

A nehézségi erőter gradiensei Magyarország területén Eötvös-inga- és műholdas mérések alapján

VÖLGYESI L.[@], TÓTH GY., PONGRÁCZ D.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Építőmérnöki Kar, Általános- és Felsőgeodézia Tanszék,
H-1521 Budapest, Műgyetem rkp. 3.
[@]E-mail: volgyesi.lajos@emk.bme.hu

A korábbi magyarországi Eötvös-inga-mérések digitális adatbázisba mentése lehetőséget teremtett arra, hogy a nehézségi erő gradienseinek területi eloszlását izovonalas térképeken egyben ábrázoljuk Magyarország teljes területére. A korábbi ingamérések közel negyede sajnos időközben már megsemmisült, ezért a térképeken nagy fehér foltok láthatók. Fehér foltok persze ott is vannak, ahol eleve nem végeztek méréseket, vagy csak a nyersanyagkutatásokhoz szükséges horizontális gradienseket használták, a görbületi értékeket meg sem határozták. Az utóbbi idők űrgravimetriai, űrgradiometriai mérései lehetőséget teremtettek arra, hogy a hiányos területekre is meghatározzuk a gradienseket. Vizsgálataink során olyan geopotenciál-modelleket használtunk a gradiensek számítására, amelyekben szereplő gömbfüggvény-együtthatók meghatározásakor figyelembe vettük a GRACE és a GOCE műholdak méréseit is. Tanulmányunkban megmutatjuk, hogy mivel az így meghatározott horizontális és görbületi gradiensek nem tartalmaznak az erőter finomszerkezetét jellemző rövidebb hullámhosszú térbeli változásokat, ezért csak korlátozottan alkalmasak a hiányos, fehér területek kitöltésére. Ugyanakkor így is érdekes és hasznos információkat szolgáltatnak.

Kulcsszavak: nehézségi erő gradiensei, gradienstérképek, Eötvös-tenzor, GRACE, GOCE, geopotenciál-modellek

Völgyesi, L., Tóth, Gy., Pongrácz, D.: Gravity gradients in Hungary based on torsion balance and satellite measurements

The digital database of previous Eötvös torsion balance measurements in Hungary has made it possible to visualize the spatial distribution of gravity gradients on isoline maps for the whole territory of Hungary. Unfortunately, nearly a quarter of the former torsion balance measurements have been lost, so the maps show large white areas. Of course, there are also white spots where no measurements were taken in, or where only the horizontal gradients were used for geophysical prospecting, and the curvature values were not determined. Recent satellite gravimetric and satellite gradiometric measurements have provided the opportunity to determine gradients for the empty areas. In our investigations, we used geopotential models for the calculation of gradients, which included measurements from the GRACE and GOCE satellites in the determination of the spherical harmonic coefficients. Our study shows that, since the horizontal and curvature gradients thus determined do not include the shorter wavelength spatial variations that characterize the fine structure of the gravity field, they are of limited use for filling in the missing white areas. However, they still provide interesting and useful information.

Keywords: gravity gradients, gradient maps, Eötvös-tensor, GRACE, GOCE, geopotential models

Beérkezett: 2023. február 26.; *elfogadva:* 2023. március 3.

1. Bevezetés

Köszönhetően Eötvös Lorándnak és munkatársainak Magyarország az itt végrehajtott mintegy 60 000 Eötvös-ingaméréssel a világon legjobban felmért terület (Völgyesi et al. 2015). Ezek közül közel 45 000 mérés adatait sikerült digitális adatbázisba menteni, viszont kb. 15 000 mérés

adatai már elvesztek. A meglévő digitális adatbázis kényelmes lehetőséget teremtett arra, hogy egyben ábrázoljuk a gradiensek területi eloszlását Magyarország teljes területére. Rátéekintve az ingamérésekkel lefedett területekre, kisebb-nagyobb üres foltok láthatók, ahol nem állnak rendelkezésre közvetlen mérések. A nehézségi erő gradienseinek óriási jelentősége van a geoid finomszerkezetének

meghatározásában, de a geofizikában is használják a gravitációs hatóeremek kijelölésében. Emiatt jelentős igény van a hiányos területeken a gradiensek pótlására. Erre próbáltunk megoldást keresni, és kézenfekvőnek látszott az utóbbi idők műholdas mérési technikáit bevetni erre a feladatra.

A célunk a mért, és a geopotenciál modellből számítható gradiensek használhatóságának megállapítása, illetve a mérések által le nem fedett területeken a hiányzó gradiensek pótlása.

2. Az Eötvös-tenzor

A nehézségi erőter a Föld körül sehol sem homogén. Az 1. ábrán két egymástól ds elemi távolságra lévő P és Q pontban látható a nehézségi erő $\mathbf{g}_P$ és $\mathbf{g}_Q$ vektora, illetve a két vektor $d\mathbf{g}$ különbsége (megváltozása) a két pont között. A nehézségi erő $d\mathbf{g}$ elemi megváltozása bármely tetszőleges ds térbeli irányban egyszerűen meghatározható a:

$$d\mathbf{g} = \mathbf{E} ds, \quad (1)$$

vagy az 1. ábrán látható térbeli derékszögű koordináta-rendszerben a:

$$\begin{bmatrix} dg_x \\ dg_y \\ dg_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad (2)$$

összefüggéssel, ahol

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{bmatrix} \quad (3)$$

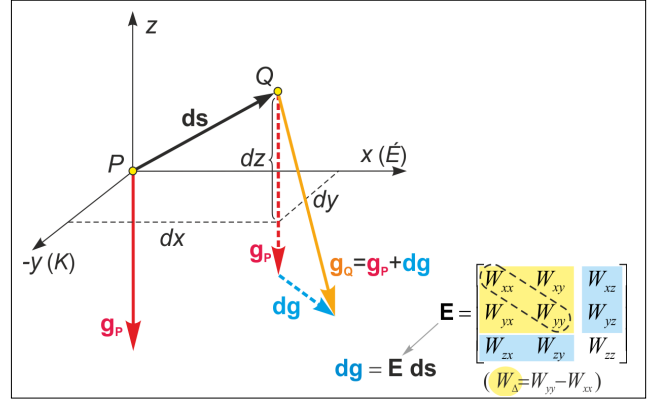
az *Eötvös-tenzor*, amely elemei a nehézségi erő W potenciálfüggvényének második deriváltjai. A tenzor elemei a W_{xx} példáján keresztül:

$$W_{xx} = \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial g_z}{\partial x}, \quad \text{mivel} \quad \frac{\partial W}{\partial z} = g_z, \quad (4)$$

vagyis a potenciál első deriváltjai a nehézségi erő vektorának összetevői, a második deriváltak pedig ezeknek az összetevőknek az elemi változásai (gradiensei). Mivel a második parciális deriválás sorrendje *Jung tétele* szerint felcserélhető, ezért:

$$W_{zx} = W_{xz}, \quad W_{zy} = W_{yz}, \quad W_{xy} = W_{yx} \quad (5)$$

tehát az Eötvös-tenzor szimmetrikus tenzor. A tenzorban szereplő $W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}$ és W_{xy} görbületi gradiensek, valamint a W_{zx} és W_{zy} horizontális gradiensek *Eötvös-ingával* mérhetők. Az 1. ábrán az Eötvös-tenzor sárga színnel kiemelt elemei a görbületi gradiensek, a kék színnel kiemelt területen pedig a horizontális gradiensek vannak. A tenzorban szereplő W_{zz} vertikális gradiens ugyan közvet-



1. ábra A nehézségi erő két pont közötti elemi megváltozása

Figure 1 Elementary change of gravity between two points

lenül nem mérhető Eötvös-ingával, azonban az értékei a görbületi és a horizontális gradiensek felhasználásával interpolációval meghatározhatók (Haalck 1950, Tóth et al. 2004).

Szükség esetén a

$$W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} = 0 \quad (6)$$

Laplace-egyenlet és a $W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}$ felhasználásával a W_{zz} vertikális gradiens ismeretében a W_{xx} W_{yy} különválasztható, vagyis a teljes Eötvös-tenzor (az ún. *Full-Tensor*) is megadható.

3. Magyarországi Eötvös-inga-mérések

A torziósinga-mérések Eötvös Loránd nevéhez fűződnek, aki az 1880-as évek közepén kezdett gravitációs kutatásokkal foglalkozni. Kutatásainak elsődleges célja a nehézségi erő potenciálfelületének és ennek felhasználásával a Föld alakjának vizsgálata volt. Kezdeti méréseit Coulomb-féle ingával végezte, majd ezt továbbfejlesztette. 1891-ben megépített műszerével már ugyanazon év augusztusában végrehajtotta első terepi méréseit a Cell-dömölk melletti Ság hegy mellett. Mérési eredményeit a Ság hegy akkor még szabályos csonka kúp alakú tömegének gravitációs hatását kiszámítva ellenőrizte (Szabó 1999, 2016, 2018).

Eötvös következő nevezetes méréseit 1901 és 1903 téli hónapjaiban, összesen 40 állomáson, a Balaton jegén végezte. A balatoni méréseknek az volt a jelentősége, hogy nem kellett a felszíni topográfiai tömegek zavaró hatása miatt korrekciókat számolni, és a mérési eredményekből közvetlenül lehetett következtetni a felszín alatt eltakart tömegrendellenességekre.

A Ság hegyi és balatoni kísérleti méréseket követően Kecskemét környékén az 1911. évi földrengés után végeztek nagyobb területen torziósinga-méréseket. A gradiensek és az ezekből szerkesztett izovonalak alapján arra a megállapításra jutottak, hogy a mélyben egy nagyobb sűrűségű holdkráterszerű képződmény található, amely összefügghet az 1911. évi kecskeméti földrengéssel.

Az 1910-es években kezdődött az Erdélyi-medence részletes geológiai felmérése, ennek keretében 1912-től jelentős torziósinga-mérések is indultak. A méréseknek sajnos az I. világháború kitörése véget vetett.

Az első igazi nagy sikert hozó terepi szerkezetkutató méréseket 1916-ban Morvamezőn, Egbell (ma a szlovákiai Gbely) környékén végezték. A kifejezetten szénhidrogén-kutatás céljából végzett mérésekkel felboltozódást (antiklinálist) mutattak ki, majd az itt lemélyített fúrásokban kitermelhető kőolajat és földgázt találtak.

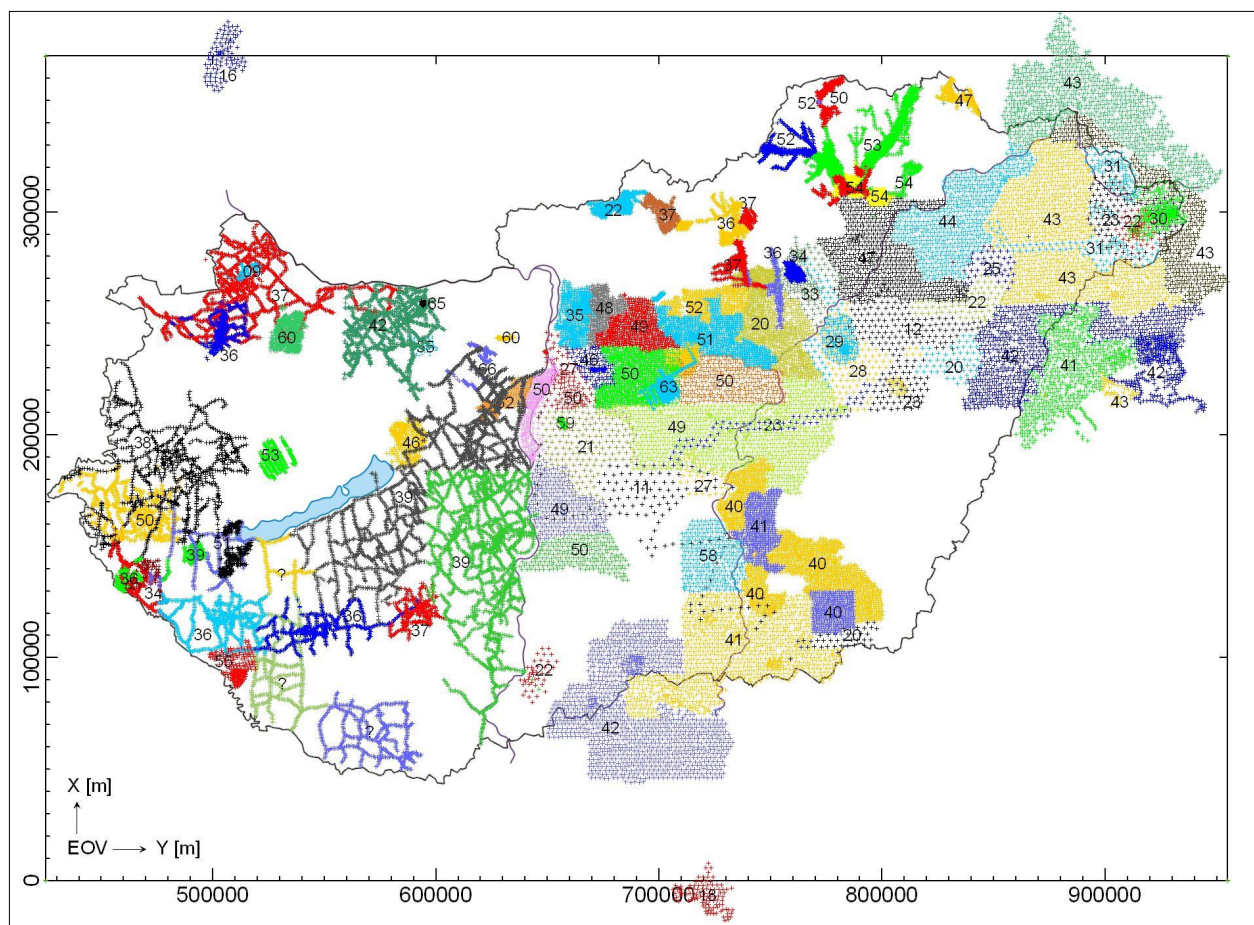
Eötvös 1919-ben bekövetkezett haláláig 1420 ponton határozták meg a nehézségi erőter gradientsét és potenciál-felületének görbületi jellemzőit. A méréseket, ahol a topográfia megengedte, általában szabályos rácshálózatban végezték, kezdetben 3-4, majd 2, ill. 1 km-es állomástávolsággal.

