

Pontszerű szedecimupólus (SDP) mágnes spinner magnetométeres mérésének szimulációja

MÁRTON P.

ELTE Geofizikai és Űrtudományi Tanszék, Budapest

E-mail: archeomag@caesar.elte.hu

A szedecimupólus (SDP) mágnes a negyedrendű multipólus mágnes. Mágneses tere (indukció) a mágneses potenciál függvényéből számítható ki, amely az m_4 momentum és négy pár szögparaméternek a függvénye. Utóbbiak a mágnes négy tengelyének irányába mutató egységvektor metszéspontjainak pólustávolság és hosszúság koordinátái az egységsugarú gömb felszínén $((\vartheta_i, \lambda_i), i = 1, 2, 3, 4)$. Mintaméretű, azaz közel pontszerű SDP mágnes spinner magnetométeren történő forgatásával folytonos kimenő feszültséget regisztrálhatunk. A jelen munka célja a mért feszültségek és a mágnes paraméterei között fennálló egyenleteknek a levezetése és alkalmazása a mérés szimulációjára.

Márton, P.: Numerical modelling of the measurement of a small size sedecimupole (SDP) magnet on a spinner magnetometer with Helmholtz coil sensor

The sedecimupólus (SDP) magnet is the fourth order multipole magnet. The magnetic field (induction) which is computed from the magnetic potential depends on its strength expressed by the moment m_4 and four pairs of geometrical parameters, the polar distances and longitudes of the points of intersection on the surface of the unit sphere of the four axes of the SDP magnet $((\vartheta_i, \lambda_i), i = 1, 2, 3, 4)$. If such a magnet of sufficiently small size placed on a spinner magnetometer for measurement it will produce a continuous signal of alternating voltage. The aim of this work is to derive the equations between the measured voltages and the parameters of the magnet and apply them to the simulation of the measurement.

Beérkezett: 2024. október 14.; elfogadva: 2024. október 29.

Bevezetés

Kicsiny (pontszerű) szedecimupólus mágneset forgatunk egyenletes ω szögsebességgel vízszintes tengelyű, Helmholtz-konfigurációjú tekercspár belsejében. Az alkalmazott (X, Y, Z) koordináta rendszer kezdőpontja egyben a tekercspár középpontja. Modellünkben a tekercsek átmérője 8 cm, menetszáma 2000. Az 1-jelű tekercs $X = +2$ cm-en, a 2 jelű tekercs $X = -2$ cm-en van. A Z tengely függőlegesen felfelé mutat. A mágnes helye az origó, momentuma m_4 Am⁵. További paraméterei a hozzá rögzített (x', y', z') koordináta-rendszerben négy tengely-irányának u_i egységvektorai, ill. az ezeknek megfelelő gömbfelszíni ϑ_i pólustávolság és λ_i hosszúság ($i = 1, 2, 3, 4$). A forgatás az első mérési helyzetben ($j = 1$) a minta z' tengelye körül történik, a második helyzetben ($j = 2$) az x' tengely körül, végül a harmadik helyzetben ($j = 3$) az y' tengely körül, azaz mindhárom esetben a forgás-

tengely egybeesik a Z tengellyel. A mérés szimulációjának bemeneti adatai m_4 , valamint a felsorolás sorrendjében:

a $j = 1$ helyzetben a

$$\lambda_i^{(1)} = \lambda_i, \text{ és } \vartheta_i^{(1)} = \vartheta_i, (\sin \vartheta_i^{(1)} \neq 0), \quad (i = 1, \dots, 4), \quad (1.1)$$

a $j = 2$ és $j = 3$ helyzetekre pedig a

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \lambda_i^{(2)} &= \cos \vartheta_i / \sin \vartheta_i \sin \lambda_i, \\ \cos \vartheta_i^{(2)} &= \sin \vartheta_i \cos \lambda_i, \quad (i = 1, \dots, 4), \end{aligned} \quad (1.2)$$

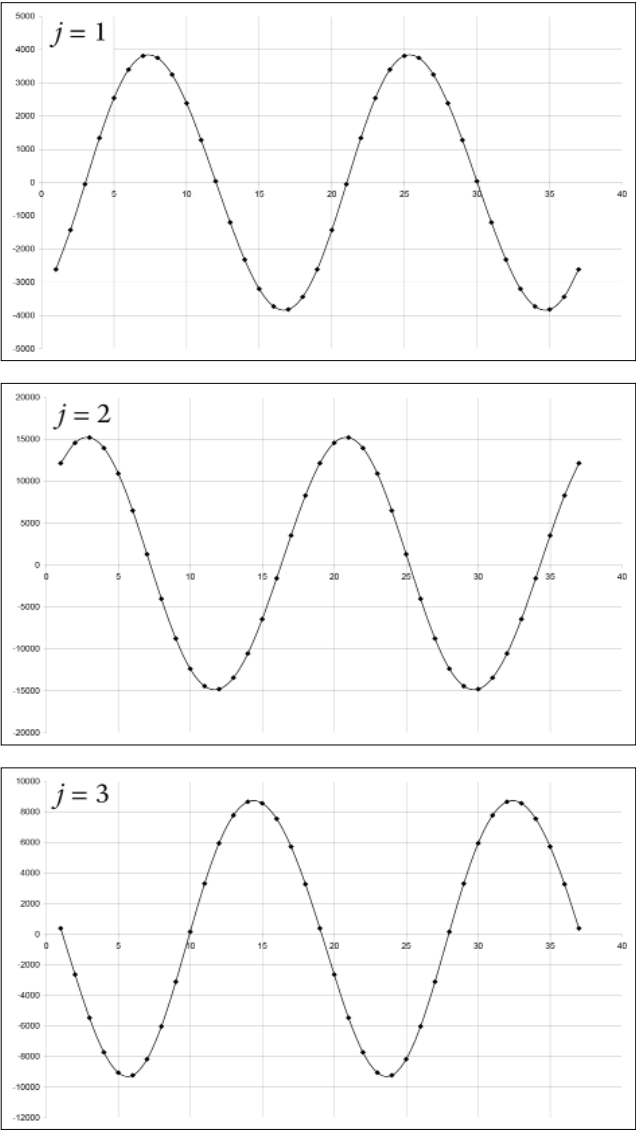
illetve a

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \lambda_i^{(3)} &= \sin \vartheta_i \cos \lambda_i / \cos \vartheta_i, \\ \cos \vartheta_i^{(3)} &= \sin \vartheta_i \sin \lambda_i, \quad (i = 1, \dots, 4) \end{aligned} \quad (1.3)$$

összefüggések felhasználásával számítandók ki.

1. táblázat Az $m_4 = 1 \cdot 10^{-10} \text{ Am}^5$ momentumú SDP mágnes szögparaméterei a $j = 1, 2, 3$ mérési helyzetekben
Table 1 Angular parameters of the sample (SDP) magnet of moment $m_4 = 1 \cdot 10^{-10} \text{ Am}^5$ in measurement positions $j = 1, 2, 3$

i/j	1		2		3	
	ϑ (°)	λ (°)	ϑ (°)	λ (°)	ϑ (°)	λ (°)
1	37,10	192,85	126,022	99,548	97,710	-36,403
2	50,72	306,36	62,683	134,555	128,562	35,936
3	66,91	32,98	39,497	38,068	59,951	63,059
4	27,62	105,63	97,175	63,257	63,483	-8,024



1. ábra Szimulált feszültségek (μV), amelyeket a fent definiált Helmholtz-tekerces kimenetén mérnénk az 1. táblázatban megadott paraméterekkel rendelkező SDP mágnes forgatása nyomán egy teljes körülforgatás alatt a három mérési helyzetben (j). A görbék (közelítő) harmonikus analízise a ponttal megjelölt diszkrét értékek felhasználásával történt

Figure 1 Output voltages (μV) of the Helmholtz coil sensor produced by induction of the sample magnet during one rotation cycle in all three measurement positions (j). The (approximate) harmonic analysis of the curves (see Table 1) was performed using the values marked by dots

A forgó mágnes a tekercsekben váltakozó elektromos feszültséget indukál.

Példaként tekintsük az $m_4 = 1 \cdot 10^{-10} \text{ Am}^5$ momentumú SDP mágnest, amelynek szögparamétereit a $j = 1, 2, 3$ mérési helyzetekben az 1. táblázat tartalmazza.

