

Schumann-rezonancia-mérések modellezése inhomogén hullámvezetőre

PRÁCSER E.[@], BOZÓKI T.

Földfizikai és Űrtudományi Kutatóintézet (ELKH FI),
H-9400 Sopron, Csatka E. u. 6–8.
[@]E-mail: pracser@ggki.hu

Ebben a tanulmányban egy analitikus és egy numerikus számítási módszert ismertetünk az elektromágneses hullámterjedés modellezésére a Föld-ionoszféra hullámvezetőben. A modellezés az extrém alacsony frekvenciák esetére érvényes (<100 Hz), és figyelembe veszi az ionoszféra magasságának az eltérését a Föld nappali és éjszakai oldalán. Numerikus teszteken mutatjuk meg, hogy a kétféle megközelítés gyakorlatilag ugyanazt az eredményt adja, a közöttük lévő relatív eltérés kevesebb mint 0,4%. Ez az eredmény hozzájárul ahhoz, hogy a Schumann-rezonancia-mérések alapján következtetni tudjunk a globális zivatar-tevékenység eloszlására és intenzitására.

Prácser, E., Bozóki, T.: Modeling of Schumann resonance measurements for nonuniform waveguide

In this article, we present an analytical and a numerical approach to model the electromagnetic wave propagation in the lowest part of the extremely low frequency band (<100 Hz) that takes into consideration the day–night asymmetry of the Earth–ionosphere cavity. We present numerical tests showing that the two models produce practically the same output, i.e., the relative difference between them is less than 0.4%. Our result is an important step toward inferring the distribution and intensity of global lightning activity based on Schumann resonance measurements.

Beérkezett: 2021. július 12.; *elfogadva:* 2021. augusztus 31.

Bevezetés

Már a huszadik század elején felvetették annak a lehetőségét, hogy az elektromosan jó vezetőnek számító Föld, a szintén jól vezető ionoszféra és a közöttük levő térrész a kis frekvenciájú elektromágneses hullámok (100 Hz alatt) számára egy hullámvezetőt képeznek. Ezzel az elsők között W. O. Schumann foglalkozott (Schumann 1952), ezért a jelenséget Schumann-rezonanciának (SR) hívják. A vizsgált elektromágneses hullámokat a Föld különböző helyein előforduló villámok keltik, ezért a SR-mérések a globális zivatar-tevékenységről adnak információt. A Föld-ionoszféra hullámvezető fizikai tulajdonságaival számos publikáció foglalkozott (Madden, Thompson 1965, Nickolaenko 1997, Price et al. 2006, Polk 1982, Satori et al. 2002).

A hullámterjedés matematikai modellezésekor kezdetben állandó magasságú ionoszférát, azaz homogén hullámvezetőt feltételeztek (Wait 1962). Később készültek analitikus és numerikus modellezések változó magasságú iono-

szférára, inhomogén hullámvezetőre is (Kirillov et al. 1997, Galuk et al. 2018). Az analitikus számítás transzcendens függvényeket tartalmazó végtelen sorok alakjában adja meg az elektromágneses térkomponenseket. Ekkor hibák léphetnek fel azért, hogy a végtelen sorokat végesszel közelítjük, továbbá a transzcendens függvényeknek a numerikus számításánál is lehetnek pontatlanságok, mivel általában azokat is egy végtelen sor állítja elő. A numerikus megoldásnál a feladatot egy, a Földgömb felszínén definiált ráccsal diszkrétizáljuk, ami szintén hibaforrás lehet. Ezért mindkét számítás megbízhatóságát növeli, ha megmutatjuk, hogy ezek a számítások egymáshoz nagyon közeli eredményeket adnak.

A numerikus számítás a modellező rács elemeihez tartozó ionoszféra-magasságok tetszőleges eloszlására alkalmazható. Az analitikus modellezés csak olyan speciális esetekre érvényes, amikor a különböző ionoszféra-magasságú tartományok határa a $\theta = c$ (ahol c egy állandó) egyenlettel adható meg. Esetünkben egy nappal–éjszaka határvonal választ el két tartományt.

A hullámterjedés modellezése a Föld-ionoszféra hullámvezetőben

Az ionoszféra Föld feletti magassága lényegesen kisebb, mint a Föld sugara, és ez a magasság a hullámhosszhoz képest is elhanyagolható. Ezért a Föld és az ionoszféra közötti térrész egy kétdimenziós hullámvezetőnek tekinthető, amely csupán két fizikai paraméterrel jellemezhető. Ezek a hullám terjedési irányába eső Z impedancia és a Föld és az ionoszféra közötti Y átvezetés. Az ionoszféra magassága és az ionoszféra, a Föld, valamint a levegő vezetőképesége az impedancián és az átvezetésen keresztül vannak hatással a hullámterjedésre. Az ionoszféra magassága egy komplex számmal jellemezhető, melynek a képzetes része 0-tól különböző. Ez a 0-tól különböző képzetes rész jellemzi az elektromágneses hullám csillapodását. Az impedanciát és az átvezetést különböző, frekvenciafüggő ionoszféra-magasságokkal (h_i és h_e) számítjuk. Ezeknek a magasságoknak a számításával a szakirodalom részletesen foglalkozik (Pechony, Price 2004, Kulak, Mlynarczyk 2013). Az elmélet ismertetésekor matematikai gömbkoordináta-rendszert használunk, a teszteknel viszont földrajzi koordináta-rendszert. Számításaink során azt feltételezzük, hogy az elektromágneses térkomponensek időfüggése $e^{i\omega t}$, ahol t az idő és ω a körfrekvencia.

A Föld és az ionoszféra közötti V feszültség és az i áram-sűrűség kapcsolatát a

$$\text{grad} V = -Zi, \quad (1a)$$

$$\text{div} i = -Y[V + V_s \delta(P)] \quad (1b)$$

differenciálegyenletek adják meg, ahol V_s a forrás helyén fellépő feszültségimpulzus nagysága, $\delta(P)$ Dirac-delta a Föld felszínén van értelmezve, és P a forrás helyét jelenti. Az egységnyi területre eső Z impedancia az L induktivitáson keresztül függ a frekvenciától és a h_i ionoszféra-magasságtól a

$$Z = i\omega L, \quad L = \mu h_i$$

képletek szerint, ahol μ a mágneses permeabilitás. Hasonló képletek érvényesek az Y átvezetésre is,

$$Y = i\omega C, \quad C = \varepsilon/h_e,$$

ahol C a kapacitássűrűség. Az (1) egyenletekből levezethető a feszültséget meghatározó parciális differenciálegyenlet:

$$\text{div}(1/L)\text{grad} V + \omega^2 CV = -\omega^2 CV_s \delta(P). \quad (2)$$

Ez a kétdimenziós távíróegyenlet frekvenciatartománybeli megfelelője. A (2) egyenlet gömbkoordinátákkal:

