

A Hilbert-transzformáció alkalmazása a kiskunhalasi kommunális hulladéktároló különböző méretű és vastartalmú tárgyainak kiterjedés szerinti szeparálásában

PUSZTA S.¹, KIS K.²

¹Fractal Bt., H-1155 Budapest, Óda u. 37. E-mail: pusztas@fractal.hu

²ELTE Geofizikai és Űrtudományi Tanszék, H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C
E-mail: kisk@caesar.elte.hu

A Hilbert-transzformáció általános eljárás, jól használható a lokális mágneses mérések értelmezésében. Jelen cikkben ismertetett mágneses mérések célja a kiskunhalasi lokális hulladéktároló rekultivációs munkálatainak elősegítése. A feladat azoknak a területeknek az elkülönítése, ahol különböző méretű vastartalmú tárgyakat helyeztek el. A Hilbert-transzformációból meghatározott analitikus függvény burkolójának vizsgálatából meghatározható a különböző méretű vastárgyak elhelyezkedése.

Pusztas, S., Kis, K.: Application of the Hilbert transform for the separation of different size and iron containing objects in the Kiskunhalas local waste yard

The Hilbert transform is a general procedure, it can be an effective tool in the interpretation of local magnetic measurements. Magnetic measurements presented in this paper were done with the aim of recultivation of the Kiskunhalas local waste yard. The task was to separate the different places where different amount of iron containing objects had been deposited. From the Hilbert transform of the measured data, an envelope of an analytical function was obtained. After a proper low-pass filtering, the envelope function indicated the locations, where higher amount of iron had been deposited.

Beérkezett: 2013. december 12.; *elfogadva:* 2014. január 2.

1. Bevezetés

A lokális geofizikai mérések jól alkalmazhatók környezet-szennyezési hatások felmérésében. A feladat megoldására alkalmazott módszerek: lokális mágneses mérések (Reynolds 1997), geoelektromos eljárások (Reynolds 1997, Turai et al. 2010), földradar alkalmazása (Reynolds 1997).

A kiskunhalasi bezárt kommunális hulladéktároló szabálytalan kiterjedésű, befoglaló mérete mintegy 400 m × 600 m, vastagsága 3,5 m – 4,5 m. Felszíne egyenetlen, talajjal fedett, rajta fű, bokrok, helyenként fák nőnek, ezek az egyenes bejárást akadályozzák. A lokális mágneses mérések eredményeit rekultivációs munkákhoz kívánták felhasználni, különösen az a terület került az érdeklődés előterébe, amelyen a háztartásokból kikerülő szokásos méretű hulladék méreteit meghaladó vastartalmú tárgyak he-

lyezkednek el. A feladat megoldására a lokális mágneses mérések adatainak Hilbert-transzformálása adott lehetőséget.

2. Hilbert-transzformáció

A feladat megoldása előtt célszerű a Hilbert-transzformáció bevezetése és a következő fejezetben néhány modellszámítás bemutatása. A Hilbert-transzformációt Hardy angol matematikus vezette be (Hardy 1932). Az elnevezést D. Hilbert tiszteletére nevezte Hilbert-transzformációnak. A Hilbert-transzformáció általánosan használt eljárás, amely jól alkalmazható különböző tudományterületeken, például a híradástechnikában (De Freitas 2005, Gold et al. 1972, Öberg 2001), a szeizmikában (Zsellér 1982).

Egy $g(t)$ függvény Hilbert-transzformáltjának definíciója:

$$g_{\text{Hi}}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{u-t} du, \quad (1)$$

amely kifejezhető konvolúciós formában is:

$$g_{\text{Hi}}(t) = \left(-\frac{1}{\pi t} \right) * g(t), \quad (2)$$

ahol $*$ a konvolúció műveleti jele. A Hilbert-transzformáció alapvető tulajdonsága, hogy nem cseréli fel a tér- és frekvenciatartományokat, továbbá a páros függvény transzformáltja páratlan lesz, míg a páratlan függvény páros tulajdonságúvá válik. A Hilbert-transzformáció nem változtatja meg a függvény Fourier-transzformáltjának amplitúdó-spektrumát, ugyanakkor a fázisspektruma -90° fázistolást szenved a pozitív frekvenciák esetében, míg 90° fázistolást mutat a negatív frekvenciák tartományában, a harmonikus jelek esetében. Ha a Hilbert-transzformált eredményt ismét Hilbert-transzformációnak vetjük alá, akkor az eredmény az eredeti függvény mínusz egyszeresét adja.

Számítástechnikailag egyszerűbb a Hilbert-transzformált meghatározása frekvencia-tartományban. Legyen $T(f)$ az adatsor Fourier-transzformáltja, ekkor a Hilbert-transzformált Fourier-transzformáltját a

$$T_{\text{Hi}}(f) = j \operatorname{sgn} T(f) \quad (3)$$

összefüggés szolgáltatja, ahol j az imaginárius egység, sgn az előjel-függvényt jelenti. A (3) egyenletnek az inverz Fourier-transzformáltja adja meg a keresett Hilbert-transzformáltat.

A Hilbert-transzformáció alkalmazását a mágneses anomáliák értelmezésében Nabighian (1972, 1974, 1984) vezette be. A Hilbert-transzformáció alkalmazása megtalálható Bracewell (1978), Meskó (1983, 1984), továbbá Kis (2009) munkáiban.