$\omega = 500 \text{ 1/s}$ mellett, egymással elektromosan szembe kapcsolt (anti-Helmholtz kapcsolás) tekercsek esetén a kimeneti feszültségek az 1. ábra szerint alakulnak.

Noha az ábrákon a feszültség görbék monokromatikus 2ω frekvenciájú szinuszhullámoknak látszanak, a harmonikus analízis szerint egy domináns 2ω frekvenciájú (a) és egy sokkal kisebb 4ω frekvenciájú (b) szinuszhullámból állnak, amelyek amplitúdóit (A) és fázisait (La) a 2. táblázat mutatja be a három egymás utáni mérési helyzetre (j felső index).

2. táblázat Az $m_4 = 1 \cdot 10^{-10} \text{ Am}^5$ momentumú SDP mágnes (1. táblázat) által indukált, váltakozó feszültség 2ω (a) és 4ω (b) frekvenciájú összetevőinek amplitúdói (A) és fázisszögei (La) μV-ban, ill. °-ban

Table 2 According to harmonic analysis the output voltages shown in Fig. 1 are composed by two sinusoidal components of frequency 2ω (a) and 4ω (b), where ω is the angular velocity of rotation of the magnet. The respective amplitudes (A) and phase angles (La) are shown for all three measurement positions

(a)	$A_2^{(1)} (\mu\text{V})$	$La_2^{(1)} (^\circ)$
	3832,78	139,33
	$A_2^{(2)} (\mu\text{V})$	$La_2^{(2)} (^\circ)$
	15055,66	234,52
	$A_2^{(3)} (\mu\text{V})$	$La_2^{(3)} (^\circ)$
(b)	9017,61	-0,72
	$A_4^{(1)} (\mu\text{V})$	$La_4^{(1)} (^\circ)$
	113,311	-82,18
	$A_4^{(2)} (\mu\text{V})$	$La_4^{(2)} (^\circ)$
	258,046	-24,57
	$A_4^{(3)} (\mu\text{V})$	$La_4^{(3)} (^\circ)$
	341,52	54,57

Valóban, a 2ω frekvenciájú harmonikus itt egy-két nagyságrenddel erősebb, mint a 4ω frekvenciájú komponens és látható még, hogy a $La_4^{(j)}$ fázisszögek egyenlőek a

megfelelő bemeneti fázisszögek összegével, valamint a $\text{La}_2^{(j)}$ értékek közelítőleg egyenlők a $\lambda_1^{(j)} + \lambda_2^{(j)}$ értékekkel ($j = 1, 2, 3$).

Az SDP mágnes spinner magnetométeres mérése tehát 12 mérési adatot szolgáltat, hatot a 2ω és hatot a 4ω frekvencián. A mért adatok és a mágnes paraméterei között fennálló egyenletek levezetését a következő részben végezzük el.

Alapegyenletek

Az (X, Y, Z) koordináta-rendszer origójában lévő szedecimupólus (SDP) mágnes mágneses potenciálja (W_4) tömör alakban (James, 1968)

$$W_4 = \frac{\mu_0}{4\pi} m_4 \prod_{i=1}^4 (\mathbf{u}_{4,i} \cdot \nabla) \frac{1}{R}, \quad (2)$$

ahol $\mu_0/4\pi = 10^{-7}$ Vs/Am, m_4 a mágnes momentuma Am⁵ egységben, $\mathbf{u}_{4,i}$ az i -edik tengely irányának egységvektora, R pedig a potenciálpont távolsága a kezdőponttól (méterben).

Kifejtve a

$$W_4 = 10^{-7} m_4 P_{4,klmn}, \quad (k, l, m, n = 1, 2, 3) \quad (3)$$

összeget kapjuk, amelynek tagjai egy $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ elemű mátrixba rendezhetők. A P_4 polinomok (X, Y, Z) függvényei, minden egyes $u_4(\vartheta_i, \lambda_i)$ pedig további két tényezőből áll. Az első csak ϑ_i -nek, a második pedig csak λ_i -nek a függvénye ($i = 1, 2, 3, 4$), azaz sematikusán $u_4 = Q(\vartheta_i) \cdot \Lambda(\lambda_i)$.

Míthogy a mérőtekerccs a térváltozásnak csak az X komponensére érzékeny, a mágnes terének csak ezt a komponensét és ennek időbeli változását kell meghatározni. Így

$$B_x = -M_4 \frac{\partial P_4}{\partial X} Q \Lambda, \quad (4)$$

ahol B_x a mágneses tér X komponense, $M_4 = 10^{-7} m_4$, és

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -M_4 \frac{\partial P_4}{\partial X} Q \frac{d\Lambda}{d\lambda} \omega. \quad (5)$$

$\omega = d\lambda_i/dt$ bármely i indexre, ui. B_x időbeli változása azért következik be, mert mérésakor a mágnes ω szögsebességgel forgatjuk. Az indukált feszültség az egyik tekercs egyetlen menetében egyenlő $-(\partial B_x/\partial t)S$ -sel, ahol S a tekercs egy menetének felülete (számításainkban $S = 0,04^2\pi$ m²). Itt az (5) képletben $\partial P_4/\partial X$ -nek az S felületre vett átlagával számolunk. (Ennek közelítő meghatározásához S -et 221 egyenlő területű négyzetekre osztjuk, és $\partial P_4/\partial X$ értékét minden négyzet középpontjára kiszámítjuk. Ezeket összeadjuk és az összeget elosztjuk 221-gyel.) A kiszámított átlagértékek egy $P(K)$, $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ elemű szimmetrikus mátrixba rendeződnek. Két ilyen mátrixunk lesz, az egyik az 1-es, $X = +2$ cm-ben, a másik a 2-es, $X = -2$ cm-ben rögzített tekercsre. Mindkét mátrix elemei azonos értékűek lesznek, de több elem előjele különbözni fog. A további számításokra csak az ellentétes előjelű elemek jöhetnek szóba, hiszen a felvevő tekercsek anti-Helmholtz

kapcsolása miatt az azonos előjelűek törlődnek. A polinomokat és értékeiket ($1/\text{m}^6$) egységekből az 1-es tekercsre vonatkozóan (a 221-gyel való osztás előtt) alább soroljuk fel.

Jelölések:

$$R = (X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2}, \quad (6)$$

$$A = -945X/R^{11}, B = 105/R^9, C = 105X/R^9, \quad (7)$$

$$D = -15/R^7, E = -15X/R^7.$$

Ezekkel

$$P(1) = AX^4 + 4BX^3 + 4CX^2 + 8DX + E = -2,023422 \cdot 10^{+13}, \quad (8.1)$$

$$P(5) = AX^2Y^2 + 2BXY^2 + C(Y^2 - X^2) - 2DX - E = -2,10995 \cdot 10^{+13} \quad (8.2)$$

$$P(9) = AX^2Z^2 + 2BZX^2 + C(Z^2 - X^2) - 2DX - E = -2,109951 \cdot 10^{+13}, \quad (8.3)$$

$$P(11) = AX^2Y^2 + 2BXY^2 + C(X^2 + Y^2) + 2DX + E = -2,884277 \cdot 10^{+11}, \quad (8.4)$$

$$P(13) = P(11), \quad (8.6)$$

$$P(21) = AX^2Z^2 + 2BZX^2 + C(X^2 + Z^2) + 2DX + E = -2,884262 \cdot 10^{+11}, \quad (8.7)$$

$$P(25) = P(21), \quad (8.8)$$

$$P(29) = AX^2Y^2 + 2BXY^2 + C(X^2 + Y^2) + 2DX + E = -2,884277 \cdot 10^{+11}, \quad (8.9)$$

$$P(31) = P(29), \quad (8.10)$$

$$P(37) = AX^2Y^2 + 2BXY^2 + C(X^2 - Y^2) + 2DX - E = 6,85547 \cdot 10^{+10}, \quad (8.11)$$

$$P(41) = AY^4 + 4CY^2 + E = 5,514606 \cdot 10^{+11}, \quad (8.12)$$

$$P(45) = AY^2Z^2 + C(Z^2 - Y^2) - E = 4,509264 \cdot 10^{+11}, \quad (8.13)$$

$$P(51) = AY^2Z^2 + C(Y^2 + Z^2) + E = 9,394649 \cdot 10^{+10}, \quad (8.14)$$

$$P(53) = P(51), \quad (8.15)$$

$$P(57) = AX^2Z^2 + 2BZX^2 + C(X^2 + Z^2) + 2DX + E = -2,884262 \cdot 10^{+11}, \quad (8.16)$$

$$P(61) = P(57), \quad (8.17)$$

$$P(69) = AY^2Z^2 + C(Y^2 + Z^2) + E = 9,394649 \cdot 10^{+10}, \quad (8.18)$$

$$P(71) = P(69), \quad (8.19)$$

$$P(73) = AX^2Z^2 + 2BZX^2 + C(X^2 - Z^2) + 2DX - E = 6,855349 \cdot 10^{+10}, \quad (8.20)$$

$$P(77) = AY^2Z^2 + C(Y^2 - Z^2) - E = 4,509268 \cdot 10^{+11}, \quad (8.21)$$

$$P(81) = AZ^4 + 4CZ^2 + E = 5,514609 \cdot 10^{+11}. \quad (8.22)$$

Az azonos sorszámú (K) $klmn$ indexek és függvények felsorolása:

K	$klmn$	$Q(\vartheta_i)$	$\Lambda(\lambda_i)$	(9)
1	1111	$\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\cos\lambda_1 \cos\lambda_2 \cos\lambda_3 \cos\lambda_4$	(9.1)
5	1122	$\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\cos\lambda_1 \cos\lambda_2 \sin\lambda_3 \sin\lambda_4$	(9.2)
9	1133	$\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \cos\vartheta_4$	$\cos\lambda_1 \cos\lambda_2$	(9.3)
11	1212	$\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\cos\lambda_1 \sin\lambda_2 \cos\lambda_3 \sin\lambda_4$	(9.4)
13	1221	$\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\cos\lambda_1 \sin\lambda_2 \sin\lambda_3 \cos\lambda_4$	(9.5)
21	1313	$\sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \cos\vartheta_4$	$\cos\lambda_1 \cos\lambda_3$	(9.7)
25	1331	$\sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\cos\lambda_1 \cos\lambda_4$	(9.8)
29	2112	$\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\sin\lambda_1 \cos\lambda_2 \cos\lambda_3 \sin\lambda_4$	(9.9)
31	2121	$\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\sin\lambda_1 \cos\lambda_2 \sin\lambda_3 \cos\lambda_4$	(9.10)
37	2211	$\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\sin\lambda_1 \sin\lambda_2 \cos\lambda_3 \cos\lambda_4$	(9.11)
41	2222	$\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\sin\lambda_1 \sin\lambda_2 \sin\lambda_3 \sin\lambda_4$	(9.12)
45	2233	$\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \cos\vartheta_4$	$\sin\lambda_1 \sin\lambda_2$	(9.13)
51	2323	$\sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \cos\vartheta_4$	$\sin\lambda_1 \sin\lambda_3$	(9.14)
53	2332	$\sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\sin\lambda_1 \sin\lambda_4$	(9.15)
57	3113	$\cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \cos\vartheta_4$	$\cos\lambda_2 \cos\lambda_3$	(9.16)
61	3131	$\cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\cos\lambda_2 \cos\lambda_4$	(9.17)
69	3223	$\cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \cos\vartheta_4$	$\sin\lambda_2 \sin\lambda_3$	(9.18)
71	3232	$\cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\sin\lambda_2 \sin\lambda_4$	(9.16)
73	3311	$\cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\cos\lambda_3 \cos\lambda_4$	(9.20)
77	3322	$\cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\sin\lambda_3 \sin\lambda_4$	(9.21)
81	3333	$\cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \cos\vartheta_4$	1	(9.22)

$$\partial\Lambda(\lambda_i)/\partial\lambda_i \quad (10)$$

$$1 \quad -0,5(\sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + \cos(\lambda_2 - \lambda_1)\sin(\lambda_3 + \lambda_4) + \cos(\lambda_4 - \lambda_3)\sin(\lambda_1 + \lambda_2)), \quad (10.1)$$

$$5 \quad 0,5(\sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + \cos(\lambda_2 - \lambda_1)\sin(\lambda_3 + \lambda_4) - \cos(\lambda_4 - \lambda_3)\sin(\lambda_1 + \lambda_2)), \quad (10.2)$$

$$9 \quad -\sin(\lambda_1 + \lambda_2), \quad (10.3)$$

$$11 \quad 0,5(\sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + \sin(\lambda_2 - \lambda_1)\cos(\lambda_3 + \lambda_4) + \sin(\lambda_4 - \lambda_3)\cos(\lambda_1 + \lambda_2)), \quad (10.4)$$

$$13 \quad 0,5(\sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + \sin(\lambda_2 - \lambda_1)\cos(\lambda_3 + \lambda_4) - \sin(\lambda_4 - \lambda_3)\cos(\lambda_1 + \lambda_2)), \quad (10.5)$$

$$21 \quad -\sin(\lambda_1 + \lambda_3), \quad (10.7)$$

$$25 \quad -\sin(\lambda_1 + \lambda_4), \quad (10.8)$$

$$29 \quad 0,5(\sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) - \sin(\lambda_2 - \lambda_1)\cos(\lambda_3 + \lambda_4) + \sin(\lambda_4 - \lambda_3)\cos(\lambda_1 + \lambda_2)), \quad (10.9)$$

$$31 \quad 0,5(\sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + \sin(\lambda_2 - \lambda_1)\cos(\lambda_3 + \lambda_4) - \sin(\lambda_4 - \lambda_3)\cos(\lambda_1 + \lambda_2)) \quad (10.10)$$

$$37 \quad 0,5(\sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) - \cos(\lambda_2 - \lambda_1)\sin(\lambda_3 + \lambda_4) + \cos(\lambda_4 - \lambda_3)\sin(\lambda_1 + \lambda_2)), \quad (10.11)$$

$$41 \quad 0,5(-\sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + \cos(\lambda_2 - \lambda_1)\sin(\lambda_3 + \lambda_4) + \cos(\lambda_4 - \lambda_3)\sin(\lambda_1 + \lambda_2)), \quad (10.12)$$

$$45 \quad \sin(\lambda_1 + \lambda_2), \quad (10.13)$$

$$51 \quad \sin(\lambda_1 + \lambda_3), \quad (10.14)$$

$$53 \quad \sin(\lambda_1 + \lambda_4), \quad (10.15)$$

$$57 \quad -\sin(\lambda_2 + \lambda_3), \quad (10.16)$$

$$61 \quad -\sin(\lambda_2 + \lambda_4), \quad (10.17)$$

$$69 \quad \sin(\lambda_2 + \lambda_3), \quad (10.18)$$

$$71 \quad \sin(\lambda_2 + \lambda_4), \quad (10.19)$$

$$73 \quad -\sin(\lambda_3 + \lambda_4), \quad (10.20)$$

$$77 \quad \sin(\lambda_3 + \lambda_4), \quad (10.21)$$

$$81 \quad 0 \quad (10.22)$$

A (10) felsorolás megmutatja, hogy a tekercsek kimeneti feszültsége 4ω és 2ω frekvenciájú sinusfüggvény szerint változó komponensekből tevődik össze.