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin \theta}{L} \frac{\partial}{\partial \theta} V \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \phi} V \right) + \omega^2 CV = -\omega^2 CV_s \delta(P), \quad (3)$$

ahol r a Föld sugara. A (3) egyenletet fogjuk tehát megoldani numerikusan és analitikusan. Az elektromos térerősség

függőleges komponense egyszerűen számítható a feszültségből,

$$E_r = V/h_e. \quad (4)$$

A mágneses térerősség komponensei az áramsűrűségvektor komponenseiből számíthatók a

$$H_\phi = -i_\theta, \quad H_\theta = i_\phi \quad (5)$$

képletek szerint (Kirillov et al. 1997, Kirillov, Kopeikin 2002). Figyelembe véve az (1a) képletet,

$$H_\theta = -\frac{1}{rZ \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} V, \quad (6)$$

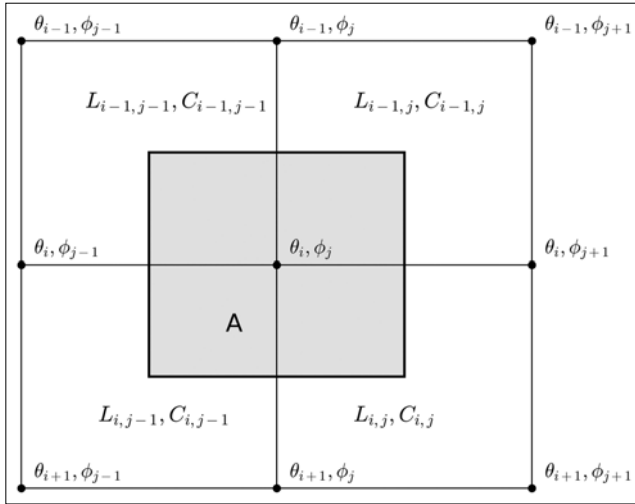
$$H_\phi = \frac{1}{rZ} \frac{\partial}{\partial \theta} V. \quad (7)$$

A feszültséget meghatározó differenciálegyenlet numerikus megoldása

A (3) egyenlet numerikus megoldására már van példa a szakirodalomban (Galuk et al. 2018). Abban a cikkben az egyenletet az eredeti alakjában diszkretizálják, a véges különbségek módszerét alkalmazva. Itt mi most egy másik utat választunk, melyet a szakirodalomban a véges térfogatok módszerének vagy boxmódszernek is neveznek (Stoyan, Takó 1997). Előnye, hogy nincs szükség a második deriváltak differenciáhányadosokkal való közelítésére. Ezt a módszert alkalmazták már a geofizikában a potenciál számítására, az egyenáramú mérésekhez, kétdimenziós geoelektromos modellek esetére (Dey, Morrison 1979). Az általunk alkalmazott numerikus algoritmus két fontos szempontból is különbözik ettől a megoldástól. Egyrészt bonyolultabb, hiszen most gömbkoordinátákkal kell számolni. Másrészt viszont egyszerűbb, nem kell ugyanis foglalkozni a tartomány határain a peremfeltételekkel, mivel a gömb felülete véges, és nincsenek határvonalai. A gömb felszínét a θ és ϕ koordináták mentén felosztjuk, azaz egy rácsot hozunk létre ($\theta_i, \phi_j, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$). Az egységnyi felületre eső induktivitás és a kapacitás értéke mindegyik rácselemen belül állandó. A feszültséget a rács csomópontjaiban határozzuk meg. Az (i,j) csomópont-hoz tartozó feszültség $V_{i,j}$. A rács gömbi négyzetekből áll, kivétel a pólusok környezete, ahol a rács elemei gömbháromszögek. A (2) egyenlet diszkretizálásához vegyük annak az integrálját egy A tartományon (1. ábra), és alkalmazzuk a Gauss-tételt,

$$\int_{\delta A} \frac{1}{L} \mathbf{n} \text{grad} V d\mathbf{l} + \iint_A \omega^2 CV ds = - \iint_A \omega^2 CV_s \delta(P) ds. \quad (8)$$

δA jelenti az A tartomány határát, $\mathbf{n}$ az erre merőleges normálvektor. A (8) képlet első tagja az 1. ábra A tartományán differenciáhányadosokkal,



1. ábra A Föld felszínének diszkrétizálása
Figure 1 Discretization of the Earth's surface

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L_{i-1,j-1}} + \frac{1}{L_{i-1,j}} \right) \frac{V_{i,j} - V_{i-1,j}}{\Delta \theta} \sin(\theta_{i-1} + \frac{1}{2} \Delta \theta) \Delta \phi \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L_{i,j-1}} + \frac{1}{L_{i,j}} \right) \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta \theta} \sin(\theta_i + \frac{1}{2} \Delta \theta) \Delta \phi \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L_{i,j-1}} + \frac{1}{L_{i+1,j-1}} \right) \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\Delta \theta} \sin \theta_i \Delta \phi \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L_{i,j}} + \frac{1}{L_{i+1,j}} \right) \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta \theta} \sin \theta_i \Delta \phi.
 \end{aligned} \quad (9)$$

A (8) egyenlet második tagja,

$$\begin{aligned}
 & \omega^2 V_{i,j} r^2 \frac{1}{4} \Delta \theta \Delta \phi \left[\sin(\theta_{i-1} + \frac{1}{2} \Delta \theta) C_{i-1,j-1} \right. \\
 & + \sin(\theta_{i-1} + \frac{1}{2} \Delta \theta) C_{i-1,j} + \sin(\theta_i + \frac{1}{2} \Delta \theta) C_{i,j-1} \\
 & \left. + \sin(\theta_i + \frac{1}{2} \Delta \theta) C_{i,j} \right].
 \end{aligned} \quad (10)$$

Itt az A tartományon a potenciál értékét állandónak tekintettük. A rács elemeinek a mérete $\Delta \theta = \Delta \phi = 1^\circ$ ($N = 180$, $M = 360$). A (8) jobb oldalának az A -n vett integrálja csak azon rácpontban különbözik 0-tól, ahol a forrás van. Például, ha a forrás a θ_k, ϕ_l koordinátájú pontban van, ez az érték:

$$\omega^2 \frac{1}{4} (C_{k-1,l-1} + C_{k-1,l} + C_{k,l-1} + C_{k,l}) V_s. \quad (11)$$

Figyelembe vettük, hogy a Dirac-delta-függvény integrálja 1. A (9), (10) és (11) képletek lineáris kapcsolatot határoznak meg a $V_{i,j}$ feszültség, és a szomszédos csomópontokhoz tartozó feszültségértékek között. Minden rácpont-ra felírva ezt a lineáris kapcsolatot a rácpontokhoz tartozó feszültségértékekre kapunk egy lineáris egyenletrendszer,

$$\mathbf{A} \mathbf{v} = \mathbf{f}. \quad (12)$$

A $\mathbf{v}$ vektor az összes rácpontokhoz tartozó $V_{i,j}$ feszültségértéket tartalmazza, az $\mathbf{f}$ vektornak csak a forrásnak megfelelő eleme különbözik 0-tól. Az $\mathbf{A}$ mátrix mérete 64442×64442 , az egyenletrendszer megoldása a szabadon elérhető MUMPS algoritmussal történik (Amestoy et al. 2001).