Használjuk fel az analitikus jel fogalmát (Bracewell 1978, Li 2006)! Az analitikus jel definíciója:

$$g_{\text{an}} = A(t) e^{j\phi(t)}, \quad (4)$$

ahol $A(t)$ a pillanatnyi amplitúdó, $\phi(t)$ a pillanatnyi fázis.

Vezessük be az analitikus jelet a

$$g_{\text{an}}(t) = g(t) - j g_{\text{Hi}}(t) \quad (5)$$

formában, ahol a képzetes rész a valós rész Hilbert-transzformáltja. Az így meghatározott analitikus jel azonos tulajdonságú lesz a (4) egyenlettel megadott függvény tulajdonságaival. A g_{an} analitikus jel $|A(t)|$ burkolóját megkaphatjuk az

$$|A(t)| = [g^2(t) + g_{\text{Hi}}^2(t)]^{1/2} \quad (6)$$

egyenletből, míg a fázisát a

$$\phi(t) = \arctg(-g_{\text{Hi}}(t)/g(t)) \quad (7)$$

egyenlet adja. Az analitikus jel pillanatnyi frekvenciáját az

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (8)$$

összefüggés adja meg.

3. Modellszámítások

A modellszámítások során néhány, a geofizikai gyakorlatban ismert függvény Hilbert-transzformáltját mutatjuk be.

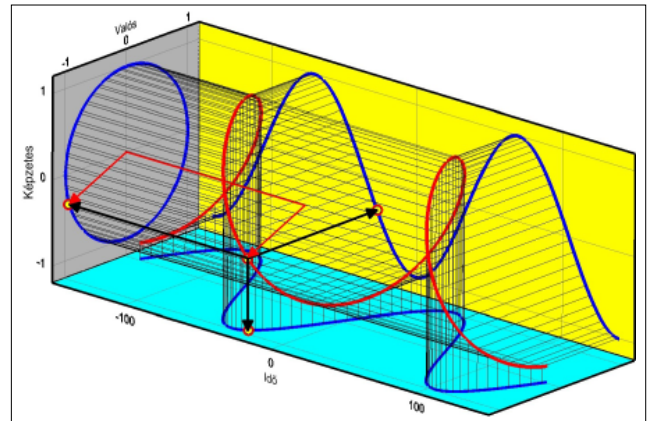
Legyen a jel az

$$y(t) = \sin(\omega t) \quad (9)$$

függvény, amelynek a Hilbert-transzformáltja Hahn (2000) szerint:

$$y_{\text{Hi}}(t) = -\cos(\omega t). \quad (10)$$

Az 1. ábrán kék szín ábrázolja a szinusz jelet a vízszintes síkban, míg szintén kék szín jelöli annak Hilbert-transzformáltját a függőleges síkban. Piros színű térgörbe ábrázolja az analitikus jelet, amelynek a valós-képzetes komplex síkban lévő vetületét szintén szemlélteti az ábra. Ez jelen esetben kört ad. Vékony fekete vetítővonalak mutatják az egyes komponensek kapcsolatát. Egy tetszőlegesen kiválasztott pontban mutatjuk az analitikus jelet mint vektort, valamint vetületét.



1. ábra Kék szín ábrázolja a $\sin(\omega t)$ bemenő jelet a vízszintes síkban, míg szintén kék szín mutatja a bemenő jel $-\cos(\omega t)$ Hilbert-transzformáltját a függőleges síkban, piros színű térgörbe jelöli az analitikus jelet, továbbá a valós-képzetes komplex síkban kék szín mutatja annak kör alakú vetületét. Vékony fekete vetítő vonalak segítik az ábrázolást, valamint feltüntetjük egy tetszőleges pont ábrázolását is

Figure 1 The input signal $\sin(\omega t)$ is plotted by blue color in the horizontal plane, while its Hilbert transform $-\cos(\omega t)$ plotted also by blue color in the vertical plane; red three-dimensional curve shows the analytical signal which is a circle indicated by blue color in the real-imaginary complex plane. Thin black lines indicate the way of projection and the projection of an arbitrary point is also indicated

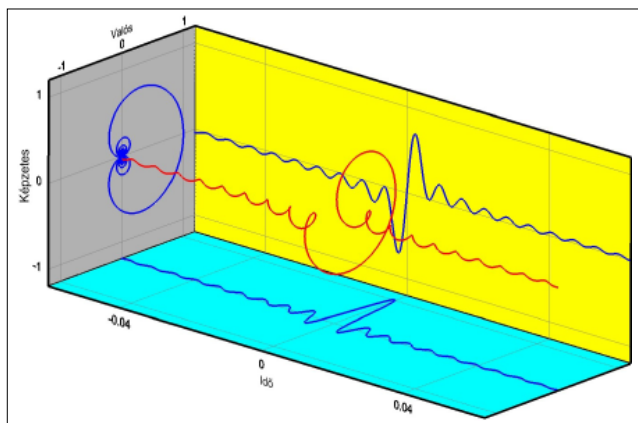
Jól ismert jel az

$$y(t) = \sin(at)/at \quad (11)$$

függvény, amelynek Hilbert-transzformáltja (Hahn, 2000):

$$y_{\text{Hi}}(t) = [1 - \cos(at)]/at. \quad (12)$$

A 2. ábrán kék szín ábrázolja a jelet a vízszintes síkban, míg szintén kék színnel jelölve annak Hilbert-transzformáltja látható a függőleges síkban. Az ábrán piros színnel az analitikus jelet megadó térgörbét ábrázoltuk.