A 4ω frekvenciájú összetevő (5) alapján (az állandó szorzó és m_4 nélkül):

$$Z4 \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4 \sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4), \quad (11)$$

ahol

$$Z4 = -P(1) + P(5) + P(11) + P(13) + P(29) + P(31) + P(37) - P(41) = -2,501887 \cdot 10^{+12} \quad (11.1)$$

A 2ω frekvenciájú összetevőnek tíz tagja van. Ezek (5) alapján (az állandó szorzó és m_4 nélkül)

$$2(-P(1) + P(5) - P(37) + P(41)) = -7,647482 \cdot 10^{+11}, \quad (12.1)$$

$$2(-P(1) - P(5) + P(37) + P(41)) = 8,3907471 \cdot 10^{+13}, \quad (12.2)$$

$$2(P(45) - P(9)) = 4,310087 \cdot 10^{+13}, \quad (12.3)$$

$$\begin{aligned} 2(P(69) - P(57)) &= 2(P(77) - P(73)) = 2(P(51) - P(21)) \\ &= 2(P(53) - P(25)) = 2(P(71) - P(61)) = 7,647454 \cdot 10^{+11} \end{aligned} \quad (12.4)$$

értékek mellett

$$Z21 = -7,647482 \cdot 10^{+11} \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4 \sin(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4), \quad (13.1)$$

$$Z22 = -7,647482 \cdot 10^{+11} \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4 \sin(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4), \quad (13.2)$$

$$Z23 = 8,3907471 \cdot 10^{+13} \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4 \sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4), \quad (13.3)$$

$$Z24 = 8,3907471 \cdot 10^{+13} \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4 \sin(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4), \quad (13.4)$$

$$Z25 = 4,310087 \cdot 10^{+13} \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \cos\vartheta_4 \sin(\lambda_1 + \lambda_2), \quad (13.5)$$

$$Z26 = 7,647454 \cdot 10^{+11} \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \cos\vartheta_4 \sin(\lambda_2 + \lambda_3), \quad (13.6)$$

$$Z27 = 7,647454 \cdot 10^{+11} \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4 \sin(\lambda_3 + \lambda_4), \quad (13.7)$$

$$Z28 = 7,647454 \cdot 10^{+11} \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \cos\vartheta_4 \sin(\lambda_1 + \lambda_3), \quad (13.8)$$

$$Z29 = 7,647454 \cdot 10^{+11} \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \sin\vartheta_4 \sin(\lambda_1 + \lambda_4), \quad (13.9)$$

$$Z210 = 7,647454 \cdot 10^{+11} \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \sin\vartheta_4 \sin(\lambda_2 + \lambda_4). \quad (13.10)$$

A közös $K_2 = K_4$ állandó szorzó a $\mu_0/4\pi = 10^{-7}$ (Vs/Am), egy tekercs menetszáma = 2000, egy (köralakú) menet S területe = $0,04^2 \cdot \pi \text{ m}^2$, a mágnes ω forgási szögsebessége 500 (1/s) értékek szorzata lesz, osztva a fentebb már említett 221 számmal, azaz

$$K_2 = K_4 = 2,274456 \cdot 10^{-6} \text{ (Vm/A)}. \quad (14)$$

Mint hogy mindkét komponens esetében szinuszmennyiségek összegzését kell elvégezni, az amplitúdókra és fázisszögekre vonatkozó egyenletek így alakulnak:

$$A_4^{(1)} = K_4 m_4 |Z4| \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4, \quad (15)$$

$$\text{tg}(\text{La}_4^{(1)}) = \sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) / \cos(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \quad (16)$$

a 4ω frekvenciájú, és

$$A_2^{(1)} = K_2 m_4 \left[\left(\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(1)} S_k^{(1)} \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(1)} C_k^{(1)} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (17)$$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{La}_2^{(1)}\right)=\frac{\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(1)} S_k^{(1)}}{\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(1)} C_k^{(1)}} \quad (18)$$

a 2ω frekvenciájú komponens esetében. A (17) és (18) képletekben $K_{2,k}$ a (13.1)–(13.10) alatt felsorolt egyenletek jobb oldali állandói, $Q_k^{(1)}$ a ϑ_i -ktől függő tényező. A λ_i kombinációk szinusza $S_k^{(1)}$ mint ott, illetve koszinusza $C_k^{(1)}$. A 2. táblázatban közölt szimulált mérési eredmények az (5) egyenlet alapján, a (11)–(14) képletek felhasználásával készültek az (1.1)–(1.3) képletekkel előállított bemeneti adatokkal (1. 1. táblázat).

A további egyenletek

A 4ω komponensre vonatkozó (15) és (16) formulák a j -edik ($j = 1, 2, 3$) mérési helyzetre így írhatók fel.

$$A_4^{(j)} = K_4 m_4 |Z_4| \sin \vartheta_1^{(j)} \sin \vartheta_2^{(j)} \sin \vartheta_3^{(j)} \sin \vartheta_4^{(j)}, \quad (19)$$

$$\operatorname{La}_4^{(j)} = \lambda_1^{(j)} + \lambda_2^{(j)} + \lambda_3^{(j)} + \lambda_4^{(j)}. \quad (20)$$

Az (1.1)–(1.3) képletek felhasználásával

$j = 2$ -re

$$A_4^{(2)} = K_4 m_4 |Z_4| \prod_{i=1}^4 [1 - \sin^2 \vartheta_i \cos^2 \lambda_i]^{1/2}, \quad (21)$$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{La}_4^{(2)}\right) = \frac{\operatorname{SZI}^{(2)} \operatorname{N2}^{(2)} + \operatorname{SZ2}^{(2)} \operatorname{N1}^{(2)}}{\operatorname{N1}^{(2)} \operatorname{N2}^{(2)} - \operatorname{SZI}^{(2)} \operatorname{SZ2}^{(2)}}, \quad (22)$$

ahol

$$\operatorname{SZI}^{(2)} = \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \lambda_2 + \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \sin \lambda_1, \quad (23.1)$$

$$\operatorname{SZ2}^{(2)} = \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_4 \sin \lambda_4 + \cos \vartheta_4 \sin \vartheta_3 \sin \lambda_3, \quad (23.2)$$

$$\operatorname{N1}^{(2)} = \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 - \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2, \quad (23.3)$$

$$\operatorname{N2}^{(2)} = \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_4 \sin \lambda_3 \sin \lambda_4 - \cos \vartheta_3 \cos \vartheta_4. \quad (23.4)$$

$j = 3$ -ra

$$A_4^{(3)} = K_4 m_4 |Z_4| \prod_{i=1}^4 [1 - \sin^2 \vartheta_i \sin^2 \lambda_i]^{1/2}, \quad (24)$$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{La}_4^{(3)}\right) = \frac{\operatorname{SZI}^{(3)} \operatorname{N2}^{(3)} + \operatorname{SZ2}^{(3)} \operatorname{N1}^{(3)}}{\operatorname{N1}^{(3)} \operatorname{N2}^{(3)} - \operatorname{SZI}^{(3)} \operatorname{SZ2}^{(3)}}, \quad (25)$$

ahol

$$\operatorname{SZI}^{(3)} = \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \cos \lambda_1 + \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \lambda_2, \quad (26.1)$$

$$\operatorname{SZ2}^{(3)} = \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_4 \cos \lambda_3 + \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_4 \cos \lambda_4, \quad (26.2)$$

$$\operatorname{N1}^{(3)} = -\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 + \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2, \quad (26.3)$$

$$\operatorname{N2}^{(3)} = -\sin \vartheta_3 \sin \vartheta_4 \cos \lambda_3 \cos \lambda_4 + \cos \vartheta_3 \cos \vartheta_4. \quad (26.4)$$

A 2ω komponensre vonatkozó (17) és (18) egyenletek általánosan, azaz ($j = 1, 2, 3$)-ra

$$A_2^{(j)} = K_2 m_4 \left[\left(\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(j)} S_k^{(j)} \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(j)} C_k^{(j)} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (27)$$

és

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{La}_2^{(j)}\right) = \frac{\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(j)} S_k^{(j)}}{\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(j)} C_k^{(j)}} \quad (28)$$

lesznek, ahol $K_{2,k}$ a (13.1)–(13.10) alatt felsorolt egyenletek jobb oldali állandói, $Q_k^{(j)}$ a $\vartheta_i^{(j)}$ -k-től függő tényező, $S_k^{(j)}$ és $C_k^{(j)}$ pedig az ott álló $\lambda_i^{(j)}$ kombinációk szinusza, illetve koszinusza.

A (27) és (28) formulák Q tényezői a $j = 1, 2, 3$ mérési helyzetekre vonatkozóan a következők.