Az 1920-as évek kezdetétől a torziós ingák egyre nagyobb szerepet játszottak a kőolajkutatásban. Ezeket a méréseket kizárólag gazdaságossági szempontok vezették, így kezdetben főleg utak mentén mértek, majd ahol a mérési eredmények kedvező földtani szerkezetet jeleztek, ott áttértek a hálózatos mérésekre. A Zalai dombvidéken, a kedvezőtlen terepi adottságok miatt, kénytelenek voltak méréseiket a völgyekre korlátozni.

Magyarországon az első szénhidrogénmező feltárása is Eötvös-inga-mérésekhez kapcsolódik, Budafapuszta környékén 1934–35-ben elvégzett mérések alapján találtak kőolajat. A Dunántúl torziós ingás felmérését az European Gas and Electric Co. (EUROGASCO) majd a Magyar–Amerikai Olajipari Rt. (MAORT) végezte. Ezzel párhuzamosan az Alföldön az Eötvös Loránd Geofizikai Intézet végzett hasonló mennyiségű torziósinga-mérést.

A MAORT 1949 végén történt államosításáig kb. 27 000 Eötvös-inga-mérést végeztek (Gombár et al. 2002). 1950-ben a geofizikai részleg átkerült az ELGI-hez, de az addig felhalmozódott észlelési anyag nem. Így ellentétben az ELGI-vel, ahol az észlelési lapokat folyamatosan megőrizték, a dunántúli mérésekről csak térképi formában maradtak fenn Eötvös-inga-mérési anyagok. 1963 és 1967 között az olajipar ismét berendezkedett Eötvös-inga-mérésekre, melyeket általában szeizmikus szelvények nyomvonalán 300 m-es állomástávolsággal végeztek. Ebben az időszakban további, mintegy 2900 állomáson végeztek méréseket (Völgyesi 2019).

Magyarországon az utolsó nyersanyagkutató terepi Eötvös-inga-mérésre 1967-ben került sor. Az 1901–1967 közötti időszakban a MAORT, az ELGI és az Országos Kőolaj és Gázipari Tröszt (OKGT) összesen mintegy 60 000



2. ábra | Digitális adatbázisba rendezett mintegy 45 000 hazai Eötvös-inga-mérés pontjainak területi eloszlása
Figure 2 | Spatial distribution of about 45 000 Hungarian Eötvös torsion balance measurement points in a digital database

állomáson végzett torziósinga-méréseket a sík és az enyhén dombvidéki területeken. Ebbe a trianoni határon túli területekre eső kb. 5000 állomás is beletartozik. Ennyi méréssel a Kárpát-medence a Föld Eötvös-ingával legjobban felmért területe (Völgyesi 2019).

A 2000-es évek közepétől ismét folynak Eötvös-inga-mérések Magyarországon. Több műszer felújítását és modernizálását követően 2008–2009-ben terepi méréseket végeztünk a Csepel-sziget déli részén, Makád környezetében (Völgyesi et al. 2009), 2017-től pedig az Eötvös-féle ekvivalenciámérések megismétlése a legújabb kihívás (Völgyesi et al. 2018).

4. A gradiensemérések adatbázisa

Mivel a korábbi méréseket elsősorban ásványi nyersanyagok kutatása céljából végezték, ezért nagy általánosságban csak a W_{xx} és a W_{yy} horizontális gradienseket dolgozták fel, a geodézia szempontjából fontosabb W_{Δ} és W_{xy} görbületi gradiensek feldolgozatlanul maradtak. Felismerve, hogy ezek a feldolgozatlan gradiensadatok mekkora értéket jelentenek a geodézia számára, Bíró Péter akadémikus, a Műegyetem korábbi Felsőgeodézia Tanszékének professzora az 1970-es évek elején elindította az Eötvös-inga-mérések geodéziai hasznosítására vonatkozó tanszéki kutatásokat. A tanszék megkezdte a közel 60 000 pontban végzett torziósinga-mérés geodéziai hasznosításának előkészítését. Először kísérleti területen végzett vizsgálatokkal a feldolgozás módszerét korszerűsítették, majd a Felsőgeodézia Tanszék és az akkori ELGI az 1990-es évek közepén kutatási együttműködési szerződést kötött a még meglévő mérési eredmények digitális adatbázisba mentésére. Ennek keretében a BME finanszírozásával 1995-től 2014-ig folyt a korábbi Eötvös-inga-mérések anyagának mentése. Az adatbázist a különböző formában a még fellelhető mérési anyagok (észlelési lapok, mérési jegyzőkönyvek, térképek vagy fénymásolt gradienstérképek) alapján alakították ki. A digitalizált adatok területi eloszlását a 2. ábrán láthatjuk. Az adatbázis 44 852 Eötvös-inga-mérési adatot tartalmaz, sajnos a további mintegy 15 000 mérési adat már korábban megsemmisült, amelyek Bács-Kiskun, Békés és Hajdú-Bihar vármegyék jelentős területét érintik. Az ábrán feltüntetett számok az 1900-as években a különböző területeken végzett mérések évszámát mutatják (Völgyesi 2019). A koordináták EOVS rendszerre vonatkoznak.

Az adatbázisba kerülő gradiensek a nagyobb területeken különböző években végzett mérések szerint kerültek feldolgozásra. A nagyobb mérési területek időbeli sorrendben: Kecskemét/1911, Egbell/1916, Hortobágy/1917, Újvidék/1918, Makó/1920, Hajdúszoboszló/1920, Baja/1922, Szatmár/1922, Püspökladány/1923, Rápolc/1923, Újfehértó/1925, Karcag/1926, Budapest/1927, Tiszakécske/1927, Karcag–Püspökladány/1928, Kunmadaras/1929, Ricse/1930, Mezőtarpa/1931, Mezőkövesd/1933–34, Budafa/1934, Budapest/1935, Füzesabony/1936, Inke/1936,

Kaposvár/1936, Lovászi/1936, Mihályi/1936, Parád/1936, Bátor/1937, Kisalföld/1937, Sósartyán/1937, Verpelét/1937, Heves/1938, Orosháza/1940, Tóthkomlós/1940, Derna/1941, Hódmezővásárhely/1941, Tóthkomlós/1941, Nagyléta/1942, Mélykút/1942, Margitta/1943, Szatmárnémeti–Beregszász/1943, Tiszaújlak/1943, Dombrád/1944, Hajdúböszörmény/1946, Üllő/1946, Mezőcsát/1947, Pálháza/1947, Szécsény/1947, Göd/1948, Aszód/1949, Szabadszállás/1949, Törökszentmiklós/1949, Bódva-völgy/1950, Csepel/1950, Jászládány/1950, Kiskőrös/1950, Monor/1950, Nagykőrös/1950, Ócsa/1950, Jászság/1951, Keszthely/1951, Jászság/1952, Martonvásár/1952, Perkupa/1952, Putnok/1952, Sajóvölgy/1953, Mád/1954, Szerencs/1954, Kömlőd/1955, Nyagyatád/1955, Várpalota/1955, Kistelek/1958, Bugyi/1959, Tét/1959–60, Páty/1960, Albertirsa/1963, Tata/1965, Felcsút/1966, Cegléd/?, Görgeteg/?, Nikla/?, Szigetvár/?, Zalavár/?

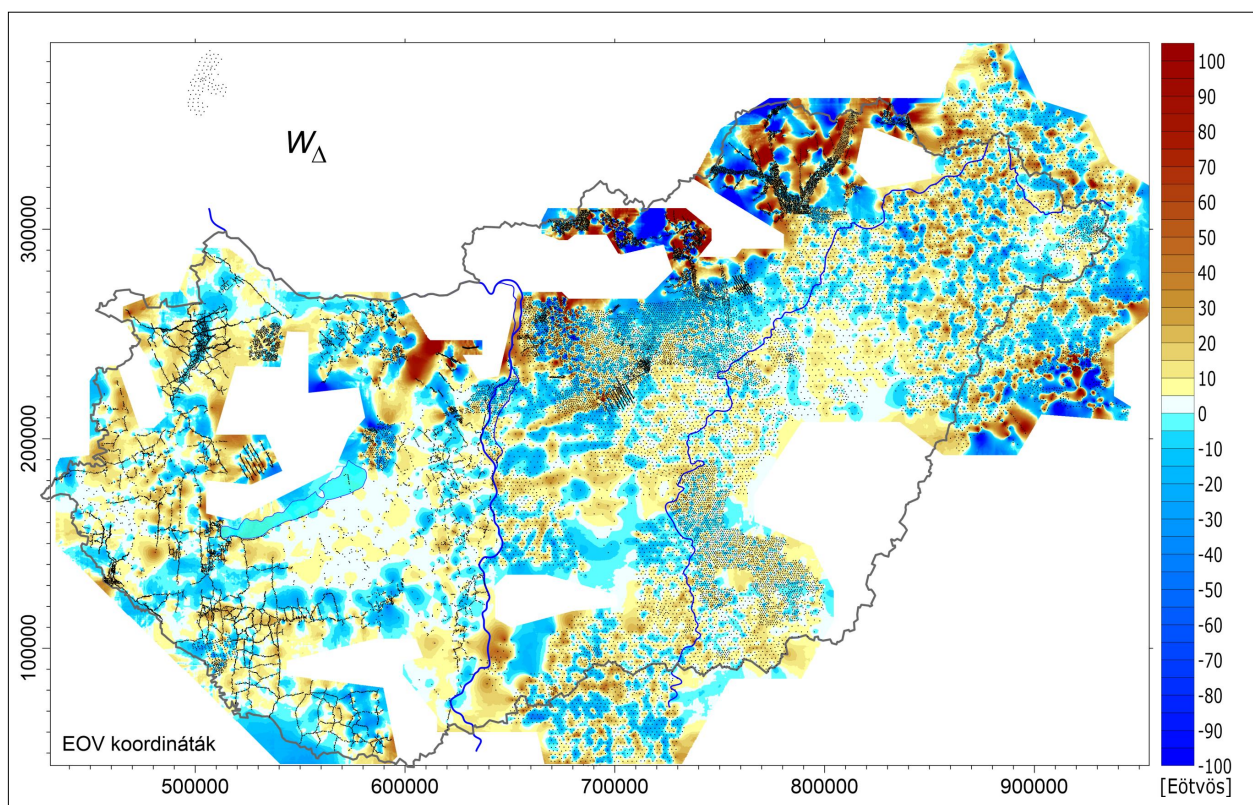
Az adatbázisban szereplő adatok a következő módon kerültek tárolásra (soronként az adatfájlban):

1–5	karakter:	mérési állomás száma
6–7	karakter:	mérési év (évszázad nélkül)
8–13	karakter:	az állomás φ földrajzi szélessége
8–9	karakter:	fok
10–11	karakter:	perc
12–13	karakter:	másodperc
14–19	karakter:	az állomás λ földrajzi hosszúsága
14–15	karakter:	fok
16–17	karakter:	perc
18–19	karakter:	másodperc

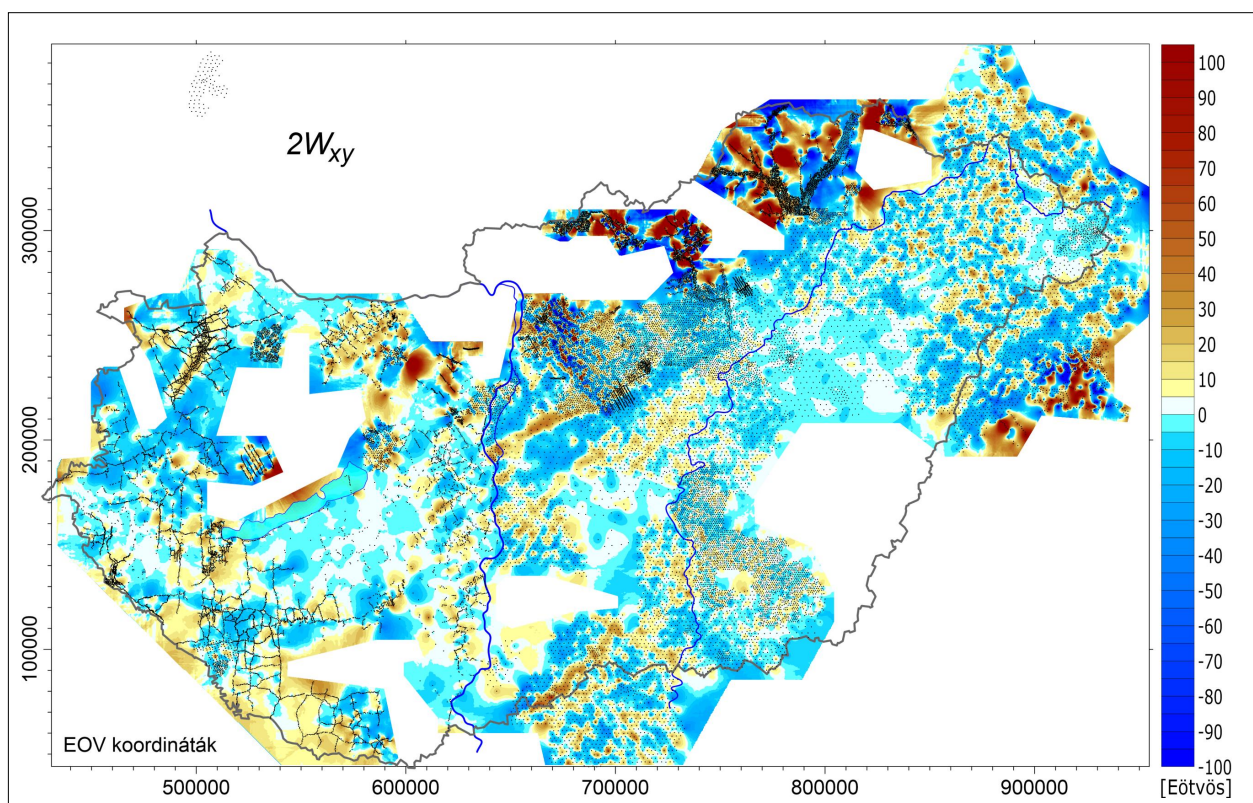
A koordinátákat Gauss-Krüger-térképlapokról vették le (tehát Kraszovszkij-ellipszoidra vonatkoznak), és a pontosságuk a legjobb esetben sem éri el a 10 métert. (Utólag olyan adatbázist is készítettünk, amelyben a Gauss-Krüger-koordináták helyett az ezekből transzformált EOVS-koordináták szerepelnek.)