A forrás helye lehet a rács valamelyik csomópontja. A mérés helye viszont tetszőleges lehet, eshet csomópontok közé is. Tegyük fel, hogy a θ, ϕ koordinátákra érvényesek a

$$\theta_i \leq \theta < \theta_{i+1}, \quad \phi_j \leq \phi < \phi_{j+1} \quad (13)$$

egyenlőtlenségek, ahol θ_i, ϕ_j a rács csomópont-koordinátái. Ekkor a feszültség a

$$V(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 c_{k,l} P_k(\cos \theta) \cos(l\phi) \quad (14)$$

képlettel számítható. A $c_{k,l}$ együtthatók a rácpontokhoz tartozó feszültségértékekből számíthatóak ($V_{m,n}$, $m = i - 1, \dots, i + 2$, $n = j - 1, \dots, j + 2$). A mágneses térkomponensek ((6), (7) képletek) a (14) deriválásával már egyszerűen meghatározhatók.

Analitikus megoldás

Kirillov és szerzőtársai (Kirillov et al. 1997) is a (2) egyenletből indultak ki, és levezették a Föld-ionoszféra hullámvezetőben kialakuló feszültségre vonatkozó képletet, figyelembe véve a különböző ionoszféra-magasságokat nappal és éjszaka. Az általuk kapott képletekre most egy másik levezetést adunk, amely eltérő matematikai alapokon nyugszik, és külön tárgyaljuk a forrás és az észlelés helyéből adódó különbségeket. Az utóbbi azt jelenti, hogy a forrás is és az észlelés is eshet a Föld nappali és az éjszakai oldalára, azaz négyféle lehetőség van. A levezetés során annak is fontos szerepe lesz, hogy a forrás és az észlelés θ koordinátái hogyan viszonyulnak egymáshoz. Valamennyi esetre közöljük a feszültséget meghatározó képletet. Homogén hullámvezetőre egyszerűbb az elektromágneses térkomponensek számítása, először erre az esetre vezetjük le a megoldást, és utána térünk át az inhomogén esetre.

Homogén hullámvezető

Tekintsük most az ionoszféra magasságát állandónak, ami azt jelenti, hogy az egységnyi terület kapacitása és induktivitása állandó. Ekkor a (2) egyenletet megszorozhatjuk L -lel,

$$\text{div grad } V + \omega^2 L C V = -\omega^2 L C V_s \delta(P). \quad (15)$$

A gyakorlatban a forrás intenzitását az I_s áramimpulzus nagyságával szokás jellemezni, ezért felhasználva a feszültség és az áram közötti

$$V_s = I_s \frac{1}{i\omega C} = I_s \frac{h_c}{i\omega \epsilon}, \quad (16)$$

összefüggést, a feszültséget meghatározó (15) egyenletben módosítjuk a forrástagot,

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} V + \omega^2 L C V = -\omega^2 L C \frac{I_s h_c}{i \omega \varepsilon} \delta(P). \quad (17)$$

Bevezetjük a ν komplex változót, amelyre

$$\nu(\nu + 1) = \omega^2 r^2 L C. \quad (18)$$

Feltételezzük továbbá, hogy a forrás a póluson van ($\theta = 0$). Ekkor feszültség csak a θ koordinátától függ, így az azt meghatározó (17) differenciálegyenlet gömbkoordinátákkal felírt alakjában nem szerepel a ϕ szerinti derivált,

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} V \right) + \frac{\nu(\nu + 1)}{r^2} V = -\frac{\nu(\nu + 1)}{r^2} \frac{I_s h_c}{i \omega \varepsilon} \delta(P).$$

Alkalmazzuk az $x = \cos \theta$ helyettesítést! Ekkor az egyenlet a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - x^2) \frac{\partial}{\partial x} V \right) + \nu(\nu + 1) V \\ = -\nu(\nu + 1) \frac{I_s h_c}{i \omega \varepsilon} \delta(P) \end{aligned} \quad (19)$$

alakot ölti. Ez a Legendre-egyenlet, amelynek a megoldása lehet $cP_\nu(\cos \theta)$ vagy $cP_\nu(-\cos \theta)$, ahol P_ν a Legendre-függvény, és c egy később meghatározandó állandó. Itt most a $cP_\nu(-\cos \theta)$ jöhet szóba, mivel annak van szingularitása a forrás helyén ($\theta = 0$). A c szorzó meghatározásához három ténytet figyelembe venni:

- 1: a (19) egyenletben a Dirac- δ előtti szorzót,
- 2: ha $\theta \ll 1$, akkor (Wait 1962)

$$P_\nu(-\cos \theta) \approx \frac{2}{\pi} \sin \nu \pi \log \theta,$$

- 3: ha $\theta \ll 1$, akkor a $\theta = 0$ pont környezete síknak tekinthető, és a síkbeli

$$\Delta U(x, y) = \delta(0, 0) \quad (20)$$

Laplace-egyenlet megoldása

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (21)$$

Az így meghatározott feszültség értéke megegyezik a szakirodalomból (Wait 1962) is ismert képlettel,

$$V(\theta) = \frac{i I_s h_c \nu(\nu + 1)}{4 \omega \varepsilon r^2 \sin(\nu \pi)} P_\nu(-\cos \theta). \quad (22)$$

Mivel a forrás a $\theta = 0$ pontban van, a (22) képlet azt is jelenti, hogy a feszültség a forrás és a mérés szögtávolságának függvénye. Ezáltal lehetővé válik, hogy arra az esetre is felírjuk a feszültség képletét, amikor a forrás és a mérés helye a Föld tetszőleges pontjára esik. Ekkor alkalmazva a gömbháromszögekre vonatkozó koszinusztételt megkapjuk a forrás és a mérés γ szögtávolságát,

$$\cos \gamma = \cos \theta' \cos \theta + \sin \theta' \sin \theta \cos(\phi' - \phi). \quad (23)$$

A vesszővel jelölt koordináták a forrás koordinátái, a vessző nélküliek a mérés helyére vonatkoznak. Ha a (22) képletben a θ helyébe γ -t írunk, megkapjuk a feszültség értékét tetszőleges forrás-, mérés helyre. A Legendre-függvényt számíthatjuk a

$$\frac{P_\nu(-x)}{\sin(\nu \pi)} = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1) - \nu(\nu+1)} P_n(x)$$

sorfejtéssel (Erdélyi 1953, Wait 1962), ahol P_n az n -edik Legendre-polinom. Ennek a képletnek az előnye az egyszerű programozhatósága, hátránya a lassú konvergencia. A Legendre-függvény számítható a hipergeometrikus függvénnyel is (Erdélyi 1953),

$$P_\nu(-x) = F(-\nu, \nu+1, 1, \frac{1+x}{2}). \quad (24)$$

A számításaink során ezt a képletet alkalmaztuk.