$j = 1$ (vö. (13.1)–(13.10))

$$Q_{1-4}^{(1)} = \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_4, \quad (29.1)$$

$$Q_5^{(1)} = \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \cos \vartheta_4, \quad (29.2)$$

$$Q_6^{(1)} = \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_4, \quad (29.3)$$

$$Q_7^{(1)} = \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_4, \quad (29.4)$$

$$Q_8^{(1)} = \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_4, \quad (29.5)$$

$$Q_9^{(1)} = \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_4, \quad (29.6)$$

$$Q_{10}^{(1)} = \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_4. \quad (29.7)$$

$j = 2$

$$Q_{1-4}^{(2)} = \prod_{i=1}^4 [1 - \sin^2 \vartheta_i \cos^2 \lambda_i]^{1/2}, \quad (30.1)$$

$$Q_5^{(2)} = \prod_{i=1}^2 [1 - \sin^2 \vartheta_i \cos^2 \lambda_i]^{1/2} \prod_{i=3}^4 \sin \vartheta_i \cos \lambda_i, \quad (30.2)$$

$$Q_6^{(2)} = \sin \vartheta_1 \cos \lambda_1 \prod_{i=2}^3 [1 - \sin^2 \vartheta_i \cos^2 \lambda_i]^{1/2} \sin \vartheta_4 \cos \lambda_4, \quad (30.3)$$

$$Q_7^{(2)} = \prod_{i=1}^2 \sin \vartheta_i \cos \lambda_i \prod_{i=3}^4 [1 - \sin^2 \vartheta_i \cos^2 \lambda_i]^{1/2}, \quad (30.4)$$

$$Q_8^{(2)} = [1 - \sin^2 \vartheta_1 \cos^2 \lambda_1]^{1/2} \sin \vartheta_2 \cos \lambda_2 \times [1 - \sin^2 \vartheta_3 \cos^2 \lambda_3]^{1/2} \sin \vartheta_4 \cos \lambda_4, \quad (30.5)$$

$$Q_9^{(3)} = \left[1 - \sin^2 \vartheta_1 \cos^2 \lambda_1 \right]^{\frac{1}{2}} \prod_{i=2}^3 \sin \vartheta_i \cos \lambda_i \times \left[1 - \sin^2 \vartheta_4 \cos^2 \lambda_4 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (30.6)$$

$$Q_{10}^{(2)} = \sin \vartheta_1 \cos \lambda_1 \left[1 - \sin^2 \vartheta_2 \cos^2 \lambda_2 \right]^{\frac{1}{2}} \times \sin \vartheta_3 \cos \lambda_3 \left[1 - \sin^2 \vartheta_4 \cos^2 \lambda_4 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (30.7)$$

$j = 3$

$$Q_{1-4}^{(3)} = \prod_{i=1}^4 \left[1 - \sin^2 \vartheta_i \sin^2 \lambda_i \right]^{1/2}, \quad (31.1)$$

$$Q_5^{(3)} = \prod_{i=1}^2 \left[1 - \sin^2 \vartheta_i \sin^2 \lambda_i \right]^{1/2} \prod_{i=3}^4 \sin \vartheta_i \sin \lambda_i, \quad (31.2)$$

$$Q_6^{(3)} = \sin \vartheta_1 \sin \lambda_1 \prod_{i=2}^3 \left[1 - \sin^2 \vartheta_i \sin^2 \lambda_i \right]^{1/2} \sin \vartheta_4 \sin \lambda_4, \quad (31.3)$$

$$Q_7^{(3)} = \prod_{i=1}^2 \sin \vartheta_i \sin \lambda_i \prod_{i=3}^4 \left[1 - \sin^2 \vartheta_i \sin^2 \lambda_i \right]^{1/2}, \quad (31.4)$$

$$Q_8^{(3)} = \left[1 - \sin^2 \vartheta_1 \sin^2 \lambda_1 \right]^{1/2} \sin \vartheta_2 \sin \lambda_2 \times \left[1 - \sin^2 \vartheta_3 \sin^2 \lambda_3 \right]^{1/2} \sin \vartheta_4 \sin \lambda_4, \quad (31.5)$$

$$Q_9^{(3)} = \left[1 - \sin^2 \vartheta_1 \sin^2 \lambda_1 \right]^{\frac{1}{2}} \prod_{i=2}^3 \sin \vartheta_i \sin \lambda_i \times \left[1 - \sin^2 \vartheta_4 \sin^2 \lambda_4 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (31.6)$$

$$Q_{10}^{(3)} = \sin \vartheta_1 \sin \lambda_1 \left[1 - \sin^2 \vartheta_2 \sin^2 \lambda_2 \right]^{\frac{1}{2}} \times \sin \vartheta_3 \sin \lambda_3 \left[1 - \sin^2 \vartheta_4 \sin^2 \lambda_4 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (31.7)$$

A (27) és (28) formulák λ_i -től függő tényezői a $j = 1, 2, 3$ mérési helyzetekre vonatkozóan a következők.

$j = 1$

$$S_1^{(1)} = \sin(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4), \quad C_1^{(1)} = \cos(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4), \quad (32.1)$$

$$S_2^{(1)} = \sin(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4), \quad C_2^{(1)} = \cos(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4), \quad (32.2)$$

$$S_3^{(1)} = \sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4), \quad C_3^{(1)} = \cos(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4), \quad (32.3)$$

$$S_4^{(1)} = \sin(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4), \quad C_4^{(1)} = \cos(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4), \quad (32.4)$$

$$S_5^{(1)} = \sin(\lambda_1 + \lambda_2), \quad C_5^{(1)} = \cos(\lambda_1 + \lambda_2), \quad (32.5)$$

$$S_6^{(1)} = \sin(\lambda_2 + \lambda_3), \quad C_6^{(1)} = \cos(\lambda_2 + \lambda_3), \quad (32.6)$$

$$S_7^{(1)} = \sin(\lambda_3 + \lambda_4), \quad C_7^{(1)} = \cos(\lambda_3 + \lambda_4), \quad (32.7)$$

$$S_8^{(1)} = \sin(\lambda_1 + \lambda_3), \quad C_8^{(1)} = \cos(\lambda_1 + \lambda_3), \quad (32.8)$$

$$S_9^{(1)} = \sin(\lambda_1 + \lambda_4), \quad C_9^{(1)} = \cos(\lambda_1 + \lambda_4), \quad (32.9)$$

$$S_{10}^{(1)} = \sin(\lambda_2 + \lambda_4), \quad C_{10}^{(1)} = \cos(\lambda_2 + \lambda_4). \quad (32.10)$$

A következő két mérési helyzetre a fenti sin és cos függvények kifejezéséhez először az argumentumaikat kell meghatározni, amely az (1.1)–(1.3) formulák felhasználásával.

$j = 2$ -re

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} - \lambda_2^{(2)} + \lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)}) \\ = \frac{\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} - \lambda_2^{(2)}) + \operatorname{tg}(\lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)})}{1 - \operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} - \lambda_2^{(2)}) \operatorname{tg}(\lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)})}, \end{aligned} \quad (34.1)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(-\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)} + \lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)}) \\ = \frac{-\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} - \lambda_2^{(2)}) + \operatorname{tg}(\lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)})}{1 + \operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} - \lambda_2^{(2)}) \operatorname{tg}(\lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)})}, \end{aligned} \quad (34.2)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)} + \lambda_3^{(2)} - \lambda_4^{(2)}) \\ = \frac{\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)}) + \operatorname{tg}(\lambda_3^{(2)} - \lambda_4^{(2)})}{1 - \operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)}) \operatorname{tg}(\lambda_3^{(2)} - \lambda_4^{(2)})}, \end{aligned} \quad (34.3)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)} - \lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)}) \\ = \frac{\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)}) - \operatorname{tg}(\lambda_3^{(2)} - \lambda_4^{(2)})}{1 + \operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)}) \operatorname{tg}(\lambda_3^{(2)} - \lambda_4^{(2)})}, \end{aligned} \quad (34.4)$$

ahol

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)}) = \frac{\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \lambda_2 + \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \sin \lambda_1}{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 - \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}, \quad (35.1)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} - \lambda_2^{(2)}) = \frac{\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \lambda_2 - \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \sin \lambda_1}{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 + \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}, \quad (35.2)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)}) = \frac{\cos \vartheta_3 \sin \vartheta_4 \sin \lambda_4 + \cos \vartheta_4 \sin \vartheta_3 \sin \lambda_3}{\sin \vartheta_3 \sin \vartheta_4 \sin \lambda_3 \sin \lambda_4 - \cos \vartheta_3 \cos \vartheta_4}, \quad (35.3)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_3^{(2)} - \lambda_4^{(2)}) = \frac{\cos \vartheta_3 \sin \vartheta_4 \sin \lambda_4 - \cos \vartheta_4 \sin \vartheta_3 \sin \lambda_3}{\sin \vartheta_3 \sin \vartheta_4 \sin \lambda_3 \sin \lambda_4 + \cos \vartheta_3 \cos \vartheta_4}, \quad (35.4)$$