20–26	karakter:	W_{xx} , a gradiens É-i komponense
27–33	karakter:	W_{yy} , a gradiens K-i komponense
34–40	karakter:	W_{Δ} görbületi komponens
41–47	karakter:	$2W_{xy}$ görbületi komponens (és nem a W_{xy} görbületi érték!)
48–53	karakter:	W_{xx} -hoz tartozó topografikus hatás
54–59	karakter:	W_{yy} -hoz tartozó topografikus hatás
60–65	karakter:	W_{Δ} -hoz tartozó topografikus hatás
66–71	karakter:	$2W_{xy}$ -hoz tartozó topografikus hatás

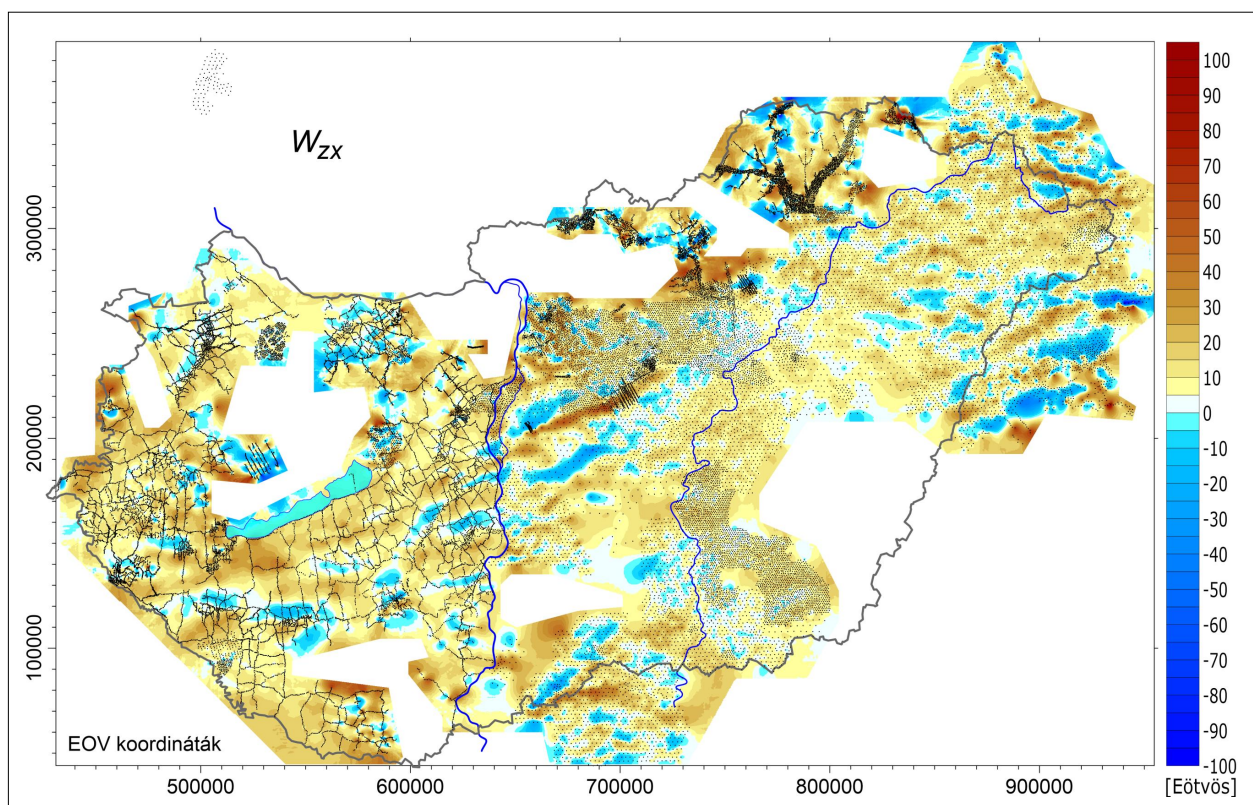
A W_{Δ} görbületi értékek a valódi mért értékek, tehát nincs belőlük levonva az $U_{\Delta} = 10,26 \cos^2 \varphi$ normálérték. A 48–71 mezőben szereplő értékek a mérési pontok környezetében 8 irányban elvégzett szintezésekből kiszámított topografikus korrekciók (tagoltabb topográfiajú területeken a térképi hatást is tartalmazzák). Amennyiben topografikus javítással ellátott ingamérésekre van szükség-



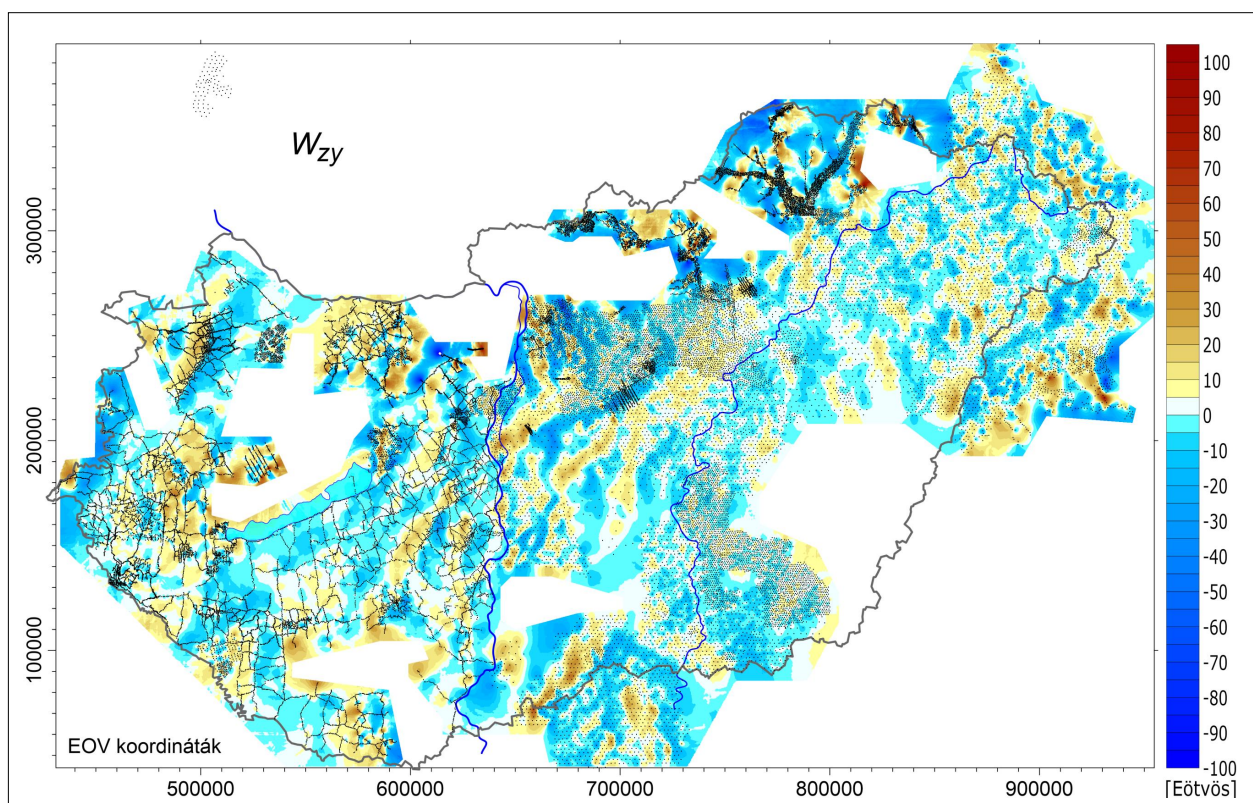
3. ábra Eötvös-inga-mérésekből származó W_{Δ} görbületi gradiensek területi eloszlása
Figure 3 Spatial distribution of curvature gradients W_{Δ} measured by Eötvös torsion balance



4. ábra Eötvös-inga-mérésekből származó $2W_{xy}$ görbületi gradiensek területi eloszlása
Figure 4 Spatial distribution of curvature gradients $2W_{xy}$ measured by Eötvös torsion balance



5. ábra Eötvös-inga-mérésekből származó W_{zx} horizontális gradiensek területi eloszlása
Figure 5 Spatial distribution of horizontal gradients W_{zx} measured by Eötvös torsion balance



6. ábra Eötvös-inga-mérésekből származó W_{zy} horizontális gradiens területi eloszlása
Figure 6 Spatial distribution of horizontal gradients W_{zy} measured by Eötvös torsion balance

günk, a 48–71 mezőben szereplő korrekciókat le kell vonni a 20–47 mezőben szereplő mért értékekből.

Az adathitelesítés során az adatokból minden egyes állomásra vonatkozóan számították a gradiens és görbületi értéket, majd a kívánt méretaránynak megfelelően minden egyes állomás helyén grafikusán ábrázolták ezeket az állomászám feltüntetésével. Az így előállított térképet mind kvalitatív, mind kvantitatív módon összevetették az eredeti térképekkel, szükség esetén a jegyzőkönyvekkel, amelyek segítségével kiszűrhetővé váltak a hibásan rögzített adatok. Ezután az esetleges hibákat az eredeti jegyzőkönyveknek megfelelően javították. Így a digitális adatbázisban többszörösen, grafikusán és számszerűen is ellenőrzött adatok szerepelnek.

5. Magyarországi gradienstérképek

A magyarországi Eötvös-inga-mérések digitális adatbázisa lehetővé tette, hogy az országunk teljes területére egyben ábrázoljuk a gradiensek területi eloszlását. A 3–6. ábrákon sorra a, W_A , $2W_{xy}$, W_{zx} és W_{zy} , gradiensek területi eloszlása látható. Ezekről a különböző területeken a gradiensek értéke az ábrák jobb oldalán látható színskála alapján becsülhető meg. Az ingamérések helyszínét apró pontok jelölik. Feltűnő, hogy elsősorban a Balatontól délre a görbületi adatok ábráin sokkal kevesebb mérési pont található, mint a horizontális gradiensek esetében. Ennek az az oka, hogy a szénhidrogének kutatása során a görbületi gradiensekre nem volt szükség, ezért ezeket sok esetben meg sem határozták.

A térképek sok érdekes részletet tartalmaznak, értelmezésük a geofizikusok és geológusok számára lehet izgalmas kihívás.

Sajnos a térképeken sok nagy fehér folt látható, ahol nem állnak rendelkezésre Eötvös-inga mérések. Ezek részben a hegyvidéki területek, ahol a rendkívüli terephatás miatt nem volt célszerű ingaméréseket végezni, másrészt a már említett Bács-Kiskun, Békés és Hajdú-Bihar vármegyék jelentős területe, ahol megsemmisültek a korábbi mérések jegyzőkönyvei, adatai.

6. Gradiensek műholdas meghatározása

A fehér foltok kitöltésére felhasználhatjuk a modern műholdas technikai adottságokat, amire nemrég két próbálkozás történt (Diera 2016, Tóth S. 2020).

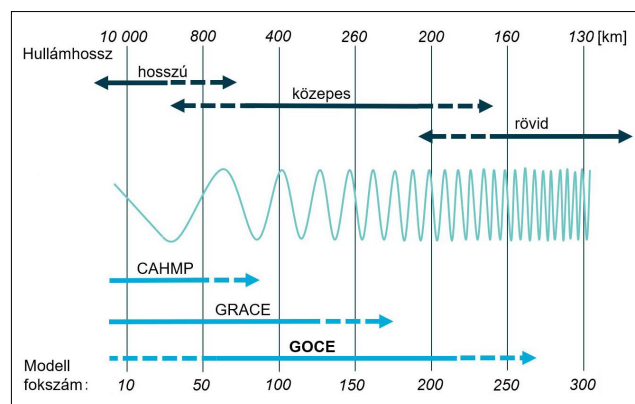
A műholdas technika történetében eddig három különböző űrgravimetriai projekt valósult meg, de már a negyedik gravitációs műholdrendszer is elkezdte a működését. Az űrgravimetria első mesterséges holdját, a CHAMP űreszközt 2000. július 15-én bocsátották Föld körüli pályára a tömegvonzási és a geomágneses tér tanulmányozása céljából (Földváry 2004). A műhold 454 km magasságú közel körpályán kezdte a keringését. Ez a magasság 2010 szeptemberéig fokozatosan csökkent, amikor a műhold

több mint 10 éves működése után a felső légkör sűrűbb rétegeibe süllyedve elégett.

A második űrgravimetriai misszió a GRACE 2002. március 17-én indult, és több mint 15 éven keresztül szolgáltatott fontos adatokat a gravitációs tér hely- és időbeli változásairól. Ezt az első nagy felbontású, kizárólagosan gravitációs célú rendszert két egymástól 250 km távolságban párhuzamosan keringő műholdpár alkotta. A két műhold közötti relatív távolság 1 μ m pontossággal volt mérhető folyamatosan. Mindkét műholdon egy-egy háromdimenziós precíziós gyorsulásmérőt helyeztek el, így a rendszer akár egy óriási, 250 km-es karhosszúságú, egykomponensű gradiométernek is tekinthető. A GRACE legnagyobb technikai kihívása a relatív távolság folyamatos és pontos mérése, valamint a két műhold repülési konfigurációjának aktív karbantartása. A GRACE a Föld nehézségi erőterének hosszú és közepes hullámhosszú szerkezetét mérte igen nagy pontossággal.

Az űrgravimetriai történetének harmadik műholdja, az Európai Űrügynökség (ESA) által fejlesztett és üzemeltetett GOCE az első olyan műhold, mely a fedélzetén található gradiométer segítségével közvetlenül a gravitációs gradiensek mérését végezte 2009 és 2013 között. Átlagosan 250 km-es magasságban lévő földkörüli pályán keringve mérte a gradienseket, működése akár az Eötvös-inga modern, űrbeli megfelelőjének is tekinthető (Rummel 2002). A gradiométer hat, megfelelően elhelyezett gyorsulásmérőből állt. A gyorsulásmérők három, egymásra merőleges tengely végein helyezkedtek el, mérőpárokat alkotva. A karok hossza 50 cm. Az egyes karok két végén mért gyorsulások különbségét képezve meghatározhatók a teljes Eötvös-tenzor elemei. A GOCE műholdon elhelyezett gradiométer mérési pontossága 10^{-11} E (Eötvös egység), tehát két nagyságrenddel nagyobb, mint az Eötvös-inga egyébként is szenzációs pontossága.