Inhomogén hullámvezető

A cél az, hogy arra az esetre számítsuk ki a feszültség értékét, amikor az ionoszféra magassága különböző a Föld nappali és éjszakai oldalán. Első lépésként egy újabb képletet adunk meg a feszültségre állandó ionoszféra-magasságra, és tetszőleges forrás-, mérés koordinátákra, majd ezt módosítjuk az eltérő nappali és éjszakai ionoszféra-magasság esetére. A forrás gömbkoordinátái: (θ', ϕ') . Ekkor a V feszültség nemcsak a θ -tól, hanem ϕ -tól is függeni fog. A feszültséget meghatározó (17) egyenletet a változók szétválasztásával oldjuk meg,

$$V(\theta, \phi) = V_t(\theta) V_p(\phi). \quad (25)$$

A V_p -t meghatározó egyenlet:

$$\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} V_p = -\mu V_p. \quad (26)$$

$V_p(\phi)$ egy 2π szerint periodikus függvény, és ehhez az kell, hogy a μ szeparációs változó egy egész szám legyen ($\mu = m^2$, $m = 0, 1, 2, \dots$). Így minden m -re lesz egy $V_t^{(m)}$ és egy $V_p^{(m)}$ megoldás,

$$V_p^{(m)} = \cos(m(\phi - \phi')). \quad (27)$$

A $V_t^{(m)}$ -et meghatározó egyenlet

$$\frac{\partial}{\partial x} \left((1 - x^2) \frac{\partial}{\partial x} V_t^{(m)} \right) + \left(\nu(\nu + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) V_t^{(m)} = 0 \quad (28)$$

alakban írható fel. (28) megoldásai a $P_\nu^m(\cos \theta)$ és $P_\nu^m(-\cos \theta)$ csatolt Legendre-függvények. A P_ν^m Legendre-függvénynek -1 -nél szingularitása van, ez fogja meghatározni, hogy a koszinuszfüggvény mikor szerepel az argumentumban pozitív, illetve negatív előjellel. A feszültséget meghatározó általános képlet az összes partikuláris megoldás összege,

$$V = c \sum_{m=0}^{\infty} (c_{1,m} P_V^m(\cos\theta) + c_{2,m} P_V^m(-\cos\theta)) \cos(m(\phi - \phi')) \quad (29)$$

A képletben szereplő, egyelőre még ismeretlen c , $c_{1,m}$, $c_{2,m}$ szorzótényezők meghatározásához alkalmazzuk a Legendre-függvényekre vonatkozó addíciós képletet (Erdeyi 1953),

$$\begin{aligned} & P_V(-\cos\theta \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta' \cos(\phi - \phi')) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-1)^m \frac{\Gamma(\nu - m + 1)}{\Gamma(\nu + m + 1)} \\ & \times P_V^m(-\cos\theta) P_V^m(\cos\theta') \cos(m(\phi - \phi')), \end{aligned} \quad (30)$$

ahol

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & \text{ha } m = 0, \\ 2, & \text{ha } m > 0. \end{cases}$$

A (30) képlet bal oldalán a Legendre-függvény argumentumában a gömbháromszögekre vonatkozó koszinusztétel értelmében a forrás és az észlelési hely szögtávolsága szerepel. Ez azt jelenti, hogy a (22) képletben szereplő Legendre-függvény kifejezhető a (30) sorfejtéssel is. Így a (22) és az addíciós képlet együttesen megadják az állandó ionoszféra-magasság esetén érvényes feszültséget tetszőleges helyen levő forrás esetére a (29) képletben levő sorfejtéssel. Ezáltal az ott szereplő ismeretlen együtthatókat is megkapjuk. Az addíciós képletben θ és θ' felcserélhető. Ha $\theta < \theta'$, akkor az addíciós képletnek azt a változatát kell alkalmazni, amikor a mérés θ koordinátája $P_V^m(\cos\theta)$ -ban jelenik meg, hiszen a $\theta = 0$ pólusban nem lehet szingularitás,

$$\begin{aligned} V &= \frac{i I_s h_c \nu(\nu + 1)}{4 \omega \varepsilon r^2 \sin(\nu \pi)} \\ & \times \sum_{m=0}^{\infty} b_{1,m} P_V^m(\cos\theta) \cos(m(\phi - \phi')). \end{aligned} \quad (31)$$

A $b_{1,m}$ együttható:

$$b_{1,m} = \varepsilon_m (-1)^m \frac{\Gamma(\nu - m + 1)}{\Gamma(\nu + m + 1)} P_V^m(-\cos\theta'). \quad (32)$$

Ha $\theta > \theta'$, akkor a P_V^m argumentumában a $\cos\theta$ előjele negatív kell legyen, hiszen a $\theta = \pi$ pólusban nem lehet szingularitás. Ekkor az addíciós képlet másik változata szerint,

$$\begin{aligned} V &= \frac{i I_s h_c \nu(\nu + 1)}{4 \omega \varepsilon r^2 \sin(\nu \pi)} \\ & \times \sum_{m=0}^{\infty} b_{2,m} P_V^m(-\cos\theta) \cos(m(\phi - \phi')), \end{aligned} \quad (33)$$

$$b_{2,m} = \varepsilon_m (-1)^m \frac{\Gamma(\nu - m + 1)}{\Gamma(\nu + m + 1)} P_V^m(\cos\theta'). \quad (34)$$

A (31) és a (33) képletek is megadják tehát a feszültség értékét állandó ionoszféra magasságra. Mindkét képlet a (29) képlet speciális esete.

A (29) képlet nemcsak abban az esetben alkalmazható a feszültség számítására, amikor az ionoszféra magassága a Föld teljes felszínén állandó, hanem akkor is, amikor a Föld felszíne olyan tartományokra bontható amelyeken belül állandó az ionoszféra magassága. Ebben az esetben úgy kell megválasztani a $c_{1,m}$ és $c_{2,m}$ együtthatókat az egyes tartományokon belül, hogy a tartományok határán a feszültség és az áramsűrűség-vektor határra merőleges komponense folytonos határátmenettel rendelkezzen. Ez megtehető, ha a Föld felszínét két tartományra, nappalira és éjszakra osztjuk fel. A Föld felszínén kétféle ν értéket adhatunk meg, a

$$\nu = \begin{cases} \nu_d, & \text{ha } \theta < \theta_t, \\ \nu_n, & \text{ha } \theta \geq \theta_t, \end{cases} \quad (35)$$

képlettel. $\theta_t \approx 90^\circ$ a nappal-éjszaka határt adja meg. A Föld nappali és éjszakai tartományát akkor lehet így megadni, ha a koordináta-rendszer $\theta = 0$ pontja megegyezik a Nap helyével. Tegyük fel most, hogy a forrás a napos oldalon $\theta' < \theta_t$ van. Ekkor a c állandó a (29) képletben,