továbbá

$$\operatorname{tg}(\lambda_2^{(2)} + \lambda_3^{(2)}) = \frac{\cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \sin \lambda_3 + \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_2 \sin \lambda_2}{\sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \sin \lambda_2 \sin \lambda_3 - \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3}, \quad (35.5)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_3^{(2)}) = \frac{\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_3 \sin \lambda_3 + \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_1 \sin \lambda_1}{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_3 \sin \lambda_1 \sin \lambda_3 - \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_3}, \quad (35.6)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_4^{(2)}) = \frac{\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_4 \sin \lambda_4 + \cos \vartheta_4 \sin \vartheta_1 \sin \lambda_1}{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_4 \sin \lambda_1 \sin \lambda_4 - \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_4}, \quad (35.7)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_2^{(2)} + \lambda_4^{(2)}) = \frac{\cos \vartheta_2 \sin \vartheta_4 \sin \lambda_4 + \cos \vartheta_4 \sin \vartheta_2 \sin \lambda_2}{\sin \vartheta_2 \sin \vartheta_4 \sin \lambda_2 \sin \lambda_4 - \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_4}, \quad (35.8)$$

$j = 3$ -ra

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} - \lambda_2^{(3)} + \lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) \\ &= \frac{\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} - \lambda_2^{(3)}) + \operatorname{tg}(\lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(3)})}{1 - \operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} - \lambda_2^{(3)}) \operatorname{tg}(\lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(3)})}, \end{aligned} \quad (36.1)$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}(-\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)} + \lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) \\ &= \frac{-\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} - \lambda_2^{(3)}) + \operatorname{tg}(\lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(3)})}{1 + \operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} - \lambda_2^{(3)}) \operatorname{tg}(\lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(3)})}, \end{aligned} \quad (36.2)$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)} + \lambda_3^{(3)} - \lambda_4^{(3)}) \\ &= \frac{\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)}) + \operatorname{tg}(\lambda_3^{(3)} - \lambda_4^{(3)})}{1 - \operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)}) \operatorname{tg}(\lambda_3^{(3)} - \lambda_4^{(3)})}, \end{aligned} \quad (36.3)$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)} - \lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) \\ &= \frac{\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)}) - \operatorname{tg}(\lambda_3^{(3)} - \lambda_4^{(3)})}{1 + \operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)}) \operatorname{tg}(\lambda_3^{(3)} - \lambda_4^{(3)})}, \end{aligned} \quad (36.4)$$

ahol

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)}) = \frac{\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \cos \lambda_1 + \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \lambda_2}{\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \lambda_1 \cos \lambda_2}, \quad (37.1)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} - \lambda_2^{(3)}) = \frac{\cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \cos \lambda_1 - \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \lambda_2}{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 + \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}, \quad (37.2)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) = \frac{\sin \vartheta_3 \cos \vartheta_4 \cos \lambda_3 + \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_4 \cos \lambda_4}{\cos \vartheta_3 \cos \vartheta_4 - \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_4 \cos \lambda_3 \cos \lambda_4}, \quad (37.3)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_3^{(3)} - \lambda_4^{(3)}) = \frac{\cos \vartheta_4 \sin \vartheta_3 \cos \lambda_3 - \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_4 \cos \lambda_4}{\cos \vartheta_3 \cos \vartheta_4 + \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_4 \cos \lambda_3 \cos \lambda_4}, \quad (37.4)$$

továbbá

$$\operatorname{tg}(\lambda_2^{(3)} + \lambda_3^{(3)}) = \frac{\sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \cos \lambda_2 + \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos \lambda_3}{\cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3 - \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos \lambda_2 \cos \lambda_3}, \quad (37.5)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_3^{(3)}) = \frac{\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_3 \cos \lambda_1 + \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_3 \cos \lambda_3}{\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_3 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_3 \cos \lambda_1 \cos \lambda_3}, \quad (37.6)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) = \frac{\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_4 \cos \lambda_1 + \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_4 \cos \lambda_4}{\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_4 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_4 \cos \lambda_1 \cos \lambda_4}, \quad (37.7)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_2^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) = \frac{\sin \vartheta_2 \cos \vartheta_4 \cos \lambda_2 + \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_4 \cos \lambda_4}{\cos \vartheta_2 \cos \vartheta_4 - \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_4 \cos \lambda_2 \cos \lambda_4}, \quad (37.8)$$

Új változók

Umow (1904) nyomán legyenek

$$x = \frac{\cos \vartheta_1}{\sin \vartheta_1}, \quad y = \frac{\cos \vartheta_2}{\sin \vartheta_2}, \quad z = \frac{\cos \vartheta_3}{\sin \vartheta_3}, \quad \xi = \frac{\cos \vartheta_4}{\sin \vartheta_4}. \quad (38)$$

Tekintsük először a 4ω komponensre vonatkozó egyenleteket!

Emeljük négyzetre a (19), (21), (24) egyenleteket, és képezzük a

$$\left[\frac{A_4^{(2)}}{A_4^{(1)}} \right]^2 \quad \text{és} \quad \left[\frac{A_4^{(3)}}{A_4^{(1)}} \right]^2$$

hányadosokat! Az új változókkal a következő két egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} \left[\frac{A_4^{(2)}}{A_4^{(1)}} \right]^2 &= (x^2 + \sin^2 \lambda_1)(y^2 + \sin^2 \lambda_2) \\ &\quad \times (z^2 + \sin^2 \lambda_3)(\xi^2 + \sin^2 \lambda_4), \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{A_4^{(3)}}{A_4^{(1)}} \right]^2 &= (x^2 + \cos^2 \lambda_1)(y^2 + \cos^2 \lambda_2) \\ &\quad \times (z^2 + \cos^2 \lambda_3)(\xi^2 + \cos^2 \lambda_4). \end{aligned} \quad (40)$$

A (39) és (40) egyenletekben az m_4 változó már nem szerepel.

A (22) egyenlet (azaz a $\operatorname{tg}(\operatorname{La}_4^{(2)})$ kifejezés) számlálójának első tagja az új változókkal

$$\begin{aligned} a_1^{(2)} &= x \sin \lambda_2 \sin \lambda_3 \sin \lambda_4 - x z \xi \sin \lambda_2 \\ &\quad + y \sin \lambda_1 \sin \lambda_3 \sin \lambda_4 - y z \xi \sin \lambda_1, \end{aligned} \quad (41.1)$$

második tagja

$$\begin{aligned} a_2^{(2)} &= z \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 \sin \lambda_4 - x y z \sin \lambda_4 \\ &\quad + \xi \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 \sin \lambda_3 - x y \xi \sin \lambda_3, \end{aligned} \quad (41.2)$$

míg nevezőjének első tagja

$$\begin{aligned} b_1^{(2)} &= \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 \sin \lambda_3 \sin \lambda_4 - z \xi \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 \\ &\quad - x y \sin \lambda_3 \sin \lambda_4 + x y z \xi, \end{aligned} \quad (41.3)$$

második tagja pedig

$$\begin{aligned} b_2^{(2)} &= x z \sin \lambda_2 \sin \lambda_4 + x \xi \sin \lambda_2 \sin \lambda_3 \\ &\quad + y z \sin \lambda_1 \sin \lambda_4 + y \xi \sin \lambda_1 \sin \lambda_3, \end{aligned} \quad (41.4)$$

lesz. Így az új változókkal,

$$\operatorname{tg}(\operatorname{La}_4^{(2)}) = \frac{a_1^{(2)} + a_2^{(2)}}{b_1^{(2)} - b_2^{(2)}}. \quad (42)$$