Jelenleg a negyedik űrgravimetriai projekt keretében a 2018. május 22-én felbocsátott GRACE-FO műholdpár teljesít szolgálatot, amely a korábbi rendkívül sikeres GRACE méréseit folytatja.



7. ábra A gravitációs műholdak által gyűjtött adatok hullámhossz szerinti jeltartományja (Naeimi 2013)

Figure 7 Wavelength signal range of data collected by gravitational satellites (Naeimi 2013)

A CHAMP műhold a Föld gravitációs erőterének csak a hosszú hullámhosszú összetevőinek mérésére volt alkalmas. A GRACE műholdpár az erőternek hosszú és közepes hullámhosszú összetevőit, a GOCE viszont már a rövidebb hullámhosszú, magasabb fokszámú összetevőket is képes volt mérni igen nagy pontossággal. A méréseket végző különböző műholdak által gyűjtött adatok hullámhossz szerinti jeltartamát a 7. ábra mutatja. Az ábra felső sorában a gravitációs erőteret alkotó különböző összetevők hullámhossza [km-ben], az alsó részén pedig az erőteret leíró (7) gömbfüggvénysor n fokszáma látható. A szaggatott vonalak a hullámhossz-kategóriák határai, amelyek a műholdak mérési tartományainak (felbontásának) bizonytalanságára utalnak.

A 7. ábrán látható, hogy a GOCE ellentétben a CHAMP és a GRACE műholdakkal az erőter finomabb szerkezetét leíró közepes hullámhosszokon, a gömbfüggvény-együtthatók ($30 < n < 250$) fokszámú tartományában szolgáltat információkat (Yi et al. 2013). Sajnos viszont még ez is csak alig több, mint 150 km pontsűrűségű felbontást jelent, és ezt sem a Föld felszínén, hanem nagyjából 250 km magasságban. Magasabb műholdpályán romlik a felbontóképesség, és hosszabb a műhold élete, alacsonyabb műholdpályákon viszont a felsőbb légkör fékező hatása miatt a műhold rövidebb élettartamával kell fizetnünk a jobb felbontóképességért.

A GOCE viszonylag alacsony pályájának köszönhetően, elsősorban a légkör felsőbb rétegei és egyéb disszipatív erők fékező hatást fejtenek ki a műhold mozgására, így közvetve a mért mennyiségeket is torzítják. Ezeknek az erőknek a hatása folyamatosan meghatározható és valós időben kompenzálható (Földvály et al. 2014).

Végül is a GOCE gradiométerének feladata az erőter finomszerkezetének meghatározása volt gravitációs gradiensek mérésével. A hosszú hullámhosszú tagok akár a GOCE precíz pályadataiból is számíthatók, amely adatok ún. „satellite-to-satellite tracking” mérési elrendezéssel GPS műholdak segítségével határozhatók meg (Tóth S. 2020), de a GOCE mérési sáv szélességén kívül eső hosszú hullámhosszú tagok a GRACE méréseivel is pótolhatók.

A műholdak méréseinek teljes vagy részbeni felhasználásával már sok geopotenciál-modell készült, például az általunk is használt Tongji-GMMG2021S, EIGEN-6C4 és SGG-UGM-2 modellek. Ezek a geopotenciál-modellek a (7) gömbfüggvénysorban szereplő, különböző C_{nm} , S_{nm} együtthatókat tartalmazzák valamilyen n_{max} fokszámig, amelyek a földfelszíni és egyéb más méréseket kiegészítő, legalábbis részben GOCE-adatok alapján készültek.

Fontos tudnunk, hogy az Eötvös-ingával a földfelszínen mért gradiensek nem vethetők közvetlenül össze a műholdak pályamagasságában meghatározott értékekkel. A Föld felszínén működő Eötvös-ingák mérési eredményeit a műszerek közvetlen közelében lévő egészen kicsiny oldalirányú sűrűséginhomogenitások is jelentősen befolyásolják, amelyek mérhető hatása a magasság emelkedésével gyorsan elenyészik. A műholdak pályamagasságában az erőternek a földfelszínen mérhető finomszerkezete már

nem látható. A különböző magasságokban meghatározott erőtereket csak akkor tudjuk összehasonlítani és egyben kezelni, ha áttranszformáljuk ezeket a másik magasságára. A transzformáció az analitikai folytatások módszerével oldható meg (Völgyesi, 2002). Ennek két fajtája az analitikai felfelé és a lefelé folytatás.

A felfelé folytatás művelete akkor szükséges, amikor pl. a GOCE műszereit szeretnénk kalibrálni a Föld felszínén meghatározott nehézségi vagy Eötvös-inga-mérési adatokkal, az analitikai lefelé folytatás pedig a műholdas mérések adatainak felhasználását teszi lehetővé a Föld felszínén, hogy ezeket együtt tudjuk kezelni a földfelszíni mérésekkel. Sajnos azonban az analitikai lefelé folytatással nem lehet a „semmitől” „valamit” előállítani, vagyis a műholdas mérésekből nem lehet előállítani a földfelszínre azokat a magas frekvenciás gradiens-összetevőket, amelyek a műholdak pályamagasságában már nem látszanak, ráadásul így a mérési zajok is felerősödnek.

Célszerűbb megoldás, ha olyan magas fokszámú geopotenciál-modelleket használunk a földfelszíni gradiensek számítására, amely modellek együtthatóinak meghatározásához az egyéb információk mellett felhasználták a gravimetriai műholdak mérési adatait is. Az így meghatározott gradiensek közvetlenül pl. a WGS84 ellipszoidra vonatkoznak.

7. Gradiensek számítása a potenciálfüggvény gömbfüggvénysorából

A nehézségi erőter potenciálfüggvényének gömbfüggvénysoros alakja:

$$W(r, \varphi, \lambda) = V(r, \varphi, \lambda) + V_c(r, \varphi) = \frac{GM}{r} \sum_{n=n_{min}}^{n_{max}} \left(\frac{R}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{n,m}(\sin \varphi) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi \quad (7)$$

ahol V a tömegvonzási (gravitációs) erőter, V_c a forgási centrifugális erőter potenciálfüggvénye, GM a geocentrikus gravitációs állandó, R a referenciagömb sugara, ω a Föld forgási szögsebessége, $\bar{C}_{n,m}$, $\bar{S}_{n,m}$ az n -ed fokú és m -ed rendű normalizált gömbfüggvény-együtthatók, $\bar{P}_{n,m}(\sin \varphi)$ a normalizált asszociált Legendre-függvények (Biró et al. 2013).

Az Eötvös-tenzor elemeit a helyi térbeli derékszögű (az 1. ábrának megfelelően z : sugárirány felfelé, x : Észak, y : Nyugat) rendszerben Bucha B. és Janák J. (2013), valamint Reed G. B. (1973) és Koop R. (1993) szerint számítottuk:

$$W_{xx}(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{r^3} \sum_{n=n_{min}}^{n_{max}} \left(\frac{R}{r} \right)^n \sum_{m=-n}^n \bar{C}_{n,m} Q_m(\lambda) (a_{n,m} \bar{P}_{n,|m|-2}(\sin \varphi) + [b_{n,m} - (n+1)(n+2)] \bar{P}_{n,|m|}(\sin \varphi) + c_{n,m} \bar{P}_{n,|m|+2}(\sin \varphi)) + \omega^2 \sin^2 \varphi \quad (8)$$

$$W_{yy}(r, \varphi, \lambda) = -\frac{GM}{r^3} \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n \bar{C}_{n,m} Q_m(\lambda) \left(a_{n,m} \bar{P}_{n,|m|-2}(\sin \varphi) + b_{n,m} \bar{P}_{n,|m|}(\sin \varphi) + c_{n,m} \bar{P}_{n,|m|+2}(\sin \varphi) \right) + \omega^2 \quad (9)$$

$$W_{xy}(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{r^3} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n \bar{C}_{n,m} Q_m(\lambda) \left(d_{n,m} \bar{P}_{n-1,|m|-2}(\sin \varphi) + g_{n,m} \bar{P}_{n-1,|m|}(\sin \varphi) + h_{n,m} \bar{P}_{n-1,|m|+2}(\sin \varphi) \right), \quad m \neq 0 \quad (10)$$

$$W_{xz}(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{r^3} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n \bar{C}_{n,m} Q_m(\lambda) \left(\beta_{n,m} \bar{P}_{n,|m|-1}(\sin \varphi) + \gamma_{n,m} \bar{P}_{n,|m|+1}(\sin \varphi) \right) - \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \quad (11)$$

$$W_{yz}(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{r^3} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n \bar{C}_{n,m} Q_m(\lambda) \left(\mu_{n,m} \bar{P}_{n-1,|m|-1}(\sin \varphi) + \nu_{n,m} \bar{P}_{n-1,|m|+1}(\sin \varphi) \right), \quad m \neq 0 \quad (12)$$

$$W_{zz}(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{r^3} \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^n (n+1)(n+2) \times \sum_{m=-n}^n \bar{C}_{n,m} Q_m(\lambda) \bar{P}_{n,|m|}(\sin \varphi) + \omega^2 \cos^2 \varphi \quad (13)$$

amely összefüggésekben:

$$Q_m(\lambda) = \begin{cases} \cos m\lambda, & m \geq 0 \\ \sin |m|\lambda, & m < 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$a_{n,m} = 0, \quad |m| = 0, 1 \quad (15)$$

$$a_{n,m} = \frac{\sqrt{1+\delta_{|m|,2}}}{4} \sqrt{n^2 - (|m|-1)^2} \sqrt{n+|m|} \sqrt{n-|m|+2}, \quad 2 \leq |m| \leq n \quad (16)$$

$$b_{n,m} = \frac{(n+|m|+1)(n+|m|+2)}{2(|m|+1)}, \quad |m| = 0, 1 \quad (17)$$

$$b_{n,m} = \frac{n^2 + m^2 + 3n + 2}{2}, \quad 2 \leq |m| \leq n \quad (18)$$

$$c_{n,m} = \frac{\sqrt{1+\delta_{|m|,0}}}{4} \sqrt{n^2 - (|m|+1)^2} \sqrt{n-|m|} \times \sqrt{n+|m|+2}, \quad |m| = 0, 1 \quad (19)$$

$$c_{n,m} = \frac{1}{4} \sqrt{n^2 - (|m|+1)^2} \sqrt{n-|m|} \sqrt{n+|m|+2}, \quad 2 \leq |m| \leq n \quad (20)$$

$$d_{n,m} = 0, \quad |m| = 1 \quad (21)$$

$$d_{n,m} = -\frac{m}{4|m|} \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \sqrt{1+\delta_{|m|,2}} \sqrt{n^2 - (|m|-1)^2} \times \sqrt{n+|m|} \sqrt{n+|m|-2}, \quad 2 \leq |m| \leq n \quad (22)$$

$$g_{n,m} = \frac{m}{4|m|} \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \sqrt{n+1} \sqrt{n-1} (n+2), \quad |m| = 1 \quad (23)$$

$$g_{n,m} = \frac{m}{2} \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \sqrt{n+|m|} \sqrt{n-|m|}, \quad 2 \leq |m| \leq n \quad (24)$$

$$h_{n,m} = \frac{m}{4|m|} \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \sqrt{n-3} \sqrt{n-2} \sqrt{n-1} \sqrt{n+2}, \quad |m| = 1 \quad (25)$$

$$h_{n,m} = \frac{m}{4|m|} \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \sqrt{n^2 - (|m|+1)^2} \sqrt{n-|m|} \times \sqrt{n-|m|-2}, \quad 2 \leq |m| \leq n \quad (26)$$

$$\beta_{n,m} = 0, \quad m = 0 \quad (27)$$

$$\beta_{n,m} = \frac{n+2}{2} \sqrt{1+\delta_{|m|,1}} \sqrt{n+|m|} \sqrt{n-|m|+1}, \quad 1 \leq |m| \leq n \quad (28)$$

$$\gamma_{n,m} = -(n+2) \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}, \quad m = 0 \quad (29)$$

$$\gamma_{n,m} = -\frac{n+2}{2} \sqrt{n-|m|} \sqrt{n+|m|+1}, \quad 1 \leq |m| \leq n \quad (30)$$

$$\mu_{n,m} = -\frac{m}{|m|} \left(\frac{n+2}{2} \right) \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \sqrt{1+\delta_{|m|,1}} \sqrt{n+|m|} \times \sqrt{n+|m|-1} \quad (31)$$

$$\nu_{n,m} = -\frac{m}{|m|} \left(\frac{n+2}{2} \right) \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \sqrt{n-|m|} \sqrt{n-|m|-1} \quad (32)$$

$$\delta_{p,q} = \begin{cases} 1, & p = q, \\ 0, & p \neq q. \end{cases} \quad (33)$$

8. A kitöltő ponthelyek koordinátáinak meghatározása

A gradiensek (8), (9), ..., (33) összefüggésekkel történő meghatározásához első lépésben elő kell állítani azon földfelszíni ponthelyek φ , λ , r koordinátáit, amely pontokban a gradienseket számítani szeretnénk. Célszerűségi okokból a gradienseket szabályos, lehetőleg egyenlő lépés-közü rács sarokpontjaira érdemes kiszámítani az ország teljes területére. Megfelelő ráctávolság alkalmazásával egyrészt lehetőségünk nyílik az Eötvös-inga-mérési pontokban ellenőrizni a számított gradienseket, és egyúttal alkalmas pontsűrűséggel kiszámíthatjuk a hiányzó értékeket az üres „fehér” területeken, ahol nem állnak rendelkezésünkre közvetlen terepi mérések. Az egyenlő ráctávolságot adó φ , λ vízszintes koordináták meghatározására kívá-

ló lehetőség egy olyan Reuter-rács (Eicker 2008) előállítás, amely adott gömbön egyenlő távolságban elhelyezkedő rácpontokat szolgáltat (Tóth 2020). Így az optimális rács-távolság megállapításához először meg kell határoznunk az ismert Eötvös-inga-mérési pontok átlagos távolságát, amelyek alapján képezni tudjuk a legalkalmasabb lépésközű Reuter-rácsot.