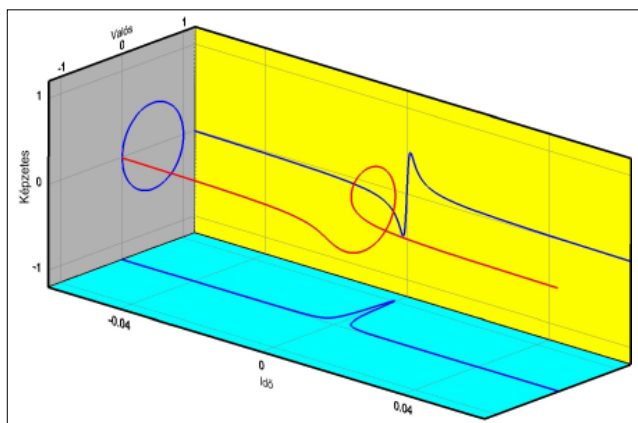
2. ábra Kék szín jelöli a $\sin(\omega t)/\omega t$ bemeneti jelet a vízszintes síkban, míg szintén kék szín ábrázolja annak Hilbert-transzformáltját a függőleges síkban, piros színű térgörbe mutatja az analitikus jelet, szintén kék színnel ábrázoltuk az analitikus jel vetületét a valós-képzetes komplex síkban

Figure 2 In the horizontal plane blue color indicates the input signal $\sin(\omega t)/\omega t$ while its Hilbert transform is also indicated by blue color in the vertical plane, red three-dimensional curve shows the analytical signal, its projection is also indicated in the real-imaginary complex plane

Legyen a jel az

$$y(t) = 1/(1+t^2) \quad (13)$$

függvény, amelynek a Hilbert-transzformáltja Bracewell (1978) szerint:



3. ábra Kék szín jelöli a $1/(1+t^2)$ bemeneti jelet a vízszintes síkban, míg szintén kék szín ábrázolja annak Hilbert-transzformáltját a függőleges síkban, piros színű térgörbe mutatja az analitikus jelet, az analitikus jel vetületét szintén kék színnel ábrázoltuk a valós-képzetes komplex síkban

Figure 3 Blue color indicates the input signal $1/(1+t^2)$ in the horizontal plane while its Hilbert transform is indicated also by blue color in the vertical plane, red three-dimensional curve shows the analytical signal, its projection is indicated in the real-imaginary complex plane

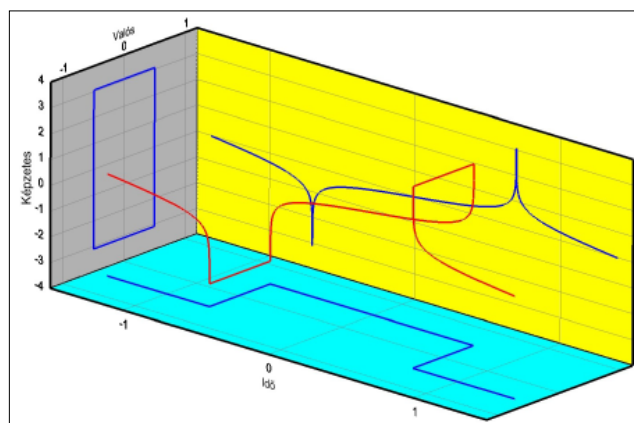
$$y_{\text{Hi}}(t) = -t/(1+t^2). \quad (14)$$

A 3. ábrán kék szín mutatja a jelet vízszintes síkban, míg szintén kék szín ábrázolja annak Hilbert-transzformáltját a függőleges síkban. Az ábrán piros színnel az analitikus jelet megadó térgörbét ábrázoltuk. A valós-képzetes komplex síkban az analitikus jel vetülete szintén kört ad.

Legyen a jel a $2a$ hosszúságú, origóra szimmetrikus négyszögimpulzus, $y(t) = \Pi_a(t)$, amelynek Hilbert-transzformáltja (Hahn, 2000):

$$y_{\text{Hi}}(t) = (1/\pi) \ln|(t+a)/(t-a)|. \quad (15)$$

A 4. ábrán a négyszögimpulzus látható kék színnel bemutatva a vízszintes síkban, míg ennek Hilbert-transzformáltja szintén kék színnel a függőleges síkban ábrázolva látható, piros színű térgörbe mutatja az analitikus jelet. A valós-képzetes komplex síkban az analitikus jel vetülete egy korlátos méretű téglalapot mutat. Ez a numerikus közelítés következménye. Valójában a valós-képzetes komplex síkon két párhuzamost kellene látnunk, hiszen (15) a $t \rightarrow a$ esetén, az $y_{\text{Hi}} \rightarrow +\infty$, illetve $y_{\text{Hi}} \rightarrow -\infty$, az ideális négyszögjel váltása 0 idő alatt történik.



