existe qu'une seule fonction répondant au problème; celle-ci est rationnelle et du degré n au plus.*

Cherchons à attacher le problème de M. Carathéodory à nos résultats. Envisageons la série entière

$$1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

convergente dans tout l'intérieur du cercle $|z| < R$ et dont la partie réelle y reste positive. Posons pour $r < R$,

$$f(r, \vartheta) = 1 + r^k \sum_{k=1}^{\infty} (c'_k \cos k\vartheta - c''_k \sin k\vartheta),$$

$$\alpha(r, \vartheta) = \int_0^{\vartheta} f(r, \vartheta)\, d\vartheta.$$

La fonction $\alpha(r, \vartheta)$ est monotone, sa croissance totale $= 1$, et elle satisfait au système

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos k\vartheta\, d\alpha(r, \vartheta) = r^k c'_k; \qquad -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin k\vartheta\, d\alpha(r, \vartheta) = r^k c''_k \\ \qquad (k = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

On en conclut que pour tout n, le point de l'espace réel à $2n$ dimensions

$$y'_1 = rc'_1, \qquad y''_1 = rc''_1, \qquad \ldots, \qquad y'_n = r^n c'_n, \qquad y''_n = r^n c''_n$$

appartient au domaine κ_{2n} qui contient la courbe (24), et cela quel que soit $r < R$; or le domaine formant un ensemble fermé, il contiendra encore le point (23). En d'autres mots, la condition de ce que le système (25), où l'on remplace r par R, admette une solution $\alpha(R, \vartheta) = \alpha(\vartheta)$ monotone et de croissance totale 1, est remplie. On peut aussi remarquer que, grâce à ce que le système soit complet, sa solution est unique à une constante additive près et à son indétermination dans ses points de discontinuité. A l'aide de cette fonction $\alpha(\vartheta)$, la fonction représentée par notre série entière s'exprime par

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{R}\,e^{\vartheta\sqrt{-1}}+z}{\mathrm{R}\,e^{\vartheta\sqrt{-1}}-z}\,d\alpha(\vartheta). \tag{26}$$

Soit, inversement, $\alpha(\vartheta)$ une fonction jamais décroissante, de croissance totale $= 1$, d'ailleurs quelconque. La fonction en z

$$\frac{\mathrm{R}\,e^{\vartheta\sqrt{-1}}+z}{\mathrm{R}\,e^{\vartheta\sqrt{-1}}-z},$$

régulière dans tout l'intérieur du cercle $|z|<\mathrm{R}$, y a aussi la partie réelle positive, et pour $z=0$, elle prend la valeur 1. Par conséquent, l'intégrale (26) définit une fonction régulière et de partie réelle positive dans tout l'intérieur du cercle $|z|<\mathrm{R}$, et qui en $z=0$ prend la valeur 1.

En résumé, à toute fonction régulière et de partie réelle positive pour $|z|<\mathrm{R}$, *et* $=1$ *pour* $z=0$, *correspond une fonction en* ϑ $(0 \leq \vartheta \leq 2\pi)$ *monotone et de croissance totale* $=1$, *bien déterminée à une constante additive près et aux valeurs qu'elle prend dans ses points de discontinuité; inversement toute fonction telle de* ϑ *détermine d'une manière unique une fonction régulière et de partie réelle positive pour* $|z|<\mathrm{R}$, *et* $=1$ *pour* $z=0$. *Chercher la fonction en* z *de la nature indiquée revient donc à chercher la fonction en* ϑ *qui y correspond.*

Dans cet ordre d'idées, le problème de M. Carathéodory *n'exige que la solution du système*

$$\alpha(2\pi)-\alpha(0)=1;$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos k\vartheta\,d\alpha(\vartheta)=\mathrm{R}^k c'_k; \qquad -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin k\vartheta\,d\alpha(\vartheta)=\mathrm{R}^k c''_k$$
$$(k=1,\ldots,n);$$

et en appliquant notre condition à ce cas particulier, *nous retrouvons celle de M. Carathéodory*. Aussi, au cas où le point (23) se trouve sur la surface du domaine k_{2n}, notre condition nous assure encore l'existence d'une solution $\alpha(\vartheta)$ et alors d'une fonction analytique qui y correspond ; pourtant elle ne nous rend pas compte de l'unité et du caractère simple de cette solution. En introduisant l'intégrale (26), nous pouvons aborder des problèmes bien plus généraux que celui de M. Carathéodory; par exemple, nous pouvons nous donner en avance une infinité de coefficients de la série entière; mais ce que nous avons gagné de généralité, nous le perdîmes dans les détails.