A számítás során ún. KD-fa (Dombi 2012) segítségével minden egyes Eötvös-inga-mérési pontra meghatároztuk a legközelebbi pont távolságát, majd a kapott távolságokat átlagoltuk (Pongrácz 2022). A számításokat külön területegységenként (Észak-Alföld és Közép-Magyarország, Dél-Alföld, az országhatáron kívüli mérési pontok és a Dunántúl területére) elvégeztük. Számításaink szerint a kitöltő pontokra az ország teljes területén átlagosan 1232 m távolsággal célszerű a Reuter-rácsot létrehozni. Eredetileg a Reuter-rácsot gömbfelszínen értelmezzük, de kisebb módosítással nemcsak a teljes gömbfelszínre, hanem ennek szűkebb területére is elkészíthető, sőt kisebb területen (akár pl. Magyarország területén) a kapott φ , λ rácpont-koordináták WGS84 ellipszoidi szélességként és hosszúságként is értelmezhetők.

Mivel az Eötvös-ingával meghatározott gradiensek a fizikai földfelszínen mért értékek, a számított gradienseket is a különböző földfelszíni magasságokra kell meghatározni. Ezért a φ , λ rácpont-koordináták mellett szükségünk van ugyanezen pontokban a magassági koordinátára is, amely a (8), (9), ..., (13) összefüggések szerint a földfelszíni pontoknak a WGS84 ellipszoid középpontjától mért r távolsága. Ennek meghatározásához viszont rendelkezniünk kell a pontok tengerszint feletti magasságával és a geoid-ellipszoid távolságát is ismernünk kell.

A φ , λ rácpontokban a tengerszint feletti magasságokat interpolációval határoztuk meg az EU-DEM (Digital Elevation Model over Europe) felhasználásával, amely kb. 25 m vízszintes felbontással rendelkezik, és az SRTM (Shuttle Radar Topography Mission) valamint az ASTER (Advanced Spaceborne Thermal Emission and Reflection Radiometer) globális digitális magassági felszínmodellek kombinálásával hozták létre (WEB_1). Az EU-DEM adatbázis felhasználásával meghatározott magasságok az EVRS2000 (European Vertical Reference Frame 2000) magassági dátumra vonatkoznak. Statisztikai elemzések alapján az EU-DEM modell megbízhatósága igen jó, Magyarország esetében az átlagos eltérés a számított és a valódi magasságok között $-2,38$ m, az eltérések szórása $\pm 1,42$ m, a négyzetes középhiba $\pm 2,77$ m (DHI GRAS, 2014).

A magasságokat mind az Eötvös-inga-mérési pontokra, mind a rácpontokra egyaránt kiszámítottuk (Pongrácz, 2022).

Mivel a (8), (9), ..., (13) összefüggésekben a φ , λ vízszintes koordináták mellett a harmadik koordináta az r geocentrikus távolság, ezért a gradiensek számításához a tengerszint feletti H magasság, helyett az

$$r = R + N + H \quad (34)$$

geocentrikus távolságra van szükségünk, vagyis a tengerszint (geoid) feletti magasságon kívül szükségünk van a geoidundulációk N értékére és az adott geopotenciálmodellhez tartozó referenciagömb R sugarára is.

A φ , λ koordinátájú rácpontokhoz tartozó N geoidunduláció értékeket szintén interpolációval határozhatjuk meg, amire megfelelő geoid adatbázisok állnak rendelkezésre (WEB_2). Számításainkhoz a WGS84 ellipszoidra vonatkozó $1' \times 1'$ felbontású EGM2008 geoidmodellt használtuk. A pontjainkra így meghatározott geoidellipszoid távolságok pontossága egy nagyságrenddel jobb, mint az EU-DEM modellel meghatározott tengerszint feletti magasságoké, ami így összességében kielégíti a (8), (9), ..., (13) gömbfüggvénytörökből szereplő r geocentrikus távolsággal szemben támasztott pontossági igényt.

9. A gradiensek számítása

Az Eötvös-tenzorban lévő gradiensek számítását alkalmasan választott geopotenciál modell felhasználásával végezhethetjük a (8), (9), ..., (13) összefüggések felhasználásával. Sok különböző geopotenciál-modell áll a rendelkezésünkre, amelyek adatbázisa az internetről szabadon letölthető (WEB_3). Nyilvánvalóan most olyan geopotenciál-modell alkalmas a számunkra, amelyben szereplő $\bar{C}_{n,m}$, $\bar{S}_{n,m}$ gömbfüggvény-együtthatók meghatározása során felhasználták a gravimetriai, gradiometriai műholdak mérési adatait is. Az általunk kipróbált három ilyen modell főbb jellemzőit az 1. táblázatban foglaltuk össze. Az egyes modellek adatbázisaiban a fájlok elején rövid leírást követően megtalálható a referenciagömb R sugara és a GM geocentrikus gravitációs állandó értéke, végül a $\bar{C}_{n,m}$, $\bar{S}_{n,m}$ normalizált gömbfüggvény-együtthatók számértékei következnek ezek megbízhatósági mérőszámaival.

1. táblázat Table 1		A felhasznált geopotenciál-modellek The used geopotential models	
Geopotenciál-modell	n_{max}	$GM [m^3/s^2]$	$R [m]$
Tongji-GM-MG2021S	300	$3,986004415 \times 10^{14}$	$6,37813646 \times 10^6$
EIGEN-6C4	2190	$3,986004415 \times 10^{14}$	$6,37813646 \times 10^6$
SGG-UGM-2	2190	$3,986004415 \times 10^{14}$	$6,37813630 \times 10^6$

A **Tongji-GMMG2021S** modellben szereplő normalizált gömbfüggvény-együtthatókat kizárólag a GOCE és a GRACE műholdak mérései alapján határozták meg, $n = m = 300$ foksámg és rendig.

Az **EIGEN-6C4** statikus globális kombinált gravitációs modellben $n = 2190$ foksámg és rendig határozták meg a $\bar{C}_{n,m}$, $\bar{S}_{n,m}$ együtthatókat együttesen földi és műholdas mérési adatok felhasználásával. Felhasználták többek között a LAGEOS műhold 1985 és 2010 közötti méréseit, a GRACE 2003 és 2012 közötti tíz éves adatsorát, a GOCE

valamennyi mérési adatát, földfelszíni mérési adatokat (max. 370 fokszámig), DTU12 óceáni geoidadatokat és EGM2008 geoidmagasságokat. A különböző műholdas és földfelszíni mérési adatok összerendezését a normálegyenletek ún. sávkorlátos kombinációjával végezték $n_{\max} = 370$ fokszámig (Shako et al. 2014). Az így kapott $n = 370$ fokszámig és rendig terjedő megoldást ún. blokkdiagonális megoldással kiterjesztették $n = 2190$ fokszámig és rendig, a DTU10 globális gravitációs anomália adatháló felhasználásával.

Az SGG-UGM-2 modell 2190 fokszámig és 2159 rendig terjedő geopotenciál-modell, a GOCE és a GRACE műholdak megfigyeléseinek, szatellita-altimetriai mérések adatainak és az EGM2008 modellből származó gravitációs adatoknak a kombinálásával készült, amelyeket újonnan meghatározott tengeri gravitációs anomáliák is kiegészítettek. Az SGG-UGM-2 a legtöbb mérési adatból és információból származtatott geopotenciál-modell.

A nehézségi erő gradienseinek számítását a GrafLab szoftverrel (WEB_4) végeztük (Bucha és Janák 2013).

10. A mért és a számított gradiensek összehasonlítása

A számítással meghatározott gradiensek ellenőrzésének legegyszerűbb módja, ha – ahol lehetséges – ezeket összehasonlítjuk az Eötvös-ingával mért értékekkel. Az összehasonlításnál figyelemmel kell lenni arra, hogy a számításal meghatározott értékek a Reuter-rács pontjaira vonatkoznak, amelyek általában nem esnek egybe az Eötvös-

2. táblázat Mért és számított gradiensek közötti korrelációs együtthatók

Table 2 Correlation coefficients between measured and computed gradients

	Tongji-GMMG2021S	EIGEN-6C4	SGG-UGM-2
W_{xy}	0,0460	0,2627	0,2629
W_{Δ}	0,0292	0,2240	0,2244
W_{zx}	0,0557	0,3754	0,3746
W_{zy}	0,0912	0,4260	0,4262

3. táblázat A mért és számított gradiensek átlagos eltérése, átlaga és szórása (az EIGEN-6C4 modell adataiból)

Table 3 Correlation coefficients between measured and computed gradients

	Eltérés [E] mért–szám.	Átlag [E]		Szórás [E]	
		mért	számít.	mért	számít.
W_{xy}	6,93	0,27	−0,44	14,27	4,99
W_{Δ}	13,95	2,70	4,72	27,51	9,72
W_{zx}	8,55	9,27	8,07	13,45	8,82
W_{zy}	8,37	0,24	0,21	13,96	8,01

inga-mérési pontokkal. Ezért első közelítésben sorra a vizsgált rácsponthoz legközelebb lévő ingamérés pontjában ismert gradienseket hasonlítottuk össze az adott rácspontban számított értékekkel. Mindhárom geopotenciálmodellre meghatároztuk a mért és a számított mennyiségek között az átlagos eltérést, az eltérések szórását, valamint a mért és számított mennyiségek közötti korrelációs együtthatót. A korrelációs együtthatókat a 2. táblázatban láthatjuk, az EIGEN-6C4 modellre számított további statisztikai jellemzők pedig a 3. táblázatban találhatók.

A 2. táblázatból jól látható, hogy a számított W_{zx} , W_{zy} gradiensek jobb korrelációt mutatnak a mérési eredményekkel, mint a W_{Δ} , W_{xy} görbületi adatok. Megállapítható továbbá, hogy a Tongji-GMMG2021S geopotenciál-modellből számított gradiensekkel nagyon rossz a korreláció. Mivel a GOCE műhold adatai $n = 250$, a GRACE műhold adatai pedig csak $n = 130$ fokszámtartományig adnak megfelelő pontosságú információt, ezért a kizárólag műholdas gradiométeres mérések segítségével előállított $n = 300$ fokszámú Tongji-GMMG2021S modell felhasználásával nem célszerű az üres területeken a hiányzó Eötvös-inga-méréseket pótolni.

A másik két (EIGEN-6C4 és SGG-UGM-2) nagyobb felbontású modellel számított gradiensek a Tongji-GMMG2021S modellnél jobb korrelációt mutatnak a mérésekkel úgy, hogy a kettő között a korrelációs adatok alapján nincs számottevő különbség.

A 3. táblázatban látható, hogy a mért gradienseknek a számított gradienseknél jóval nagyobb a szórása. Ez azt mutatja, hogy a számított gradiensek térben lomhábban változnak, mivel nem tartalmazznak a térben gyorsan változó magas frekvenciás (rövid hullámhosszú) tagokat.

Az eredmények jól mutatják a korábbi ingamérések jelentőségét, ugyanis kizárólag műholdas gradiométeres mérések alapján előállított gradiensekkel – mivel ezek nem tartalmazzák az erőtér finomszerkezetét – nem pótolhatók az Eötvös-inga-mérések.

Megvizsgáltuk azt is, hogyan változik a korreláció, ha a mérési eredményekre mozgó átlagot számítunk, vagyis ha a számítandó ponthelyen nemcsak a hozzá legközelebbi egyetlen mérési pont gradiensét, hanem a tőle adott távolságon belül található összes érték átlagát vesszük figyelembe. Ehhez a már korábban is használt KD-fát (Dombi 2012) alkalmaztuk azzal a különbséggel, hogy most nemcsak a legközelebbi egyetlen mérési pontot, hanem adott távolságon belül található összes pontot választjuk ki a számításokhoz (Pongrácz 2022).

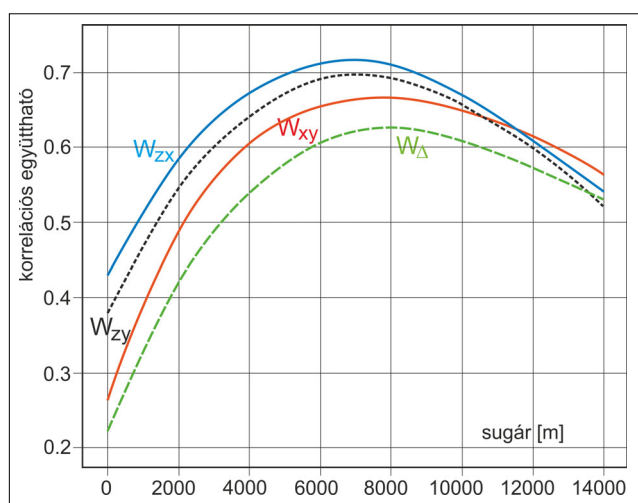
A mozgóátlag számítását 2 km-től 14 km-es sugárig végeztük valamennyi gradiensre. Az eredményeket a 4. táblázatban foglaltuk össze, az egyes gradiensek korrelációjának sugár szerinti változását pedig a 8. ábra szemlélteti. Látható, hogy a korreláció jelentősen nő, ha a legközelebbi pontban lévő egyetlen gradiens helyett több gradiensnek egy mozgóátlag segítségével simított értékeit hasonlítjuk össze a számított értékkel. A legnagyobb korreláció a 6–8 km-es sugáron belül található mért gradiensek átlagaként számított értékkel tapasztalható. Ebben a tar-

4. táblázat A mozgóátlag számítása utáni korrelációs együtthatók
Table 4 Correlation coefficients with computation of the moving average

R [m]	Korrelációs együtthatók			
	W_{zx}	W_{zy}	W_{xy}	W_{Δ}
0	0,42597	0,37545	0,26266	0,22398
2000	0,58113	0,54868	0,49155	0,41911
3000	0,62998	0,59604	0,55896	0,48541
4000	0,66910	0,63849	0,60482	0,54091
5000	0,69099	0,66900	0,63422	0,57187
6000	0,70771	0,68851	0,65427	0,60264
7000	0,71314	0,69412	0,66471	0,62128
8000	0,70698	0,69048	0,66589	0,62578
9000	0,69155	0,67683	0,65689	0,61924
10000	0,66825	0,65646	0,64771	0,60773
11000	0,63897	0,63151	0,63600	0,59236
12000	0,60654	0,59913	0,61662	0,57251
13000	0,57302	0,56121	0,59288	0,55166
14000	0,54008	0,52006	0,56651	0,53018

ományban az adott gradienstől függően a korrelációs együttható 0,6–0,7 körül van, ami már jó korrelációnak tekinthető. A 6–8 km-es távolságon túl lévő pontokat is bevonva az átlag képzésbe elkezd csökkenni a korreláció. Ez arra utal, hogy bár a számított gradiensek alapján a lokális, kis kiterjedésű anomáliák nem láthatók, de a nagyobb kiterjedésű (legalább 6–8 km) nagyságrendű hatások már megjelennek.