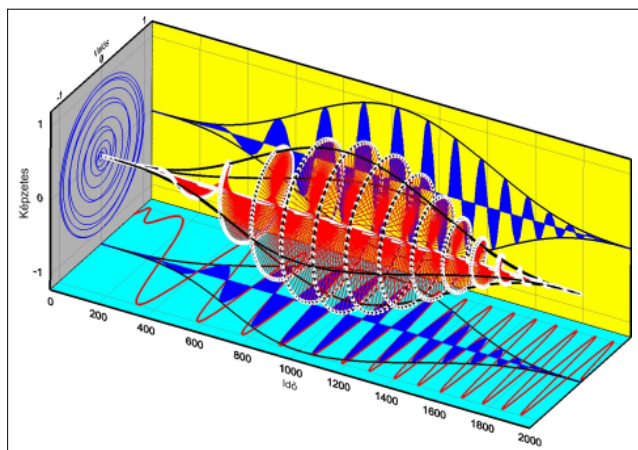
4. ábra Kék szín jelöli a $\ln|(t+a)/(t-a)|/\pi$ bemeneti jelet a vízszintes síkban, míg szintén kék szín ábrázolja annak Hilbert-transzformáltját a függőleges síkban, piros színű térgörbe mutatja az analitikus jelet, az analitikus jel vetületét szintén kék színnel ábrázoltuk a valós-képzetes komplex síkban

Figure 4 Blue color indicates the input signal $\ln|(t+a)/(t-a)|/\pi$ in the horizontal plane while its Hilbert transform is indicated also by blue color in the vertical plane, red three-dimensional curve shows the analytical signal, its projection is also indicated in the real-imaginary complex plane

A következő függvény a geofizikai gyakorlatban gyakran használt „sweep” függvény:

$$y(t) = \sin(\omega_0 t + \beta t^2) \sin^3(\omega_0 t), \quad (16)$$

amelynek most a numerikus Hilbert-transzformáltját határozzuk meg. A bemenő függvény egy lineárisan növekvő frekvenciájú harmonikus jel, amelynek amplitúdóját harmadik hatványra emelt szinusz adja. Ez utóbbi frekvenciáját úgy választottuk, hogy értéke a vizsgált ablak két szélén nullát adjon. Az 5. ábrán kék szín ábrázolja a bemenő függvényt vízszintes síkban, míg numerikus Hilbert-transzfor-



5. ábra Kék színű görbe ábrázolja a bemenő függvényt a vízszintes síkban, míg annak numerikus Hilbert-transzformáltját szintén kék szín jelöli a függőleges síkban, fekete görbe mutatja a burkolófüggvényt, továbbá az analitikus jelet megadó piros színű térgörbét, amelynek a vetülete a valós-képzetes komplex síkban látható. Az ábra piros színnel tünteti fel a pillanatnyi fázisból számolt jel koszinuszát is a vízszintes síkban

Figure 5 Blue curve shows the input function in the horizontal plane while its numerical Hilbert transform is indicated by blue color in the vertical plane; a black curve illustrates the envelop function, the analytical signal is shown by a red three-dimensional curve and its projection is given in the real-imaginary complex plane. The figure shows the cosine of the instantaneous frequency by red line in the horizontal plane

máltját szintén kék szín jelöli a függőleges síkban, fekete görbe mutatja a burkolófüggvényt, mely nem hordoz információt a bemenet fázisáról, továbbá az analitikus jelet megadó piros színű térgörbét, amelynek a vetülete a valós-képzetes komplex síkban látható. Az ábra piros színnel tünteti fel vízszintes síkban a csak fázisinformációra támaszkodó pillanatnyi fázisból számolt jel koszinuszát is. Ez utóbbi a kis és nagy amplitúdójú jeleket egyaránt a +1, -1 tartományba viszi.

4. Mérési adatok feldolgozása

A feladat megoldására Overhauser GSM-19-es magnetométerrel végeztünk totális mágneses méréseket a hulladéktároló tetején. Az észlelések időben egyenletesen, 0,5 s közönként történtek, ami az átlagos haladási sebesség mellett körülbelül 0,5 m vonal menti mintavételi távolságnak felel meg. A méréseket a terepviszonyok által megengedett helyeken, rendezetlenül elhelyezkedő vonalak mentén hajtottuk végre (6. ábra). A hulladéktároló területére mintegy 19000 mérési pont esett. Helymeghatározásra GPS eszközt alkalmaztunk.