$$c = \frac{i I_s h_c^{(d)} \nu_d (\nu_d + 1)}{4 \omega \varepsilon r^2 \sin(\nu_d \pi)}, \quad (36)$$

a csatolt Legendre-függvények indexe ((29) képlet) ν_d vagy ν_n aszerint, hogy az észlelés nappali vagy az éjszakai tartományra esik. A (29) képlet két tag összegére bontható. Az egyik azt adja meg, hogy mi lenne akkor, ha az éjszakai ionoszféra-magasság megegyezne a nappalival, a másik pedig a megváltozott éjszakai ionoszféra-magasság hatása. Az észlelés helye szerint három esetet különítünk el,

a: $\theta \leq \theta'$

$$c_{1,m} = b_{1,m} + R_m, \quad (37)$$

$$c_{2,m} = 0. \quad (38)$$

Ha $c_{2,m}$ 0-tól különbözne, akkor $\theta = 0$ -nál szingularitás lenne.

b: $\theta' < \theta \leq \theta_t$

$$c_{1,m} = R_m, \quad (39)$$

$$c_{2,m} = b_{2,m}. \quad (40)$$

Ez a tartomány nem tartalmazza sem a $\theta = 0$, sem a $\theta = \pi$ pontot, így mindkét együttható különbözhet 0-tól.

c: $\theta > \theta_t$

$$c_{1,m} = 0, \quad (41)$$

$$c_{2,m} = d_m. \quad (42)$$

Ha $c_{1,m}$ 0-tól különbözne akkor $\theta = \pi$ -nél szingularitás lenne.

A $b_{1,m}$ és $b_{2,m}$ együtthatók számításánál $\nu = \nu_d$. Az R_m és a d_m együtthatókat úgy kell meghatározni, hogy V és $(1/h_c)(\partial V(\theta)/\partial \theta)$ folytonos legyen a $\theta = \theta_t$ határon. Az utóbbi azt jelenti, hogy a θ irányú áramsűrűség a határon folytonosan megy át. Az R_m és d_m együtthatók a határfeltételek alapján számíthatók,

$$R_m = -b_{2,m} \left[P_{\nu_d}^m(-\cos \theta_t) \frac{d}{dx} P_{\nu_n}^m(-\cos \theta_t) - \frac{h_l^{(n)}}{h_l^{(d)}} \frac{d}{dx} P_{\nu_d}^m(-\cos \theta_t) P_{\nu_n}^m(-\cos \theta_t) \right] \times \left[P_{\nu_d}^m(\cos \theta_t) \frac{d}{dx} P_{\nu_n}^m(-\cos \theta_t) + \frac{h_l^{(n)}}{h_l^{(d)}} \frac{d}{dx} P_{\nu_d}^m(\cos \theta_t) P_{\nu_n}^m(-\cos \theta_t) \right]^{-1}, \quad (43)$$

$$d_m = \frac{b_{2,m} P_{\nu_d}^m(-\cos \theta_t) + R_m P_{\nu_d}^m(\cos \theta_t)}{P_{\nu_n}^m(-\cos \theta_t)}. \quad (44)$$

Nyilvánvaló, hogy amennyiben az éjszakai ionoszféra magasság megegyezik a nappalival, speciális esetként megkapjuk azt a képletet, amelyik az állandó ionoszféra-magasságra vonatkozik a nappali értékkel. Ekkor ugyanis $R_m = 0$ és $d_m = b_{2,m}$.

Ha a forrás az éjszakai félgömbön van, azaz $\theta' > \theta_t$, a c állandó a (29) képletben:

$$c = \frac{i I_s h_c^{(n)} \nu_n (\nu_n + 1)}{4 \omega \varepsilon r^2 \sin(\nu_n \pi)}. \quad (45)$$

A $b_{1,m}$ és a $b_{2,m}$ értékeket most $\nu = \nu_n$ -nel számítjuk. Az észlelés helye szerint ismét három esetet kell kezelni.

a: $\theta \geq \theta'$

$$c_{1,m} = 0, \quad (46)$$

$$c_{2,m} = b_{2,m} + R_m. \quad (47)$$

Ha $c_{1,m}$ nem lenne 0, akkor szingularitás lenne $\theta = \pi$ -nél.

b: $\theta' > \theta \geq \theta_t$

$$c_{1,m} = b_{1,m}, \quad (48)$$

$$c_{2,m} = R_m. \quad (49)$$

Ez a tartomány nem tartalmazza sem a $\theta = 0$, sem a $\theta = \pi$ pontot, így mindkét együttható különbözhet 0-tól.

c: $\theta \leq \theta_t$

$$c_{1,m} = d_m, \quad (50)$$

$$c_{2,m} = 0. \quad (51)$$

Ha $c_{2,m}$ nem lenne 0, akkor szingularitás lenne $\theta = 0$ -nál.

Ahhoz az esethez hasonlóan, amikor a forrás a nappali oldalon van, R_m és d_m számíthatók a határfeltételekből:

$$R_m = -b_{1,m} \left[P_{\nu_n}^m(\cos \theta_t) \frac{d}{dx} P_{\nu_d}^m(\cos \theta_t) - \frac{h_l^{(d)}}{h_l^{(n)}} \frac{d}{dx} P_{\nu_n}^m(\cos \theta_t) P_{\nu_d}^m(\cos \theta_t) \right] \times \left[P_{\nu_n}^m(-\cos \theta_t) \frac{d}{dx} P_{\nu_d}^m(\cos \theta_t) + \frac{h_l^{(d)}}{h_l^{(n)}} \frac{d}{dx} P_{\nu_n}^m(-\cos \theta_t) P_{\nu_d}^m(\cos \theta_t) \right]^{-1}, \quad (52)$$

$$d_m = \frac{b_{1,m} P_{\nu_n}^m(\cos \theta_t) + R_m P_{\nu_n}^m(-\cos \theta_t)}{P_{\nu_d}^m(\cos \theta_t)}. \quad (53)$$

A komplex számsíkon értelmezett Euler-féle Gamma-függvényt Lánzos módszerével számítottuk (Lanczos 1964).