Az Eötvös-inga terepi pontokban mért és az EIGEN-6C4 modell felhasználásával számított W_{Δ} , W_{xy} , W_{zx} és W_{zy} gradiensek területi eloszlása a 9–12. ábrákon látható térképeken hasonlítható össze. A mérési, illetve számítási ponthelyek az



8. ábra A mozgóátlag számításával kapott korrelációs együtthatók az egyes gradiensekre az R sugár függvényében
Figure 8 Correlation coefficients obtained by computing the moving average for each gradient as a function of radius R

EOV-koordináták alapján kerültek a térképekre, az egyes pontokban a gradiensek számértékét pedig a színük alapján állapíthatjuk meg, az ábrák jobb oldalán található színskála segítségével. A színskálán szereplő számértékek E (Eötvös) egységben értendők.

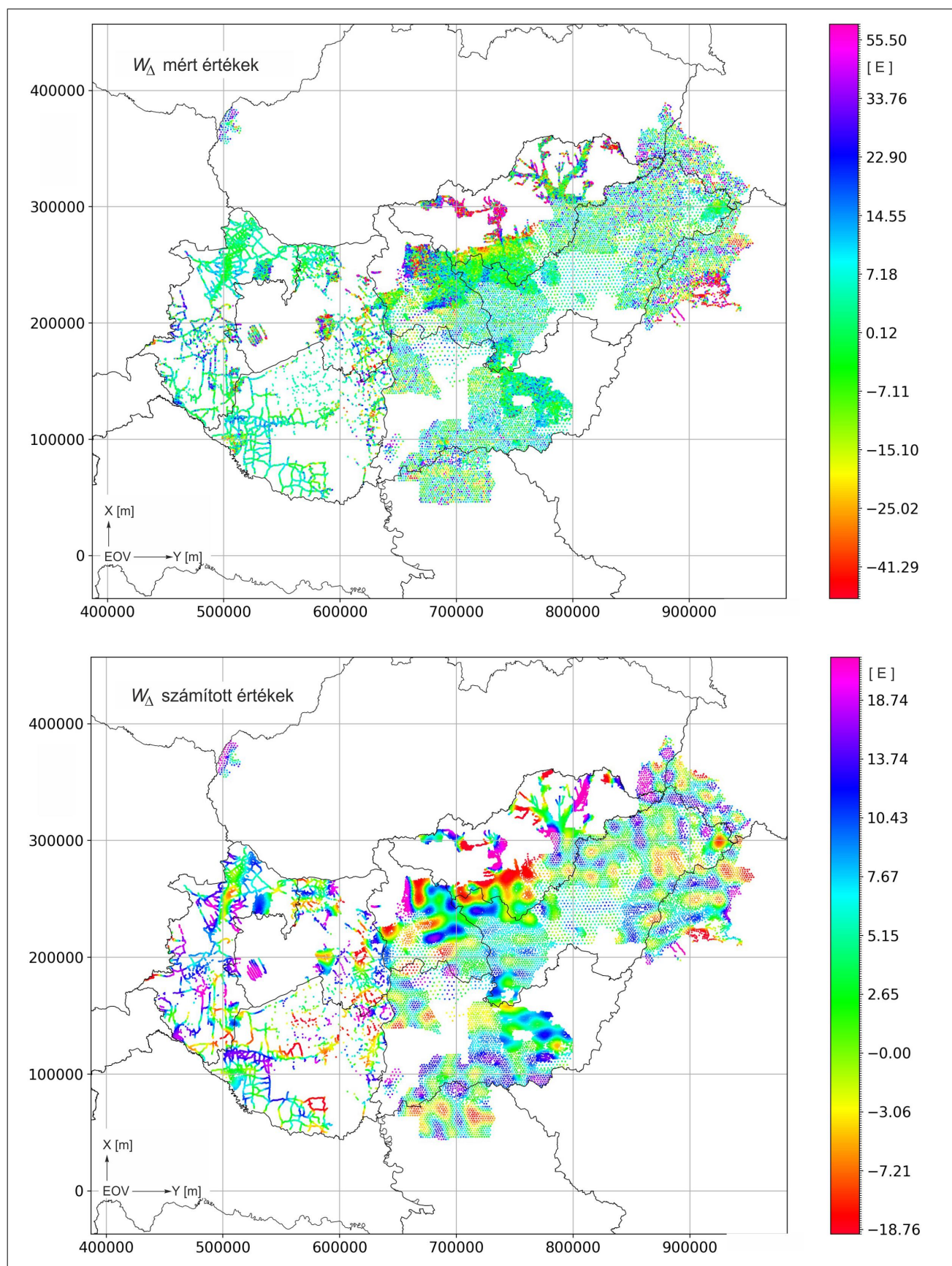
Az ábrázolás során problémát okozott, hogy a gradiensek között sok kiugró érték található, így a minimális és maximális értékek közötti lineáris színskálával nem célszerű ábrázolni az egyes gradiensek eloszlását, hiszen így nagyjából egységes színű lenne az összes pont. Emiatt a színskála tartományát csupán az átlagos értéktől számítva a szórás kétszeresén belül lévő tartományra korlátoztuk. Így sikerült elérni, hogy megfelelő legyen a színek kontrasztja ahhoz, hogy jobban látszódnak a regionális változások. Megfigyelhető, hogy ez a tartomány jóval kisebb a számított gradiensek esetén, ami egyébként érthető, mivel a számított gradiensek esetében a finomszerkezet hiánya miatt kisebb az értékek szórása.

11. Az üres foltok kitöltése

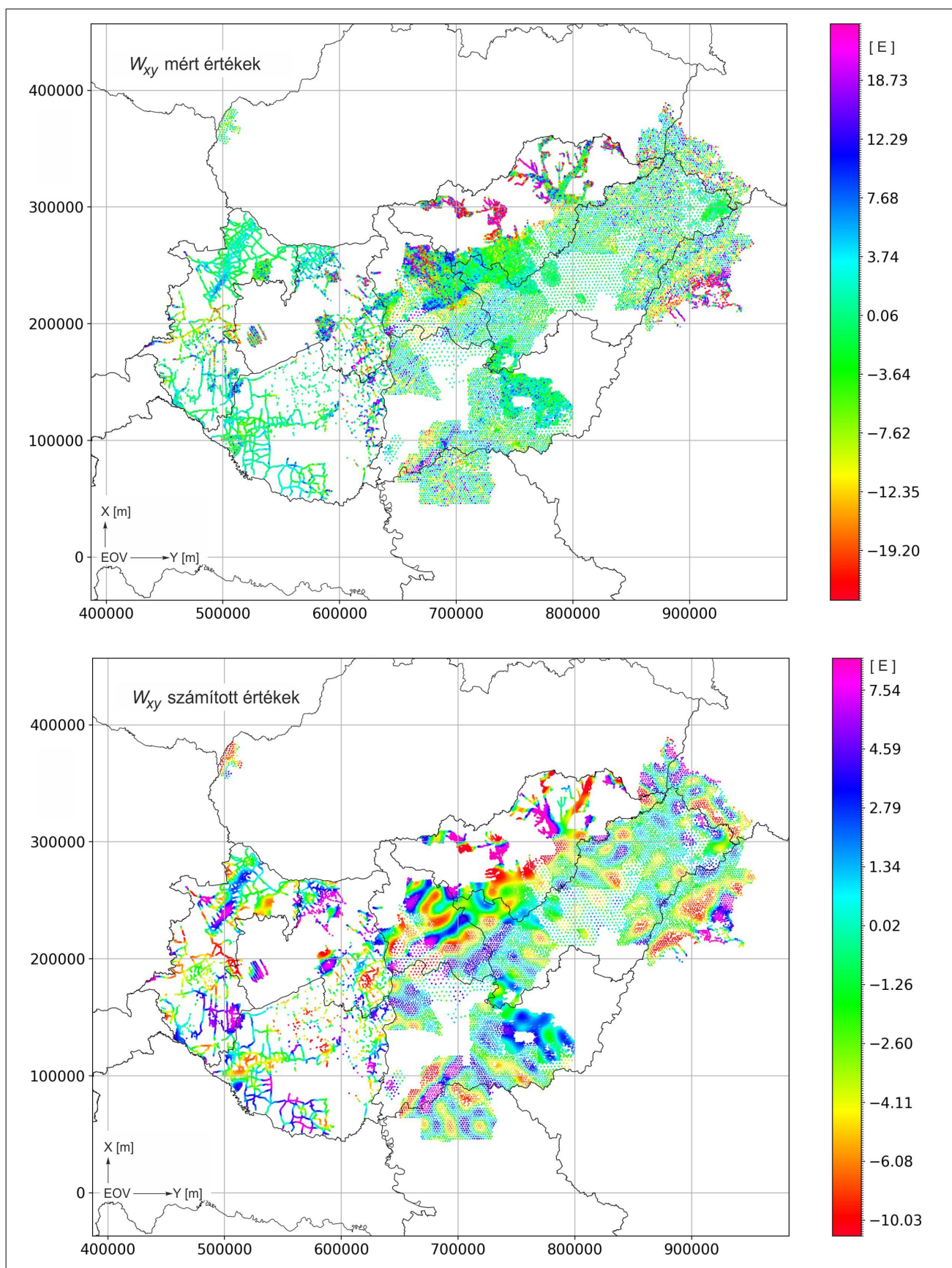
Vizsgálataink fő célja, hogy azoknak a területeknek a gradiense és görbületi adatairól is legyen információink, ahol nem állnak rendelkezésre Eötvös-inga-mérési eredmények. Az eddigiekben láthattuk, hogyan oldható meg a fehér foltok kitöltése, a gradiensek kiszámítása az EIGEN-6C4 geopotenciál-modell adatainak felhasználásával. Az Eötvös-inga-mérési pontokban ellenőrizni tudtuk a számítással meghatározott gradiensek megbízhatóságát, felhasználhatóságát, nyilvánvalóan ez érvényes az ismeretlen fehér foltok területére is. A 13–16. ábrán sorra bemutatjuk a W_{Δ} , W_{xy} , W_{zx} és W_{zy} gradiensek magyarországi területi eloszlását. A térképeken az Eötvös-ingával felmért területeken közvetlenül az ingamérések eredményeit láthatjuk, a fehér foltokat pedig a számításainkkal meghatározott gradiensekkel töltöttük ki. Az ábrázolási módszerünk ugyanaz, mint a megelőző 9–12. ábrákon, vagyis a mérési, illetve számítási ponthelyek az EOV-koordináták alapján kerültek a térképekre, az egyes pontok színe pedig a gradiensek számértékét tükrözi, az ábrák jobb oldalán található színskálának megfelelően. A kitöltött területeken látható látszólagos folyamatos színezés, a számított pontok nagyobb pontsűrűsége miatt tapasztalható. A színskálák minimum- és maximumértékeit a korábbiaknak megfelelően állapítottuk meg.

12. Összegezés

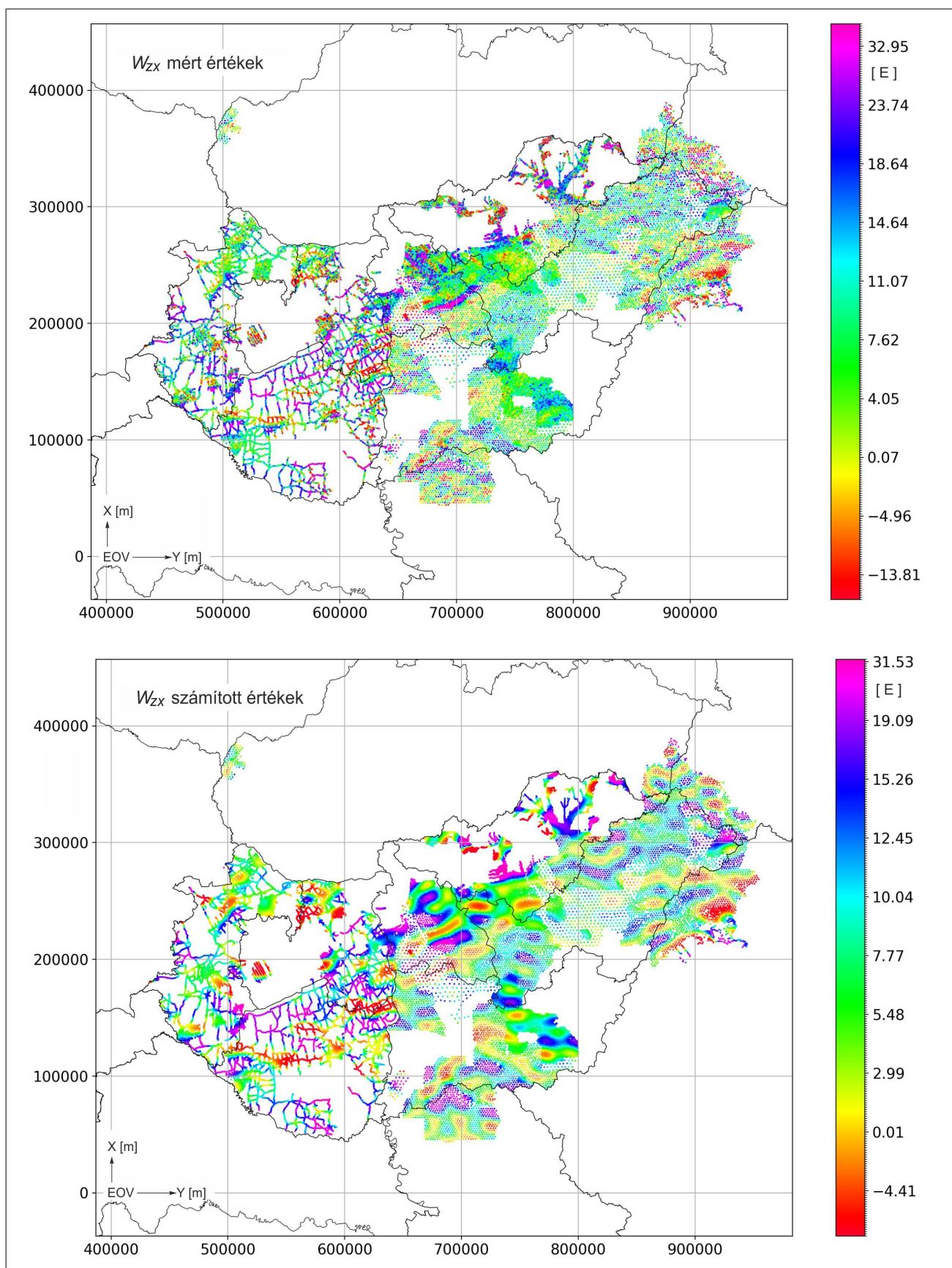
Az új modern műholdas technika által nyújtott lehetőségeket kihasználva megpróbáltuk meghatározni a hiányos területeken is a horizontális és görbületi gradienseket. Az utóbbi időkben több olyan geopotenciál modell készült, amelyekben figyelembe vették a gravitációs műholdak mérési adatait is. Három ilyen geopotenciál modell felhasználásával végeztünk kísérleti számításokat és az ezekkel meghatározott gradienseket ellenőrzésként összehasonlítottuk az Eötvös-inga-