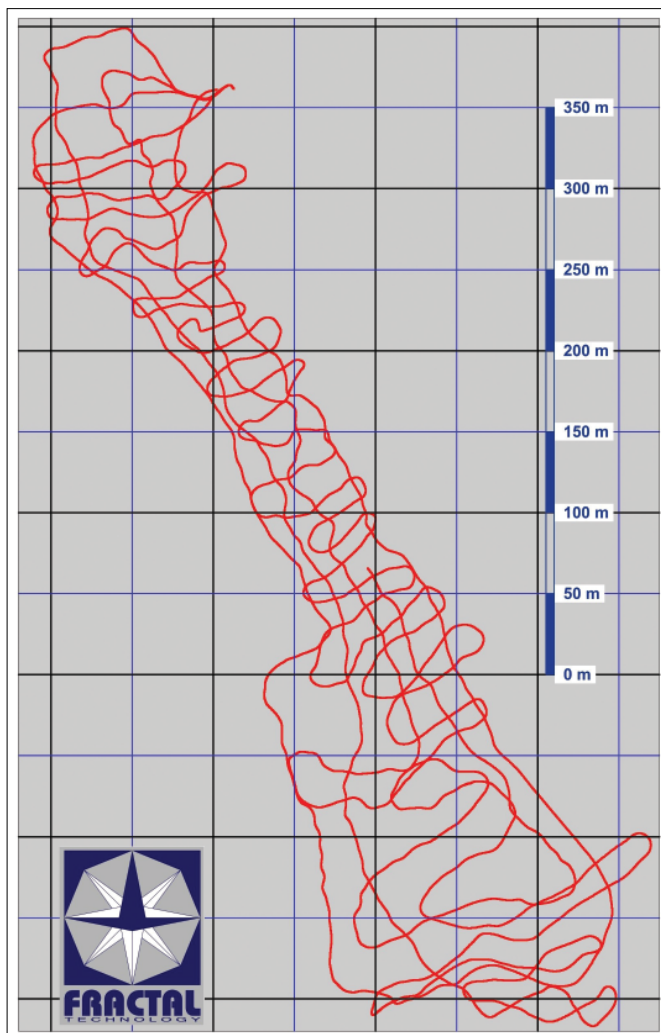
A mágneses mérések feldolgozásának első lépése a báziskorrektúra elvégzése volt. A báziskorrektúra értéke 48050–48070 nT között változott.

A rendezetlenül elhelyezkedő adatokból interpoláltak az anomáliatérképet. Az interpolációhoz különböző súlyfüggvények, többek között az $1/r^2$ típusú függvény alkalmazását javasolja Véges (1971). E súlyfüggvényt alkalmazva kapjuk a 7. ábrán bemutatott totális mágneses anomália térképet. Az anomáliák rendezetlen eloszlást mutatnak, nem válnak el a kis-méretű és nagyméretű hatóktól származó hatások.

A mágneses hatók dipól vagy multipól jellegűek, azonban feladatunk szempontjából ez közömbös, egyedül az intenzitásuk megismerése fontos, erre jól használható az analitikus jelből képzett burkolófüggvény.

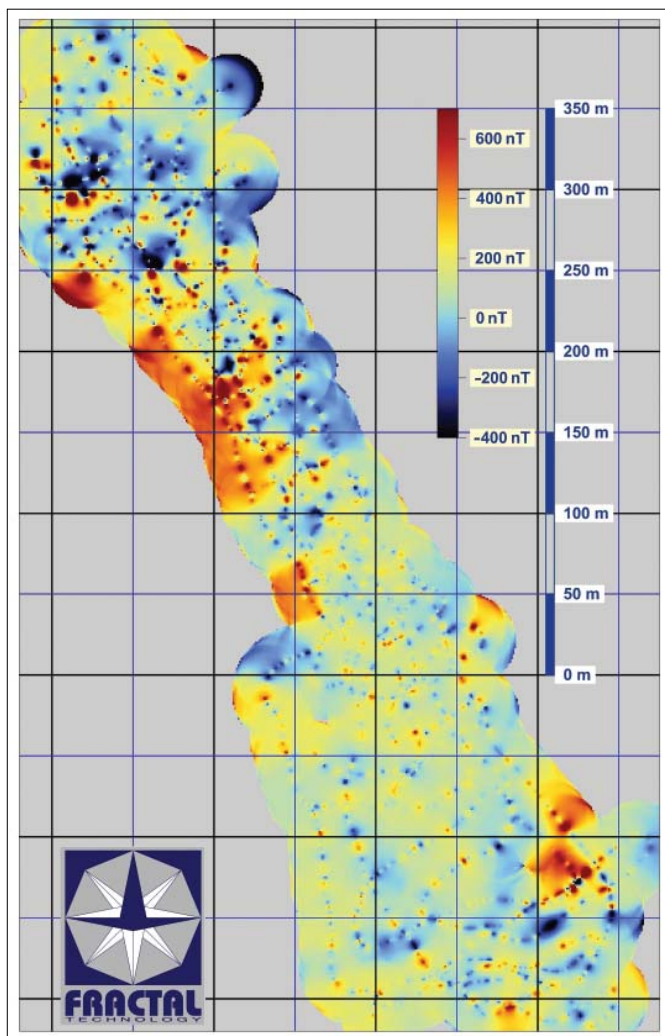
Az adatok, amelyekből térbeli információt kívánunk szerezni, vonal mentén helyezkednek el. A fel-

dolgozás következő lépéseiben az adatokat a mintaszám (idő) függvényében lévő egydimenziós adatrendszerként kezeljük.