Koordinátatranszformáció

Az ismertett analitikus megoldás arra az esetre vonatkozik, amikor a Napnak a Földhöz viszonyított helye a koordináta-rendszer $\theta = 0$ pontja. A gyakorlatban viszont mind a források, mind a mérések koordinátái az északi sarkhoz viszonyított koordináta-rendszerben vannak megadva. Ezért koordinátatranszformációra van szükség. A képletekben az 1-es index jelenti az eredeti koordinátákat ($\theta_1 = 0$ az északi sark), az index nélküliek a transzformáltakat ($\theta = 0$ a Nap). Az s index a Nap pozícióját jelenti, az északi sarkhoz viszonyított rendszerben. A koordinátatranszformáció a gömbháromszögekre vonatkozó koszinusz- és szinusztételeken alapul:

$$\cos \theta = \cos \theta_s \cos \theta_1 + \sin \theta_s \sin \theta_1 \cos(\phi_s - \phi_1), \quad (54)$$

$$\sin \phi = \sin(\phi_s - \phi_1) [\sin \theta_1 / \sin \theta]. \quad (55)$$

A mágneses komponensek számításához szükség van a V feszültség θ_1 és ϕ_1 szerinti deriváltjaira ((6), (7) képletek). Ezeket a deriválás láncszabályával kapjuk meg,

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} V = \frac{\partial}{\partial \theta} V \frac{\partial \theta}{\partial \theta_1} + \frac{\partial}{\partial \phi} V \frac{\partial \phi}{\partial \theta_1}, \quad (56)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi_1} V = \frac{\partial}{\partial \theta} V \frac{\partial \theta}{\partial \phi_1} + \frac{\partial}{\partial \phi} V \frac{\partial \phi}{\partial \phi_1}. \quad (57)$$

Ezért szükség van θ és ϕ , θ_1 , illetve ϕ_1 szerinti deriváltjaira, amelyek az (54) és (55) képletek alapján számíthatók.

Numerikus tesztek

Három különböző tesztet mutatunk be, melyek segítségével összehasonlítjuk a Föld-ionoszféra hullámvezetőben kialakuló elektromágneses térkomponensek kétféle számí-

tásának az eredményét. Mindegyik esetben az elektromágneses komponensek abszolút értékének a négyzetét ábrázoljuk. Ez a teljesítménysűrűség. A gyakorlatban az időtartományban végzett SR-mérések adatait is teljesítménysűrűséggé transzformálják. Az ionoszféra frekvenciafüggő komplex magasságát a szakirodalomból vettük (Kulak, Mlynarczyk 2013).

1. teszt

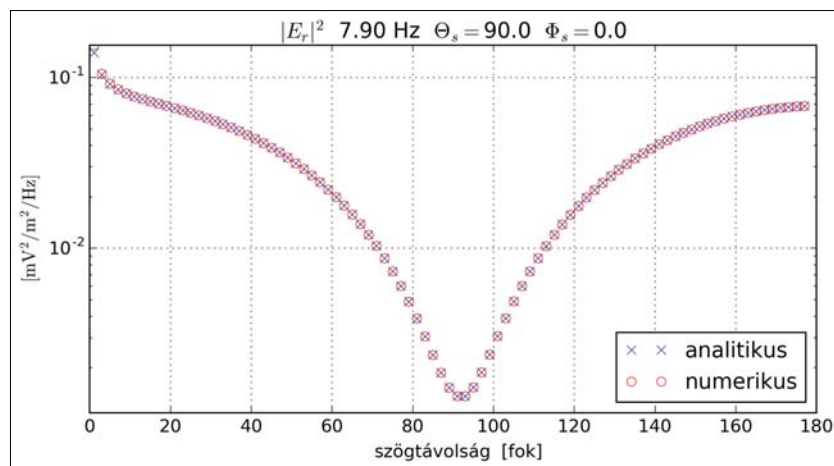
Elsőként állandó ionoszféramagasságra hasonlítjuk össze a kétféle számítás eredményét, és a (22) és (4) képletekkel meghatározott $|E_r|^2$ komponenst számítjuk ki.

A számítást 7,9 Hz-re, az első SR-frekvenciára végezzük el, és az eredményeket a forrástól való távolság függvényében ábrázoljuk (2. ábra). A forrás erőssége $6 \times 10^4 \text{ C}^2\text{km}^2/\text{s}$. Látható, hogy a kétféle számítás eredménye tel-

jesen egybeesik, csak a forrás közelében van egy minimális eltérés. A 2. ábra grafikonja jól mutatja az SR-mérések legfontosabb jellemzőit az első rezonanciafrekvenciára. 90° -nál minimuma van, és egy másodlagos maximuma a forrással ellentétes pólusban, azaz a forrástól 180° szögtávolságra.

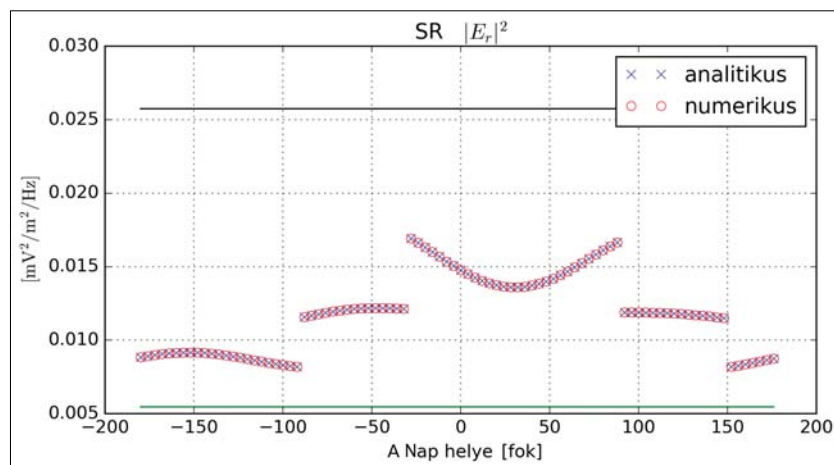
2. teszt

Most különböző nappali és éjszakai ionoszféra-magasságokkal – azaz inhomogén hullámvezetővel – számolunk, továbbra is 7,9 Hz-re. A forrás és a mérés helye rögzített, a Nap helye viszont az egyenlítő mentén változik. Ebből következik, hogy a nappal-éjszaka határvonal észak-dél irányú. Ennek a hatását mutatja a függőleges elektromos térkomponensre a 3. ábra és a θ irányú mágneses komponensre a 4. ábra. A forrás (10°N , 0°E , $6 \times 10^4 \text{ C}^2\text{km}^2/\text{s}$) és



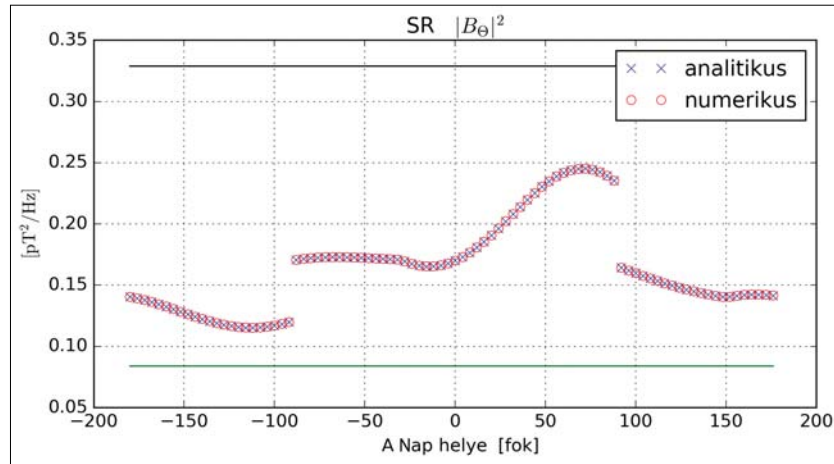
2. ábra Az elektromos térerősség 7,9 Hz-re a forrástól való távolság függvényében analitikusan és numerikusan számítva, homogén Föld-ionoszféra hullámvezetőt feltételezve