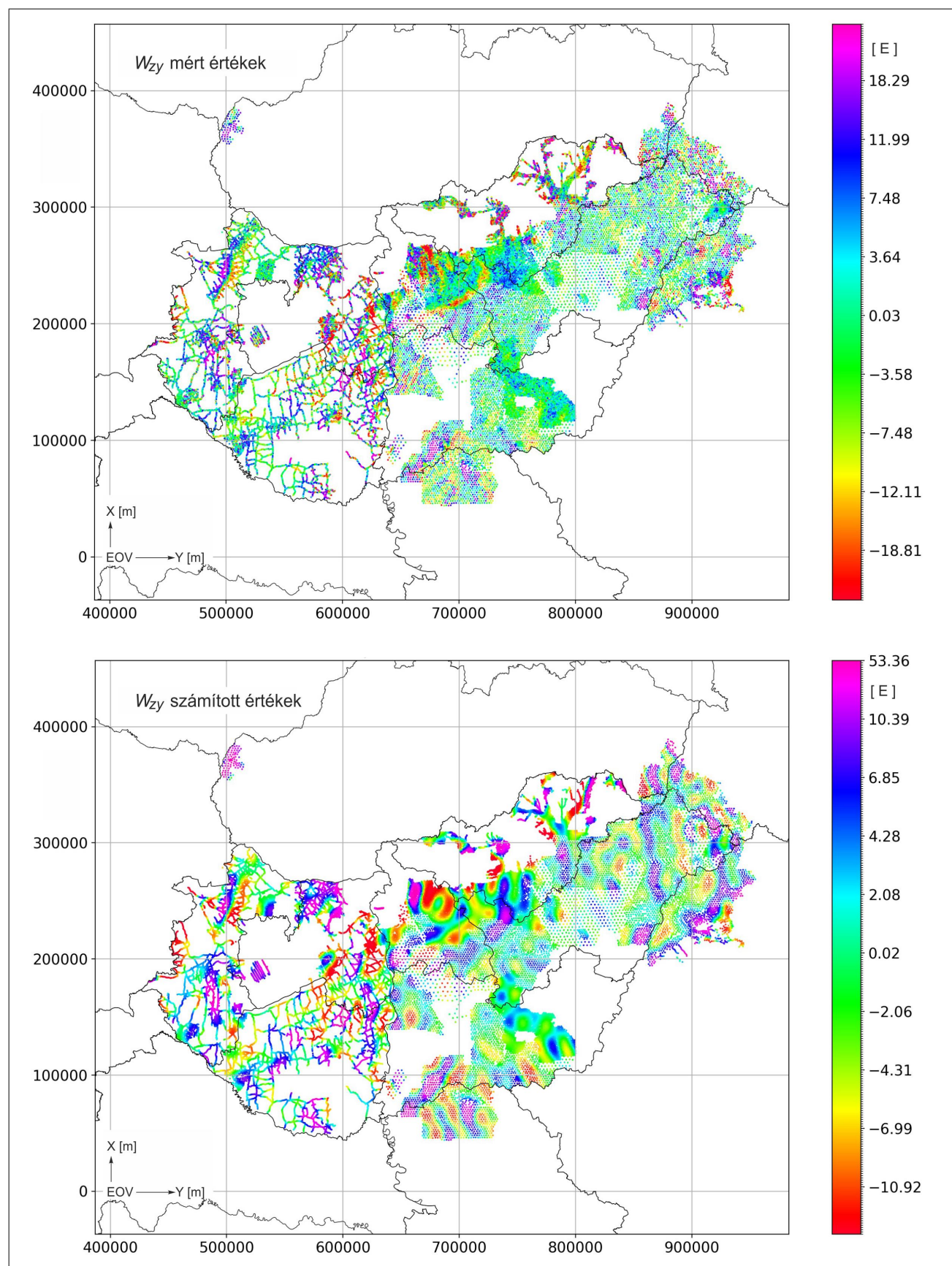
9. ábra | Eötvös-ingával mért és az EIGEN-6C4 modellel számított W_{Δ} görbületi gradiensek
 Figure 9 | Curvature gradients W_{Δ} measured by Eötvös torsion balance and calculated with the EIGEN-6C4 model



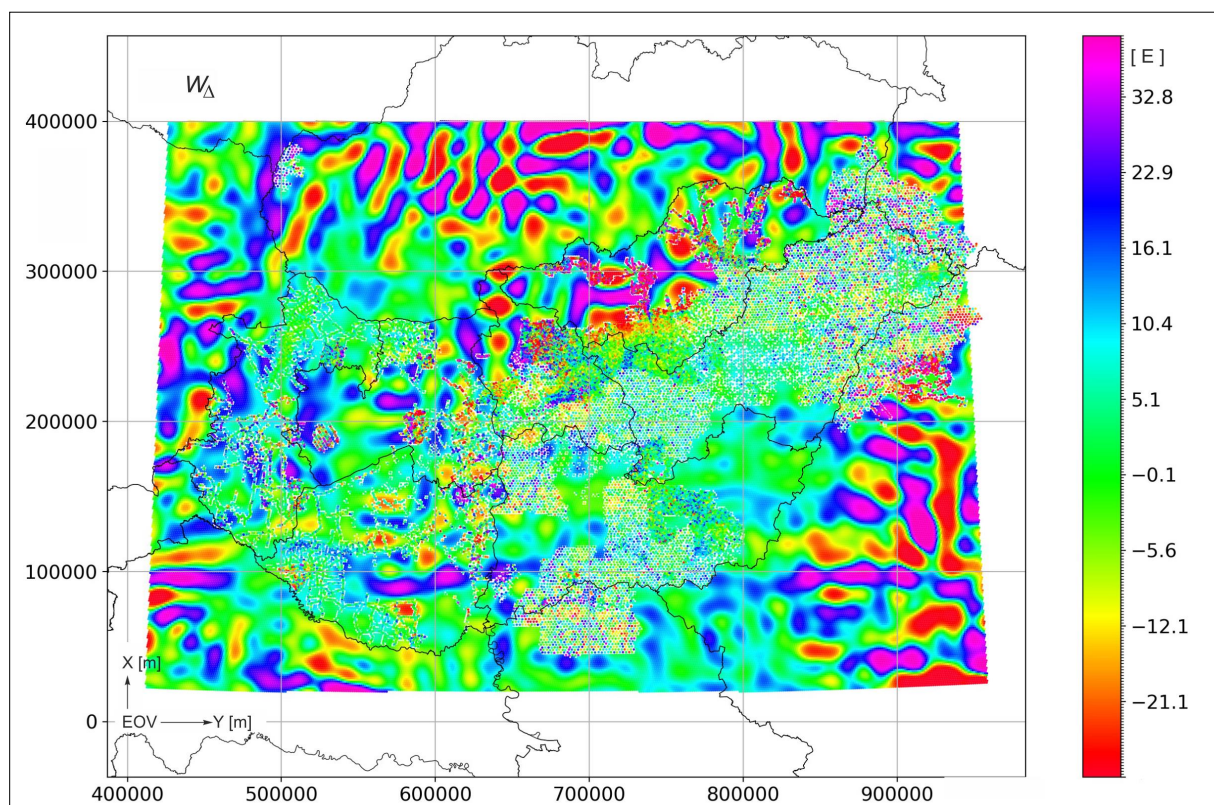
10. ábra Eötvös-ingával mért és az EIGEN-6C4 modellel számított W_{xy} görbületi gradiensek
 Figure 10 Curvature gradients W_{xy} measured by Eötvös torsion balance and calculated with the EIGEN-6C4 model



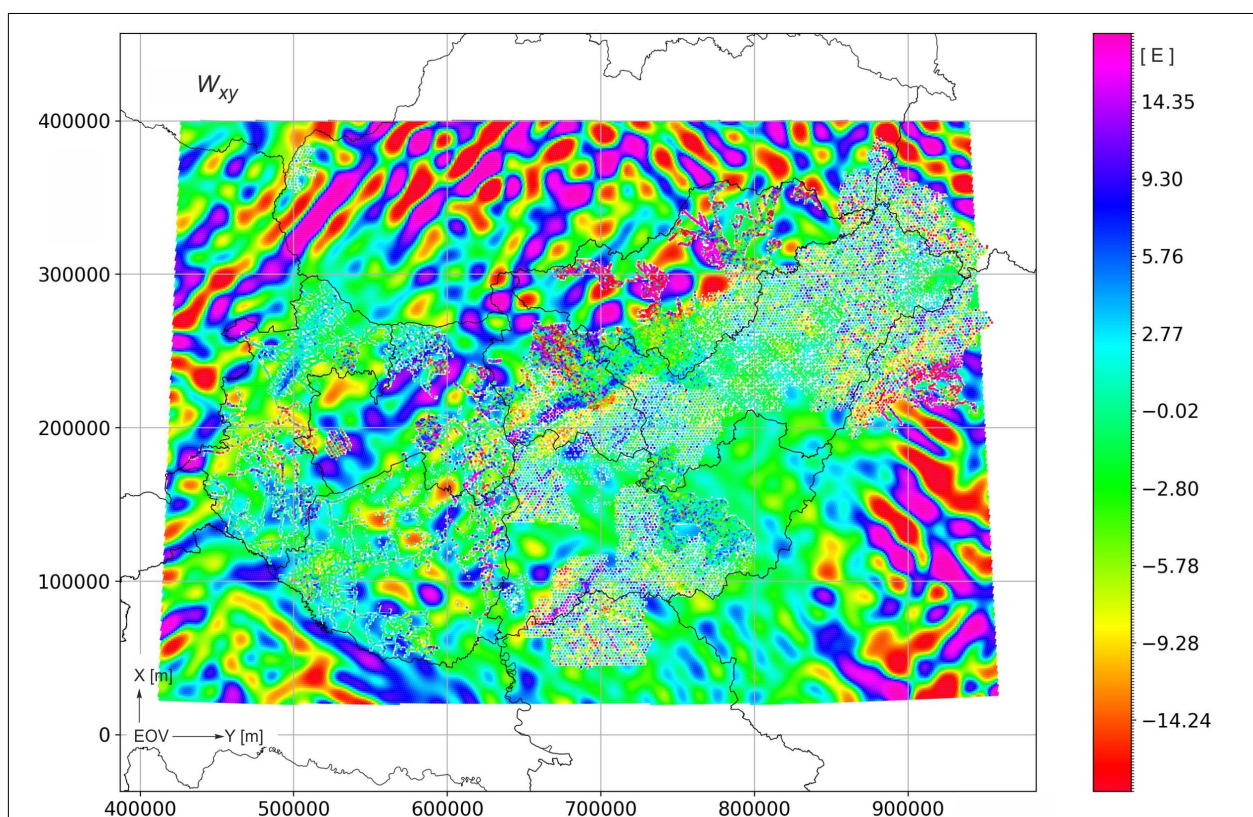
11. ábra Eötvös-ingával mért és az EIGEN-6C4 modellel számított W_{zx} horizontális gradiensek
Figure 11 Horizontal gradients W_{zx} measured by Eötvös torsion balance and calculated with the EIGEN-6C4 model



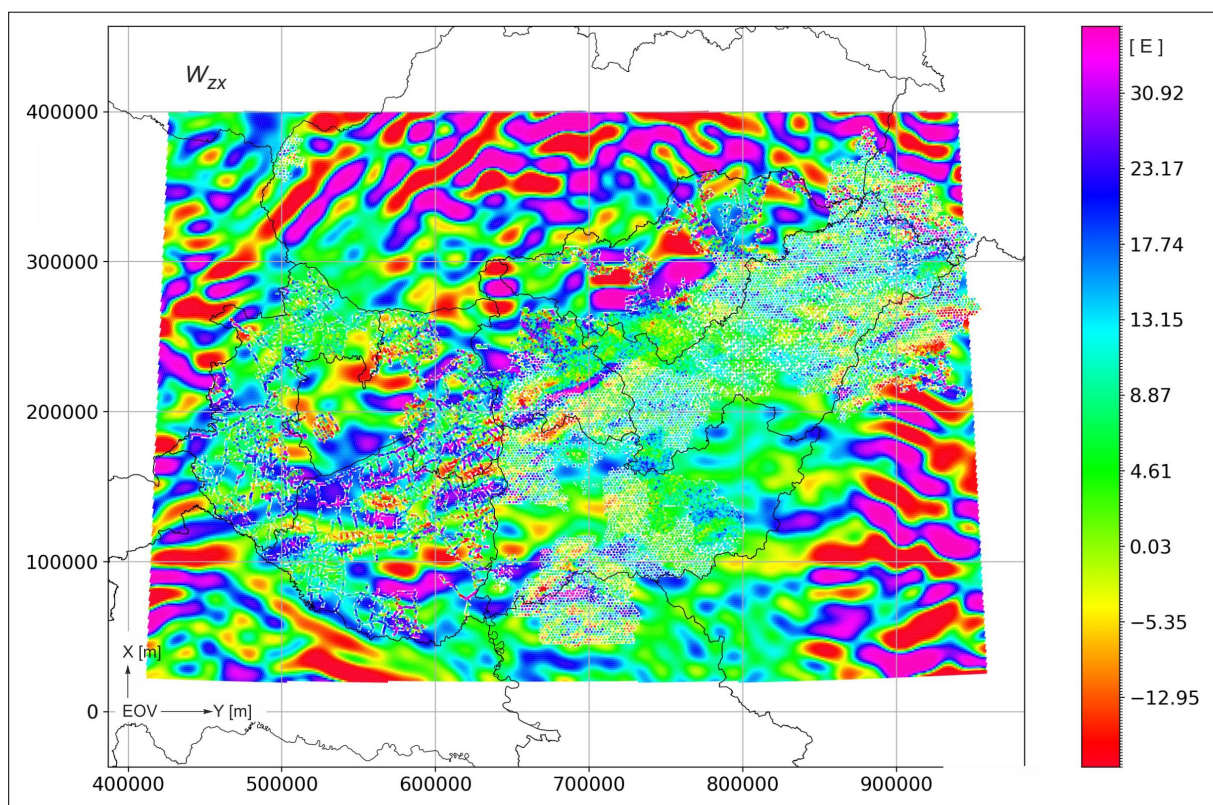
12. ábra | Eötvös-ingával mért és az EIGEN-6C4 modellel számított W_{zy} horizontális gradiensek
 Figure 12 | Horizontal gradients W_{zy} measured by Eötvös torsion balance and calculated with the EIGEN-6C4 model