6. ábra A szabálytalan alakú kiskunhalasi hulladéktároló területén azoknak a mérési vonalaknak a helye, amelyek mentén a mérések történtek (a horizontális és vertikális koordináták EOVS rendszerben, méter egységben értendők)

Figure 6 The magnetic measurements were carried out along the presented red lines over the Kiskunhalas waste yard (the horizontal and vertical coordinates are given in the EOVS system in meter unit)



7. ábra A szabálytalan alakú kiskunhalasi hulladéktároló területén meghatározott totális mágneses anomáliák (interpolációval az $1/r^2$ típusú súlyfüggvény alkalmazásával)

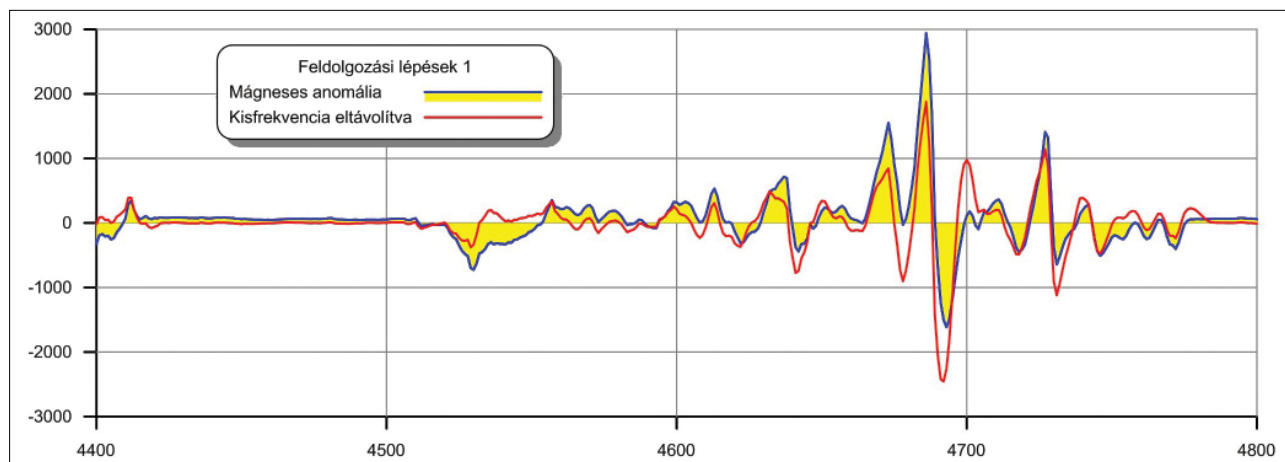
Figure 7 Total magnetic anomalies over the irregularly shaped Kiskunhalas waste yard (anomalies are determined by interpolation using the application of the $1/r^2$ type weight function)

A Hilbert-transzformált számításánál célszerű a jelek egyen-, illetve és alacsony frekvenciás komponenseit eltávolítani az adatsorból. Ezt 11 pont hosszúságú futóátlag segítségével végeztük. Így az eredmény nem tartalmaz zérus, illetve és alacsony frekvenciás összetevőket. Ezt a 8. ábra illusztrálja az adatrendszer egy részének bemutatásával.

Ezt követően az anomáliákból numerikus Hilbert-transzformáltat számítottunk, és meghatároztuk a komplex értékekből álló analitikus függvényt. Az analitikus függvényből meghatározható annak burkolója, amelyből a jelek intenzitására következtethetünk (9. ábra). A burkoló gyorsan változik, így aluláteresztő szűrővel kaphatók meg azok a térben nagyobb kiterjedésű jelkomponensek, amelyek a feldolgozás eredményét adják (10. ábra). A szűrésre Gauss-féle szűrőt használtunk, paraméterezését numerikus vizsgálatok alapján határoztuk meg. A szűrt burkoló amplitúdója több nagyságrendet fog át, így a kezelhetőség érdekében a burkoló logaritmusával dolgoztunk.

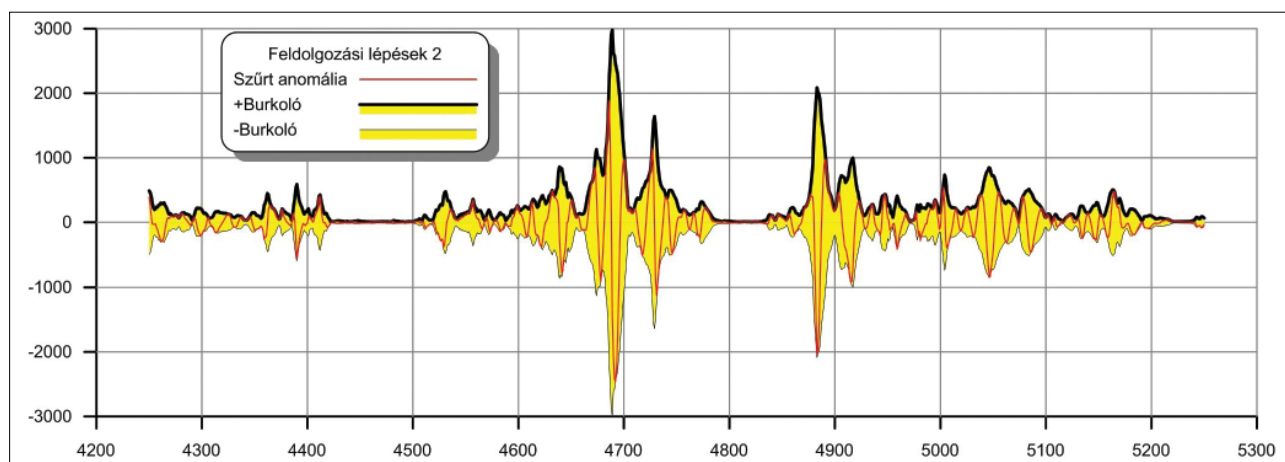
A kapott vonal menti adatsorból meghatározott burkolót szabályos rácsba interpoláltuk krigelési algoritmus alkalmazásával. Az interpolálás során figyelembe vettük adataink statisztikus tulajdonságait. A kimeneti adatrendszer mind x , mind y irányban 1,0 m osztásközü. Az így előállított eredménytérképen (11. ábra) különböző színekkel jelöltük a „nagy” és a „kicsi” vasterheltségűnek mutató részeket.