X.

Toutes ces considérations s'étendent presque immédiatement aux fonctions à plusieurs variables, définies dans des *domaines rectangulaires*. Mais lorsque le domaine de variabilité devient de forme moins simple, il se présente des difficultés assez graves. Nous n'insistons pas aux détails. Observons seulement que jusqu'à un certain point, toutes ces difficultés peuvent être évitées. En effet, ce n'est que le théorème du paragraphe III, dont l'extension au cas général aboutit à des obstacles; or ce théorème n'entre qu'au dernier moment aux développements des paragraphes IV-IX ; il n'y entrera plus si, au lieu de chercher à résoudre un système d'équations intégrales, on se contente de déterminer une opération linéaire $A[f]$, faisant correspondre des valeurs données à des fonctions données et l'on ne se demande plus s'il existe ou non une fonction $\alpha(x)$ qui y correspond. Bien entendu, il faudra aussi modifier l'énoncé des résultats. Par exemple la condition de ce que toute fonction continue puisse être approchée indéfiniment et uniformément par les fonctions φ_k ou par leurs combinaisons linéaires, s'énoncera comme suit : *Il faut et il suffit que toute opération linéaire qui fait correspondre à chaque φ_k la valeur zéro, s'annule identiquement.*

Il me faut encore mentionner une autre façon d'étendre mes résultats, s'attachant à un ordre d'idées indiqué par M. Lebesgue. C'est à propos de mon théorème du paragraphe III que M. Lebesgue, dans une Note très intéressante, se mit à établir les liens qui joignent sa notion d'intégrale à celle de Stieltjes; et il réussit à réduire ces dernières intégrales aux siennes ([1]). M. Lebesgue observe, et c'est cette remarque qui nous intéresse à cet instant, que la manière dont il interprète

([1]) *Sur les intégrales de Stieltjes et sur les opérations fonctionnelles linéaires;* (*Comptes rendus*, 10 janvier 1910).

l'intégrale (3), s'étend immédiatement à toute fonction $f(x)$ sommable et bornée. Il en conclut que toute opération linéaire, définie seulement pour les fonctions sur l'intervalle (a, b) peut être prolongée jusqu'à ce qu'elle porte à la totalité des fonctions, bornées et sommables sur le même intervalle.

La question se pose : Est-ce que si l'on interprète l'intégrale (3) comme le fait M. Lebesgue, nos résultats s'étendent à la totalité des fonctions, bornées et sommables sur l'intervalle (a, b)? Par exemple, est-ce qu'on peut exprimer par (3) toute opération linéaire, c'est-à-dire distributive et continue, portant sur cette classe de fonctions ? Avant d'y répondre, il faut préciser ce qu'on veut entendre par opération continue ; il y a plusieurs façons d'étendre cette notion, définie jusqu'ici pour la classe Ω, à la classe envisagée plus riche. C'est la notion de fonction limite qui y intervient ; on la définira soit par l'hypothèse de la convergence uniforme au sens strict, soit en admettant des points d'exception qui peuvent former un ensemble de mesure nulle. En tout cas, la réponse sera négative ; il est bien aisé de construire des exemples qui nous en assurent ([1]).

Malgré cela, dans des conditions plus restrictives, l'interprétation de (3) par M. Lebesgue rendra de bons services. Envisageons la totalité des fonctions *simplement discontinues* sur l'intervalle (a, b), c'est-à-dire telles que $f(x-0)$ et $f(x+0)$ existent et $2f(x) = f(x-0) + f(x+0)$. En interprétant l'intégrale (3) comme le fait M. Lebesgue, *toute la théorie développée ci-dessus s'étend à cette classe assez riche*. Cela revient principalement au fait que cette classe contient une infinité dénombrable de fonctions dont toute fonction de la classe est fonction limite.

Remarquons encore que pour cette classe la définition primitive de l'intégrale (3) peut être maintenue ; en assujettissant seulement la décomposition de l'intervalle (a, b) et la formation de la somme (4) à quelques restrictions.

Juin 1910.

([1]) Un des plus simples est fourni par l'opération réelle

$$A[f(x)] = \frac{1}{2}\left[\limsup_{x \to x_0} f(x) + \liminf_{x \to x_0} f(x)\right],$$

égale $f(x_0)$ pour les fonctions continues ou simplement discontinues. On peut interpréter les signes *lim sup, lim inf* au sens strict, mais on peut aussi exclure en passant à la limite tout ensemble de mesure nulle.