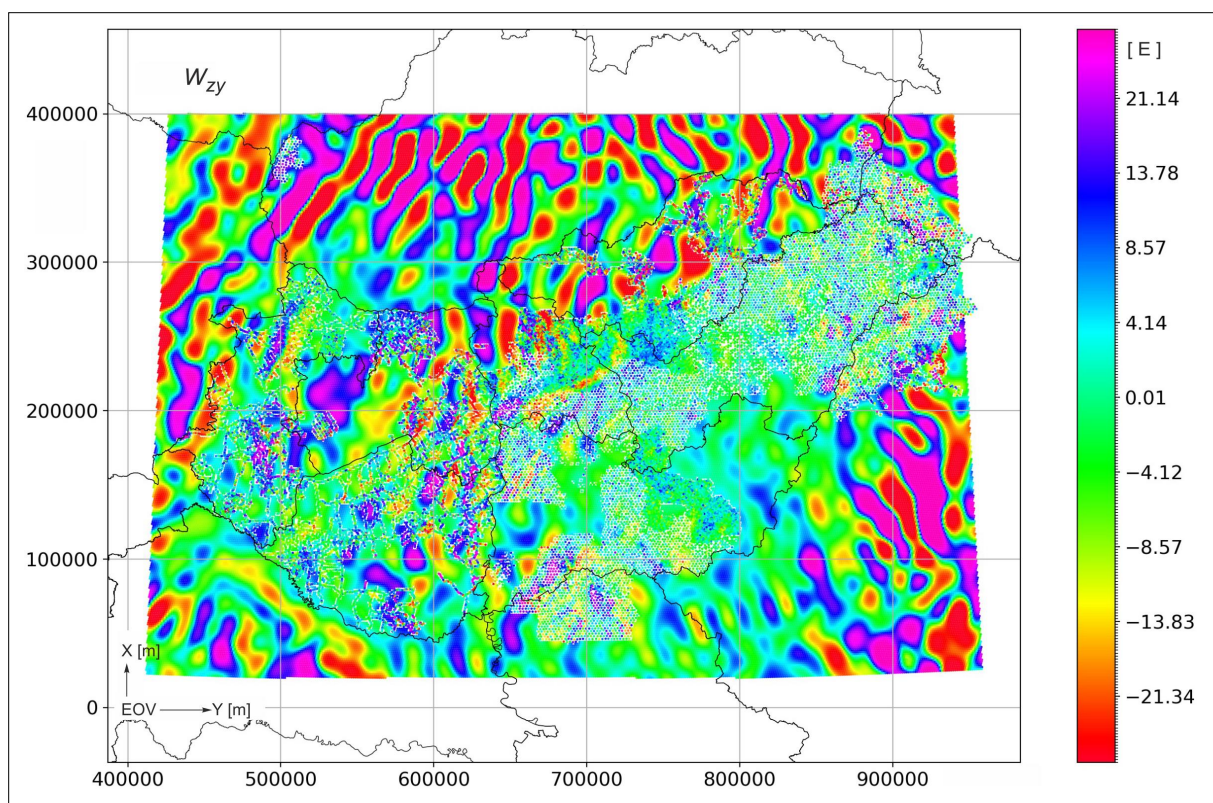
13. ábra | Eötvös-ingával mért és a kitöltő pontokra az EIGEN-6C4 modellel számított W_{Δ} görbületi gradiensek
Figure 13 | Curvature gradients W_{Δ} measured by Eötvös torsion balance and calculated with the EIGEN-6C4 model



14. ábra | Eötvös-ingával mért és a kitöltő pontokra az EIGEN-6C4 modellel számított W_{xy} görbületi gradiensek
Figure 14 | Curvature gradients W_{xy} measured by Eötvös torsion balance and calculated with the EIGEN-6C4 model



15. ábra Eötvös-ingával mért és a kitöltő pontokra az EIGEN-6C4 modellel számított W_{zx} horizontális gradiensek
Figure 15 Horizontal gradients W_{zx} measured by Eötvös torsion balance and calculated with the EIGEN-6C4 model



16. ábra Eötvös-ingával mért és a kitöltő pontokra az EIGEN-6C4 modellel számított W_{zy} horizontális gradiensek
Figure 16 Horizontal gradients W_{zy} measured by Eötvös torsion balance and calculated with the EIGEN-6C4 model

val mért értékekkel. Egyértelműen kiderült, hogy az alacsony, csupán $n_{\max} = 300$ fokszerű Tongji-GMMG2021S modellel – amelyben szereplő gömbfüggvények együtthatóit kizárólag a műholdas mérésekből határozták meg – nem érdemes foglalkozni, mert a vele számított és az Eötvös-ingával mért gradiensek között nagyon gyenge korreláció adódott. A másik két magasabb, $n_{\max} = 2190$ fokszerű EIGEN-6C4 és SGG-UGM-2 modellel a mért értékeket már jobban közelítő, használható gradiensek adódtak, amit a számított és az ellenőrző értékek közötti közel egy nagyságrenddel magasabb korrelációs együtthatók igazoltak. Ugyanakkor világossá vált, hogy a számított gradiensek még a két magas fokszerű modell esetében is az erőter változásának csupán a hosszú és közepes hullámhosszú összetevőit tartalmazzák, a nehézségi erőter gradienseinek a finomszerkezetét kizárólag Eötvös-inga-mérésekkel lehet meghatározni.

Vizsgálataink alapján tehát megállapítható, hogy a műholdas gradiometria (elsősorban a GOCE-mérések) felhasználásával számított gradiensek esetében egyáltalán nem érhető el az a részletgazdagság, amelyet az Eötvös-inga-mérések szolgáltatnak. Így ezekkel a számított értékekkel csak korlátozottan érdemes az Eötvös-ingával mért gradiensek kiegészítése azokra a magyarországi területekre, amelyek nem állnak rendelkezésre ingamérések. Ez különösen igaz a tagoltabb topográfiájú (hegyvidéki) területekre, ahol korábban eleve nem végeztek ingaméréseket, hiszen a topografikus tömegek igen változatos hatása miatt olyan bonyolult a gradiensek területi eloszlása, hogy nem lehet biztos következtetéseket levonni a felszín alatti szerkezetekre. Ugyanakkor más célokra jól használhatók a műholdas gradiométeres mérések, amelyekből sikeresen meghatároztuk Magyarország teljes területére az Eötvös-tenzor elemeinek területi eloszlását.

Köszönetnyilvánítás

Kutatásaink részben a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal – NKFIH No. 124286 támogatásával folytak.

A tanulmány szerzői

Völgyesi Lajos, Tóth Gyula, Pongrácz Dániel

Hivatkozások

- Bíró P., Ádám J., Völgyesi L., Tóth Gy. (2013): A felsőgeodézia elmélete és gyakorlata. HM Zrínyi Térképészeti és Kommunikációs Szolgáltató Nonprofit Kft. Kiadó, Budapest. Egyetemi tankönyv és kézikönyv, ISBN 978-963-257-248-2.
- Bucha B., Janák J., (2013): A MATLAB-based graphical user interface program for computing functionals of the geopotential up to ultra-high degrees and orders. *Computers & Geosciences* 56, 186–196. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cageo.2013.03.012>.

- DHI GRAS: EU-DEM Statistical Validation Report, 2014. <https://ec.europa.eu/eurostat/documents/7116161/7172326/Report-EU-DEM-statistical-validation-August2014.pdf>
- Diera M. (2016): Nehézségi erő gradienseinek meghatározása Magyarország területére, GOCE-mérések alapján. Diplomater, BME Építőmérnöki Kar.
- Dombi J. (2012): Intelligens rendszerek. SZTE Elektronikus jegyzet, 79–80. <https://eta.bibl.u-szeged.hu/1810/1/mi2.pdf>
- Eicker A. (2008): Gravity field refinement by radial base functions from in situ Satellite Data. PhD thesis, Institute of Geodesy and Geo-information, University of Bonn.
- Földváry L. (2004): A 2000-es évek első évtizede: a gravimetriai műholdak korszaka. *Magyar Geofizika*, 45/4, 118–124.
- Földváry L., Sujbert L., Polgár Z. (2014): A GOCE műhold gravitációs gradiens méréseinek szűrése és pontossági kérdései. *Geomatikai Közlemények*, 17, 33–44.
- Gombár L., Göncz G., Késmárky I., Kloska K., Molnár K., Nagy Z., Pogácsás Gy., Szilágyi L., Véges I. (2002): A felszíni geofizikai kutatás 50 éve a kőolajiparban. GES Kft. kiadványa, Budapest.
- Haalck H. (1950): Die vollständige Berechnung örtlicher gravimetrischer Störfelder aus Drehwaagemessungen. Veröffentlichungen des Geodätischen Institutes Potsdam, Nr. 4, Potsdam.
- Koop R. (1993): Global Gravity Field Modelling Using Satellite Gravity Gradiometry, Publications on geodesy, New Series, Vol. 38., Nederlandse Commissie voor Geodesie, ISBN 9789061322467
- Naeimi M. (2013): Inversion of satellite gravity data using spherical radial base functions. PhD thesis, University of Hannover, Nr. 309, DGK Reihe C, 711.
- Pongrácz D. (2022): Magyarországi gradiensmező meghatározása a GOCE műhold adatai és Eötvös-inga mérések alapján. TDK-dolgozat, BME, Építőmérnöki Kar, Általános- és Felsőgeodézia Tanszék.
- Reed G. B. (1973): Application of Kinematical Geodesy for Determining the Short Wave Length Components of the Gravity Field by Satellite Gradiometry. Department of Geodetic Science, report 201, Ohio State University, Columbus.
- Rummel R. (2002): Gravitációs gradiometria: Eötvös Lorándtól a modern űrkorszakig. *Magyar Geofizika*, 43/4, 145–150.
- Shako R., Förste C., Abrykosov O., Bruinsma S., Marty J. C., Lemoine J. M., Flechtner F., Neumayer K.-H., Dahle C. (2014): EIGEN-6C: A High-Resolution Global Gravity Combination Model Including GOCE Data. In: Flechtner F., Sneeuw N., Schuh W. D. (eds.), Observation of the System Earth from Space – CHAMP, GRACE, GOCE and future missions, (GEO-TECHNOLOGIEN Science Report; No. 20; Advanced Technologies in Earth Sciences), Berlin Springer, 155–161. DOI: 10.1007/978-3-642-32135-1_20, Print ISBN 978-3-642-32134-4 Online ISBN 978-3-642-32135-1
- Szabó Z. (1999): Az Eötvös-inga története. *Magyar Geofizika*, 40/1, 26–38.
- Szabó Z. (2016): Jelentős évfordulók az Eötvös-inga-mérések történetében. A Ság hegyi mérés 125. és az egebelli mérés 100. évfordulójára. *Magyar Geofizika*, 57/4, 170–184.
- Szabó Z. (2018): Eötvös ingájának megalkotásával megszületett a kőolajkutató geofizika. *Magyar Geofizika*, 59/4, 161–164.
- Tóth Gy., Völgyesi L., Csapó G. (2004): Determination of vertical gradients from torsion balance measurements. In: IAG International Symposium, Gravity, Geoid and Space Missions. Porto, Portugal August 30 – September 3, 2004.

- Tóth S. (2020): Geoidmeghatározás Magyarország területére GOCE gravitációs gradiensekből. Diplomaterv, BME Építőmérnöki Kar.
- Völgyesi L. (2002): Geofizika. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Völgyesi L., Csapó G., Laky S., Tóth Gy., Ultmann Z. (2009): Közel fél évszázados szünet után ismét Eötvös-inga-mérések Magyarországon. *Geodézia és Kartográfia*, 61/11, 71–82.
- Völgyesi L., Szondy Gy., Tóth Gy., Péter G., Kiss B., Deák L., Égető Cs., Fenyvesi E., Gróf Gy., Ván P. (2018): Előkészületek az Eötvös-kísérlet újramérésére. *Magyar Geofizika*, 59/4, 165–179.
- Völgyesi L., Tóth Gy., Ultmann Z. (2015): Új fejezet az Eötvös-ingával végzett magyarországi mérések és felhasználásuk történetében. *Magyar Geofizika*, 56/2, 95–105.
- Völgyesi L. (2019): Eötvös Loránd munkásságának geodéziai jelentősége. *Geodézia és Kartográfia* 71/5, 4–13.
- Yi W., Rummel R., Gruber T. (2013): Gravity field contribution analysis of GOCE gravitational gradient components. *Stud. Geophys. Geod.*, 57, 174–202.
- WEB_1: <https://www.eea.europa.eu/data-and-maps/data/copernicus-land-monitoring-service-eu-dem>
- WEB_2: <https://www.agisoft.com/downloads/geoids/>
- WEB_3: http://icgem.gfz-potsdam.de/tom_longtime
- WEB_4: <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2013.03.012>