A terület számottevő részén az anomáliák kis intenzitásúak. A délkeleti részen lévő indikáció a felszínen lévő rózsaszín vaskádhoz köthető. A terület északnyugati felén a nagyobb kiterjedésű és nagy intenzitású anomáliák nagyobb vasmennyiséget sejtettek. Feltárásuk során több száz gumiabroncs került elő, amelyek acélmerevítőket tartalmaznak.



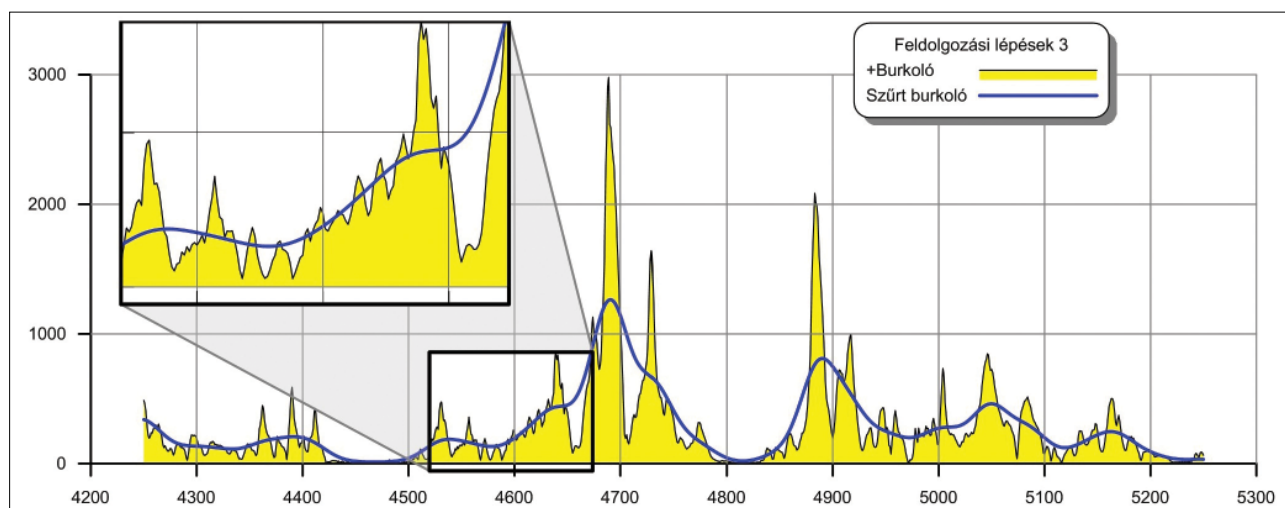
8. ábra A feldolgozás első lépése az adatsor egy részletén bemutatva: a kék szín jelöli báziskorrigált adatokból a futóátlag alkalmazása után meghatározott szelvényt, piros szín mutatja a mágneses anomáliát. Mindkét szelvény a távolság függvényében van ábrázolva

Figure 8 First step of the data processing shown on a section of the processed data: blue line indicates the data after the base correction, red line shows the anomalies after the running average has been applied. Both curves are plotted against the horizontal distance



9. ábra A feldolgozás második lépése az adatsor egy részén bemutatva: piros színű görbe ábrázolja a mágneses anomáliákat a szelvény hosszának függvényében, míg fekete színű görbe mutatja a numerikus Hilbert-transzformációból meghatározott burkolót

Figure 9 Second step of the data processing shown on a section of the processed data: red color curve shows the magnetic profile, while the black one presents the envelope of the numerical Hilbert transform



10. ábra A feldolgozás harmadik lépése az adatsor egy részén bemutatva: vékony fekete színű görbe mutatja az analitikus függvény burkolófüggvényét, míg kék színű görbe ábrázolja az alulvágó Gauss-féle szűrővel szűrt burkolót

Figure 10 Third step of the data processing shown on a section of the processed data: the envelope of the analytical function is shown by a thin black curve while its low-pass Gaussian-filtered version is presented by a blue curve

5. Következtetések

A mágneses anomáliákat létrehozó hatók méret szerinti szeparálása az értelmezés fontos feladata, mivel az esetek többségében a hatók méret szerint nem mindig különíthetők az anomáliatérképeken. Jelen esetben az anomáliákat létrehozó hatók 3,5–4,5 m mélységű rétegben helyezkednek el. A burkolófüggvény alapján – amely nem hordoz információt a jelek fázisáról csak intenzitásukról – lehetővé válik a hatók méret szerinti szeparálása az adott rétegben. A Hilbert-transzformáltakból meghatározott analitikus függvények burkolójának kétváltozós térképeken történő ábrázolása során a hatók méret szerinti elkülönítése rendszerint megoldható.