Figure 2 Electric field intensity at 7.9 Hz for a uniform Earth-ionosphere cavity as a function of distance from the source determined by our analytical and numerical models



3. ábra Az elektromos térkomponens változása a Nap helyének függvényében, 7,9 Hz-re, inhomogén hullámvezető esetén, analitikus és numerikus modellezéssel. A kétféle számítás eltérése kevesebb mint 0.05%

Figure 3 Electric field intensity at 7.9 Hz for the nonuniform Earth-ionosphere cavity as a function of the Sun's position determined by our analytical and numerical models. The two results agree within 0.05%



4. ábra | Megfelel a 3. ábrának, de itt a mágneses térerősség θ irányú komponense van ábrázolva. Az inhomogén modellhez tartozó számítások százalékos eltérése kevesebb mint 0,08%

Figure 4 | Same as Fig. 3 but for the θ component of the magnetic field intensity. Here the results of the two nonuniform models agree within 0.08%

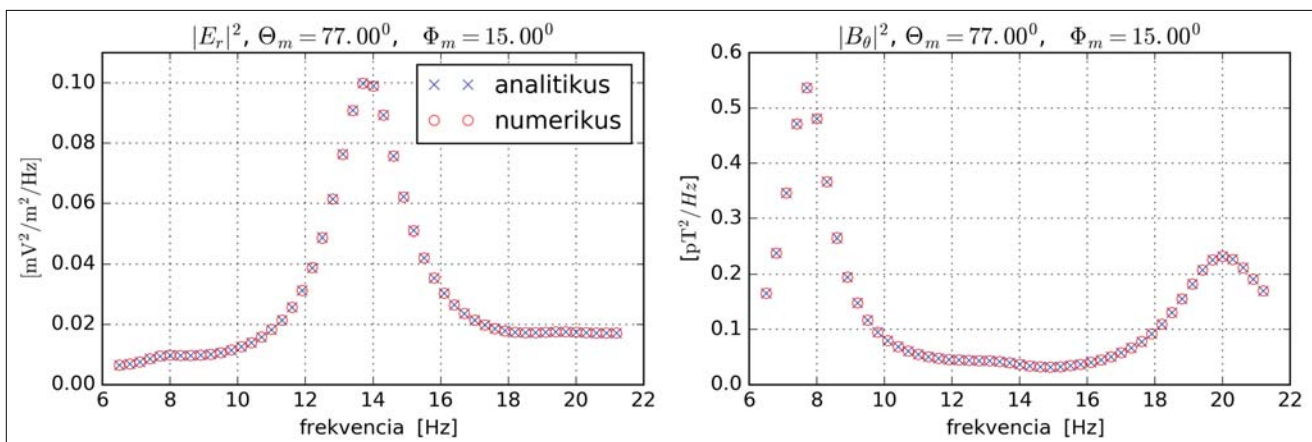
a mérés (70°N, 60°E) az északi félgömbön vannak. Összehasonlítás céljából homogén hullámvezetőre is kiszámítottuk a térértékeket kétféle ionoszféra magassággal. Mindkettőt egy vízszintes vonal jeleníti meg a 3. és 4. ábrán. A felső vonal arra az esetre vonatkozik, amelyet akkor mérnénk, ha mindenütt a nappali értéknek megfelelő ionoszféra-magasság lenne, az alsó vonal az éjszakai ionoszféra-magasságnak felel meg. Az inhomogén hullámvezetőhöz tartozó értékek ezen két vonal közé esnek. 7,9 Hz-nél a komplex ionoszféra-magasságok valós részei: $h_c^{(d)} = 53,1$ km, $h_i^{(d)} = 101,4$ km, $h_c^{(n)} = 62,5$ km és $h_i^{(n)} = 114,5$ km (Kulak, Mlynarczyk 2013).

A két különböző típusú modellszámítás eredménye most is egybeesik. Az elektromos térerősség görbéjének (3. ábra) akkor van szakadása, amikor a forrás vagy a mérés helye a nappal-éjszaka határra esik. A nappal-éjszaka határ a Nap helyéhez képest -90° és $+90^\circ$ -ra van, ezért a forrás (0°) akkor esik a nappal-éjszaka határra, ha a Nap a -90° vagy $+90^\circ$ -on van. A mérési helyre (60°) ez a két érték -30° és 150° . A mágneses komponensnek (4. ábra) nincs szakadása a nappal-éjszaka határvonalon, mivel az az (5)

képlet értelmében megegyezik a megfelelő áramsűrűség-komponenssel, amelynek nem lehet szakadása a nappal-éjszaka határon. Szakadás csak abban az esetben van, amikor a forrás esik a nappal-éjszaka határra (-90° , $+90^\circ$ Nappozíció).

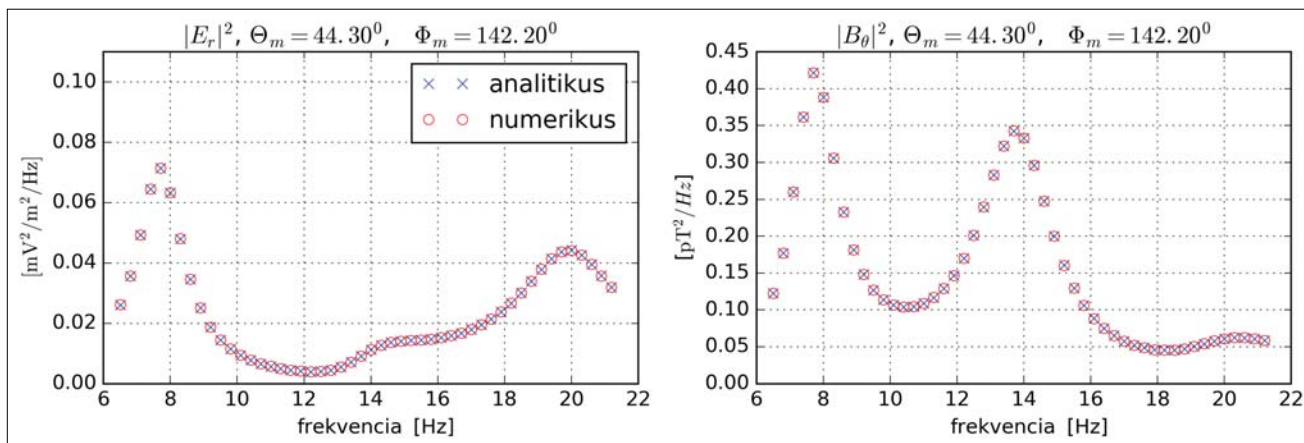
3. teszt

Végül a teljes adatspektrumra végezzük el a kétféle számítás összehasonlítását! Az adatokat úgy ábrázoljuk, ahogy a gyakorlati SR-méréseket szokták. A számításokat három forrás esetére végeztük el, melyeket úgy helyeztünk el, hogy megfeleljenek a Földön legnagyobb intenzitással előforduló zivatarok három kiemelt helyének. Ezeknek a földrajzi koordinátái (0° , 80° W), (7° S, 20° E) és (0° , 110° E), az intenzitások pedig 6×10^4 C²km²/s, 9×10^4 C²km²/s és 6×10^4 C²km²/s. A számításokat a Lengyel Tudományos Akadémia Horsund obszervatóriumának (77° N, 15° E) és a Japánban levő Moshiri SR-állomásnak ($44,3^\circ$ N, $142,2^\circ$ E) a koordinátaival végeztük el. Az 5. és 6. ábrán láthatóak