Köszönetnyilvánítás

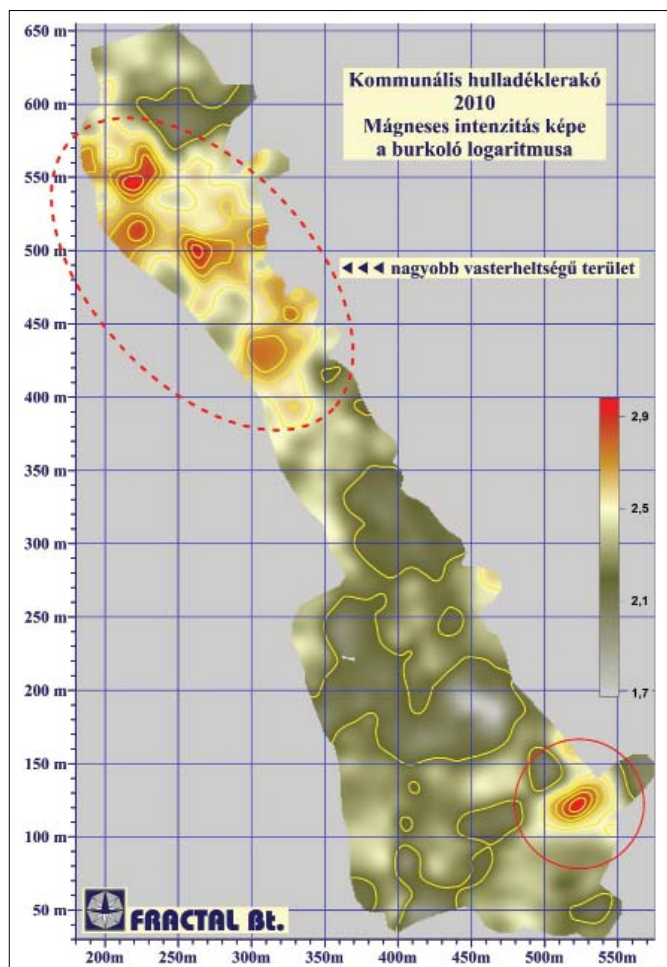
Köszönetet mondunk Holl Balázsnak (MNM-NÖK) az általa nyújtott geodéziai, térinformatikai szakmai segítségért.

A tanulmány szerzői

Pusztai Sándor, Kis Károly

Hivatkozások

Bracewell R. N., 1978: The Fourier Transform and Its Applications. McGraw-Hill Book Company, New York.
De Freitas J. M., 2005: Digital filter design solutions. Artech House, Inc.



11. ábra A kiskunhalasi kommunális hulladéklerakó területén a szűrt analitikus függvény burkolójának logaritmusának térképen ábrázolva. A terület ÉNy-i részén nagyméretű gumiabroncsok által létrehozott anomáliák láthatók, míg a DNy-i részen található anomáliákat a felszínen található vaskád okozta

Figure 11 Logarithm of the filtered envelope of is mapped in 2D. Large-size anomalies can be seen in the NW part of the map, they are produced by buried tires strengthened by steel wires, while the anomaly appearing in the SE part is caused by a near-surface bath tub

Gold B., Oppenheim A. V., Rader C. M., 1972: Theory and implementation of the discrete Hilbert transform. In: Digital Signal Processing, ed. L. R. Rabiner, C. M. Rader. IEEE Press.

Hahn S. I., 2000: Hilbert Transforms. Boca Raton, CRC Press LLC.

Hardy G. H., 1932: On Hilbert transforms. Quart. J. Math. (Oxford) 3, 102–112

Kis K., 2009: Magnetic Methods of Applied Geophysics. Eötvös University Press, Budapest.

Meskó A., 1983: Geofizikai Adatfeldolgozás I. Lineáris Átalakítások. Tankönyvkiadó, Budapest.

Meskó A., 1984: Digital Filtering: Applications in Geophysical Exploration for Oil. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Nabighian M. N., 1972: The analytical signal of two-dimensional magnetic bodies with polygonal cross-section: its properties and use for automated anomaly interpretation. Geophysics 37, 507–517

Nabighian M. N., 1974: Additional comments on the analytical signal of two-dimensional magnetic bodies with polygonal cross-section. Geophysics 39, 85–92

Nabighian M. N. 1984: Toward a three-dimensional automatic interpretation of potential field data via generalized Hilbert transform: Fundamental relations, Geophysics 49, 780–786.

Öberg T., 2001: Modulation, detection and coding, John Wiley & Sons, Ltd.

Reynolds J. M., 1997: An Introduction to Applied and Environmental Geophysics. John Wiley & Sons, Chichester, New York, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto.

Turai E., Dobróka M., Herczeg Á., 2010: Sorfejtéses inverzió III – Gerjesztett polarizációs adatok inverziós feldolgozása. Magyar Geofizika 51, 88–98

Véges I., 1971: Map plotting with weighted average on the surface of a circular disk. Pure and Applied Geophysics 78, 5–17

Li Xiung, 2006: Understanding 3D analytical signal amplitude. Geophysics 71, L13–L16

Zsellér P., 1982: Hilbert-transzformáció felhasználása reflexiós szeizmikus hullámok pillanatnyi frekvenciáinak meghatározásához. Magyar Geofizika 23, 151–158