5. ábra | Az $|E_r|^2$ és $|B_\theta|^2$ térkomponensek modellezett spektrumjai a Horsund obszervatórium földrajzi koordinátáinál

Figure 5 | Modelled spectra for the $|E_r|^2$ and $|B_\theta|^2$ field components at the geographical coordinates of the Horsund observatory



6. ábra | E_r |² és | B_θ |² térkomponensek modellezett spektrumjai a Moshiri obszervatórium földrajzi koordinátáinál
 Figure 6 Modelled spectra for the | E_r |² and | B_θ |² field components at the geographical coordinates of the Moshiri observatory

az $|E_r|^2$ és a $|B_\theta|^2$ térkomponensek spektrumértékei. Az adatok illeszkedése itt is nagyon jó, a teljes tartományban a relatív hiba kisebb mint 0,4%. A görbék lokális maximumai a várt SR-frekvenciáknál vannak, azaz ≈ 8 , ≈ 14 , ≈ 20 Hz-nél.

A rezonanciacsúcsok azokon a frekvenciákon jelennek meg, ahol az egymással szemben haladó hullámok fázisa megegyezik, tehát a direkt és a Földet megkerülő hullám egymást erősítik. Ez a jelenség okozza, hogy a Schumann-rezonancia-frekvenciáknál, az 5. és a 6. ábrán lokális maximumok jelennek meg. Vannak azonban kivételek, például az 5. ábrán az első rezonanciafrekvenciánál csak alig észrevehető a lokális maximum a $|E_r|^2$ komponens esetében. Ez azzal magyarázható, hogy a Horskund obszervatórium szögtávolsága mindhárom forráshoz viszonyítva 90° közeli, és 90° -nál $|E_r|^2$ -nek minimuma van, amint az a 2. ábrán látható. A $|B_\theta|^2$ -nek, viszont maximuma van az első rezonanciafrekvenciánál, mivel az a V feszültség hely szerinti deriválásából adódik. A második rezonanciafrekvenciánál pont fordított a helyzet.

Következtetések

Ebben a cikkben bemutattunk egy analitikus és egy numerikus algoritmust a villámások által generált elektromágneses tér modellezésére az extrém alacsony frekvenciasáv alsó részében (<100 Hz). Mindkét számítás esetén figyelembe vettük az ionoszféra eltérő nappali és éjszakai magasságának a hatását a Föld–ionoszféra hullámvezető paramétereire. Három tesztet mutattunk be, amelyek alapján nyilvánvaló, hogy a kétféle algoritmus lényegében ugyanazokat az eredményeket adja, ami tekinthető az algoritmusok hitelesítésének is. Ki kell emelni, hogy a két algoritmus matematikailag teljesen független, így nemcsak az alkalmazott képletek helyessége, hanem azok megfelelő implementálása is igazolást nyert. A következő lépés az analitikus algoritmus alkalmazása lehet egy inverziós program moduljaként, amely SR-mérési adatok alapján becslést ad a zivatarok intenzitására a Föld felszínén. A numerikus

algoritmus is alkalmas lehet erre a feladatra, de a nagyobb számítási idő miatt ez kevésbé célszerű.

Köszönetnyilvánítás

A kutatást a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal – NKFIH K115836 sz. projektje támogatta.

A tanulmány szerzői

Prácser Ernő, Bozóki Tamás

Hivatkozások

- Amestoy P. R., Duff I. S., Koster J., L'Excellent J. Y. (2001): A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 23/1, 15–41.
- Dey A., Morrison H. F. (1979): Resistivity modelling for arbitrarily shaped two-dimensional structures. *Geophysical Prospecting*, 27, 106–136.
- Erdélyi A. (1953): *Higher Transcendental Functions*. California Institute of Technology.
- Galuk Yu P., Nickolaenko M., Hayakawa M. (2018): Amplitude variations of ELF radio waves in the Earth–ionosphere cavity with the day–night nonuniformity. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 169, 23–36.
- Kirillov V. V., Kopeikin V. N. (2002): Solving a two-dimensional telegraph equation with anisotropic parameters. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 45/12.
- Kirillov V. V., Kopeikin V. N., Mushtak V. K. (1997): ELF electromagnetic waves in the Earth-ionosphere waveguide channel. *Geomagnetism and Aeronomy*, 37/3, 341–345.
- Kulak A., Mlynarczyk J. (2013): ELF propagation parameters for the ground–ionosphere waveguide with finite ground conductivity. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 61/4.
- Lanczos C. (1964): A precision approximation of the gamma function. *J. Soc. Ind. Appl. Math. B Numer. Anal.*, 1/1, 86–89.
- Madden T., Thompson W. (1965): Low-frequency electromagnetic oscillation of the Earth–ionosphere cavity. *Reviews of Geophysics*, 3/2, 211–254.

- Nickolaenko A. P. (1997): Modern aspects of Schumann resonance studies. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 59/7, 805–816.
- Pechony O., Price C. (2004): Schumann resonance parameters calculated with a partially uniform knee model on Earth, Venus, Mars, and Titan. *Radio Sci.*, 39. DOI: 10.1029/2004RS003056.
- Polk C. (1982): *Handbook of Atmospheric*. CRC Press, Boca Ration.
- Price C., Pechony O., Greenberg E. (2006): Schumann resonances in lightning research. *Journal of Lightning Research*, 1, 1–15.
- Sátori G., Bencze P., Marcz F., Zieger B. (2002): A Föld-ionosféra hullámvezető vizsgálata. *Magyar Geofizika*, 43, 38–41.
- Schumann W. O. (1952): Über die Dämpfung der elektromagnetischen Eigenschwingungen des Systems Erde-Luft-Ionosphäre. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 7/3–4, 250–252.
- Stoyan G., Takó G. (1997): *Numerikus módszerek III. ELTE – TypoTEX*.
- Wait J. R. (1962): *Electromagnetic Waves in Stratified Media*. Pergamon Press, Ltd.