A (25) egyenlet (azaz a $\operatorname{tg}(\operatorname{La}_4^{(3)})$ kifejezés) számlálójának első tagja az új változókkal

$$\begin{aligned} a_1^{(3)} &= y z \xi \cos \lambda_1 - y \cos \lambda_1 \cos \lambda_3 \cos \lambda_4 \\ &\quad + x z \xi \cos \lambda_2 - x \cos \lambda_2 \cos \lambda_3 \cos \lambda_4, \end{aligned} \quad (43.1)$$

második tagja

$$\begin{aligned} a_2^{(3)} &= x y \xi \cos \lambda_3 - \xi \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \cos \lambda_3 \\ &\quad + x y z \cos \lambda_4 - z \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \cos \lambda_4, \end{aligned} \quad (43.2)$$

míg nevezőjének első tagja

$$\begin{aligned} b_1^{(3)} &= x y z \xi - x y \cos \lambda_2 \cos \lambda_4 - z \xi \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \\ &\quad + \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \cos \lambda_3 \cos \lambda_4, \end{aligned} \quad (43.3)$$

második tagja pedig

$$\begin{aligned} b_2^{(3)} &= y \xi \cos \lambda_1 \cos \lambda_3 + y z \cos \lambda_1 \cos \lambda_4 \\ &\quad + x \xi \cos \lambda_2 \cos \lambda_3 + x z \cos \lambda_2 \cos \lambda_4 \end{aligned} \quad (43.4)$$

lesz. Így, az új változókkal

$$\operatorname{tg}(\operatorname{La}_4^{(3)}) = \frac{a_1^{(3)} + a_2^{(3)}}{b_1^{(3)} - b_2^{(3)}}. \quad (44)$$

A 2ω komponensre vonatkozó egyenletek a következőképpen alakulnak. A (38) képletekkel definiált változók bevezetését a (29)–(31) alatt felsorolt Q tényezők átírásával folytatjuk.

$$\prod_{i=1}^4 \sin \mathcal{Q}_i \text{-vel való osztás után}$$

$j = 1$ -re

$$Q_1^{(1)} = Q_2^{(1)} = Q_3^{(1)} = Q_4^{(1)} = 1, \quad (45.1-4)$$

$$Q_5^{(1)} = z\zeta, \quad (45.5)$$

$$Q_6^{(1)} = x\zeta, \quad (45.6)$$

$$Q_7^{(1)} = xy, \quad (45.7)$$

$$Q_8^{(1)} = y\zeta, \quad (45.8)$$

$$Q_9^{(1)} = yz, \quad (45.9)$$

$$Q_{10}^{(1)} = xz. \quad (45.10)$$

$j = 2$ -re

$$Q_1^{(2)} = \dots = Q_4^{(2)} = \left[(x^2 + \sin^2 \lambda_1)(y^2 + \sin^2 \lambda_2) \times (z^2 + \sin^2 \lambda_3)(\xi^2 + \sin^2 \lambda_4) \right]^{1/2} \quad (46.1-4)$$

$$Q_5^{(2)} = \left[(x^2 + \sin^2 \lambda_1)(y^2 + \sin^2 \lambda_2) \right]^{1/2} \cos \lambda_3 \cos \lambda_4, \quad (46.5)$$

$$Q_6^{(2)} = \cos \lambda_1 \left[(y^2 + \sin^2 \lambda_2)(z^2 + \sin^2 \lambda_3) \right]^{1/2} \cos \lambda_4, \quad (46.6)$$

$$Q_7^{(2)} = \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \left[(z^2 + \sin^2 \lambda_3)(\xi^2 + \sin^2 \lambda_4) \right]^{1/2}, \quad (46.7)$$

$$Q_8^{(2)} = \left[x^2 + \sin^2 \lambda_1 \right]^{1/2} \cos \lambda_2 \left[z^2 + \sin^2 \lambda_3 \right]^{1/2} \cos \lambda_4, \quad (46.8)$$

$$Q_9^{(2)} = \left[x^2 + \sin^2 \lambda_1 \right]^{1/2} \cos \lambda_2 \cos \lambda_3 \left[\xi^2 + \sin^2 \lambda_4 \right]^{1/2}, \quad (46.9)$$

$$Q_{10}^{(2)} = \cos \lambda_1 \left[y^2 + \sin^2 \lambda_2 \right]^{1/2} \cos \lambda_3 \left[\xi^2 + \sin^2 \lambda_4 \right]^{1/2}, \quad (46.10)$$

$j = 3$ -ra

$$Q_1^{(3)} = \dots = Q_4^{(3)} = \left[(x^2 + \cos^2 \lambda_1)(y^2 + \cos^2 \lambda_2) \times (z^2 + \cos^2 \lambda_3)(\xi^2 + \cos^2 \lambda_4) \right]^{1/2}, \quad (47.1-4)$$

$$Q_5^{(3)} = \left[(x^2 + \cos^2 \lambda_1)(y^2 + \cos^2 \lambda_2) \right]^{1/2} \sin \lambda_3 \sin \lambda_4, \quad (47.5)$$

$$Q_6^{(3)} = \sin \lambda_1 \left[(y^2 + \cos^2 \lambda_2)(z^2 + \cos^2 \lambda_3) \right]^{1/2} \sin \lambda_4, \quad (47.6)$$

$$Q_7^{(3)} = \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 \left[(z^2 + \cos^2 \lambda_3)(\xi^2 + \cos^2 \lambda_4) \right]^{1/2}, \quad (47.7)$$

$$Q_8^{(3)} = \left[x^2 + \cos^2 \lambda_1 \right]^{1/2} \sin \lambda_2 \left[z^2 + \cos^2 \lambda_3 \right]^{1/2} \sin \lambda_4, \quad (47.8)$$

$$Q_9^{(3)} = \left[x^2 + \cos^2 \lambda_1 \right]^{1/2} \sin \lambda_2 \sin \lambda_3 \left[\xi^2 + \cos^2 \lambda_4 \right]^{1/2}, \quad (47.9)$$

$$Q_{10}^{(3)} = \sin \lambda_1 \left[y^2 + \cos^2 \lambda_2 \right]^{1/2} \sin \lambda_3 \left[\xi^2 + \cos^2 \lambda_4 \right]^{1/2}. \quad (47.10)$$

A (35) egyenletekben szereplő függvények ($j = 2$) az új változókkal,

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)}) = \frac{x \sin \lambda_2 + y \sin \lambda_1}{\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 - xy}, \quad (48.1)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} - \lambda_2^{(2)}) = \frac{x \sin \lambda_2 - y \sin \lambda_1}{\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 + xy}, \quad (48.2)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)}) = \frac{z \sin \lambda_4 + \xi \sin \lambda_3}{\sin \lambda_3 \sin \lambda_4 - z\xi}, \quad (48.3)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_3^{(2)} - \lambda_4^{(2)}) = \frac{z \sin \lambda_4 - \xi \sin \lambda_3}{\sin \lambda_3 \sin \lambda_4 + z\xi}, \quad (48.4)$$

továbbá

$$\operatorname{tg}(\lambda_2^{(2)} + \lambda_3^{(2)}) = \frac{y \sin \lambda_3 + z \sin \lambda_2}{\sin \lambda_2 \sin \lambda_3 - yz}, \quad (48.5)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_3^{(2)}) = \frac{x \sin \lambda_3 + z \sin \lambda_1}{\sin \lambda_1 \sin \lambda_3 - xz}, \quad (48.6)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_4^{(2)}) = \frac{x \sin \lambda_4 + \xi \sin \lambda_1}{\sin \lambda_1 \sin \lambda_4 - x\xi}, \quad (48.7)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_2^{(2)} + \lambda_4^{(2)}) = \frac{y \sin \lambda_4 + \xi \sin \lambda_2}{\sin \lambda_2 \sin \lambda_4 - y\xi}, \quad (48.8)$$

Így, a (34) alatti függvények az új változókkal a következők lesznek:

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} - \lambda_2^{(2)} + \lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)}) = \frac{(x \sin \lambda_2 - y \sin \lambda_1)(\sin \lambda_3 \sin \lambda_4 - z\xi) + (\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 + xy)(z \sin \lambda_4 + \xi \sin \lambda_3)}{(\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 + xy)(\sin \lambda_3 \sin \lambda_4 - z\xi) - (x \sin \lambda_2 - y \sin \lambda_1)(z \sin \lambda_4 + \xi \sin \lambda_3)}, \quad (49.1)$$

$$\operatorname{tg}(-\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)} + \lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)}) = \frac{(y \sin \lambda_1 - x \sin \lambda_2)(\sin \lambda_3 \sin \lambda_4 - z\xi) + (z \sin \lambda_4 + \xi \sin \lambda_3)(\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 + xy)}{(\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 + xy)(\sin \lambda_3 \sin \lambda_4 - z\xi) + (x \sin \lambda_2 - y \sin \lambda_1)(z \sin \lambda_4 + \xi \sin \lambda_3)}, \quad (49.2)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)} + \lambda_3^{(2)} - \lambda_4^{(2)}) = \frac{(x \sin \lambda_2 + y \sin \lambda_1)(\sin \lambda_3 \sin \lambda_4 + z \xi) + (z \sin \lambda_4 - \xi \sin \lambda_3)(\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 - xy)}{(\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 - xy)(\sin \lambda_3 \sin \lambda_4 + z \xi) - (x \sin \lambda_2 + y \sin \lambda_1)(z \sin \lambda_4 - \xi \sin \lambda_3)}, \quad (49.3)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)} - \lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)}) = \frac{(x \sin \lambda_2 + y \sin \lambda_1)(\sin \lambda_3 \sin \lambda_4 + z \xi) - (z \sin \lambda_4 - \xi \sin \lambda_3)(\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 - xy)}{(\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 - xy)(\sin \lambda_3 \sin \lambda_4 + z \xi) + (x \sin \lambda_2 + y \sin \lambda_1)(z \sin \lambda_4 - \xi \sin \lambda_3)}. \quad (49.4)$$

A (37) egyenletekben szereplő függvények ($j = 3$) az új változókkal,

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)}) = \frac{x \cos \lambda_2 + y \cos \lambda_1}{xy - \cos \lambda_1 \cos \lambda_2}, \quad (50.1)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} - \lambda_2^{(3)}) = \frac{-x \cos \lambda_2 + y \cos \lambda_1}{xy + \cos \lambda_1 \cos \lambda_2}, \quad (50.2)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) = \frac{z \cos \lambda_4 + \xi \cos \lambda_3}{z \xi - \cos \lambda_3 \cos \lambda_4}, \quad (50.3)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_3^{(3)} - \lambda_4^{(3)}) = \frac{-z \cos \lambda_4 + \xi \cos \lambda_3}{z \xi + \cos \lambda_3 \cos \lambda_4}, \quad (50.4)$$

továbbá

$$\operatorname{tg}(\lambda_2^{(3)} + \lambda_3^{(3)}) = \frac{y \cos \lambda_3 + z \cos \lambda_2}{yz - \cos \lambda_2 \cos \lambda_3}, \quad (50.5)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_3^{(3)}) = \frac{x \cos \lambda_3 + z \cos \lambda_1}{xz - \cos \lambda_1 \cos \lambda_3}, \quad (50.6)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) = \frac{x \cos \lambda_4 + \xi \cos \lambda_1}{x \xi - \cos \lambda_1 \cos \lambda_4}, \quad (50.7)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_2^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) = \frac{y \cos \lambda_4 + \xi \cos \lambda_2}{y \xi - \cos \lambda_2 \cos \lambda_4}. \quad (50.8)$$

Így, a (36) alatti függvények új alakban a következők lesznek:

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} - \lambda_2^{(3)} + \lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) = \frac{(y \cos \lambda_1 - x \cos \lambda_2)(z \xi - \cos \lambda_3 \cos \lambda_4) + (\cos \lambda_1 \cos \lambda_2 + xy)(z \cos \lambda_4 + \xi \cos \lambda_3)}{(\cos \lambda_1 \cos \lambda_2 + xy)(z \xi - \cos \lambda_3 \cos \lambda_4) - (y \cos \lambda_1 - x \cos \lambda_2)(z \cos \lambda_4 + \xi \cos \lambda_3)}, \quad (51.1)$$

$$\operatorname{tg}(-\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)} + \lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) = \frac{(x \cos \lambda_2 - y \cos \lambda_1)(z \xi - \cos \lambda_3 \cos \lambda_4) + (z \cos \lambda_4 + \xi \cos \lambda_3)(\cos \lambda_1 \cos \lambda_2 + xy)}{(\cos \lambda_1 \cos \lambda_2 + xy)(z \xi - \cos \lambda_3 \cos \lambda_4) + (y \cos \lambda_1 - x \cos \lambda_2)(z \cos \lambda_4 + \xi \cos \lambda_3)}, \quad (51.2)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)} + \lambda_3^{(3)} - \lambda_4^{(3)}) = \frac{(x \cos \lambda_2 + y \cos \lambda_1)(\cos \lambda_3 \cos \lambda_4 + z \xi) + (\xi \cos \lambda_3 - z \cos \lambda_4)(xy - \cos \lambda_1 \cos \lambda_2)}{(xy - \cos \lambda_1 \cos \lambda_2)(\cos \lambda_3 \cos \lambda_4 + z \xi) - (x \cos \lambda_2 + y \cos \lambda_1)(\xi \cos \lambda_3 - z \cos \lambda_4)}, \quad (51.3)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)} - \lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) = \frac{(x \cos \lambda_2 + y \cos \lambda_1)(\cos \lambda_3 \cos \lambda_4 + z \xi) + (z \cos \lambda_4 - \xi \cos \lambda_3)(xy - \cos \lambda_1 \cos \lambda_2)}{(xy - \cos \lambda_1 \cos \lambda_2)(\cos \lambda_3 \cos \lambda_4 + z \xi) + (x \cos \lambda_2 + y \cos \lambda_1)(\xi \cos \lambda_3 - z \cos \lambda_4)}. \quad (51.4)$$

Tekintsük ezután az új változók bevezetésének hatását a 2ω komponens amplitúdó (27) és fázis (28) függvényeire!

A j -edik amplitúdó négyzete ($j = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} [A_2^{(j)}]^2 = K_2^2 m_4^2 \left\{ \left[\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(j)} S_k^{(j)} \right]^2 + \left[\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(j)} C_k^{(j)} \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (27')$$

Ezt osztva $[A_4^{(1)}]^2$ -tel, azaz (15) négyzetével, láthatóan szintén kiküszöböl m_4 -et és az új változók bevezetésével alakul a

$$\begin{aligned} \left[\frac{A_2^{(j)}}{A_4^{(1)}} \right]^2 = \frac{1}{(Z4)^2} \left\{ \left[\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(j)} S_k^{(j)} \right]^2 + \left[\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(j)} C_k^{(j)} \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (52)$$

képletre egyszerűsödik, amelyben most már a Q függvények nem a (29)–(31) hanem a (45)–(47) formulák szerint

veendők, továbbá az S és C függvények $j = 1$ esetén a (32) képletek szerinti, $j = 2$ és $j = 3$ esetben viszont a (33) azonosságok felhasználásával állítandók elő a (48)–(49), illetve az (50)–(51) formulákban foglaltak figyelembevételével. A 2ω komponens j -edik komponensének ($j = 1, 2, 3$) fázisszögére levezetett (28) egyenlet alakja:

$$\operatorname{tg}(L a_2^{(j)}) = \frac{\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(j)} S_k^{(j)}}{\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(j)} C_k^{(j)}} \quad (28), (53)$$

az új változók bevezetésével nem változik meg, azonban a Q , S és C függvények a fentiek szerint értendők.

Mérési eredmények

A fent levezetett egyenletek felhasználásával kiszámoltuk a minta mágnes (1. táblázat) spinner magnetométeres mérésének lehetséges eredményeit a bemeneti adatok sorrend-

3. táblázat Mérési eredmények a minta mágnes 4ω frekvenciájú komponensére a bemeneti (ϑ_i, λ_i) szögparaméterek tetszőleges sorrendje mellett. A zárójelbe tett $\text{La}_i^{(j)}$ értékek $(j = 1, 2, 3)$ a $\lambda_i^{(j)}$ -k pontos összegével egyenlők $(i = 1, 2, 3, 4)$. Jelölések mint a 2. táblázatban

Table 3 Measurement results for the 4ω frequency component of the sample magnet irrespective of order of the (ϑ_i, λ_i) input parameters. The values of $\text{La}_i^{(j)}$ $(j = 1, 2, 3)$ in brackets are equal to the sum of the $\lambda_i^{(j)}$ s $(i = 1, 2, 3, 4)$. Symbols are as in Table 2

$j = 1$		$j = 2$		$j = 3$	
$A_4^{(1)}$ (μV)	$\text{La}_4^{(1)}$ ($^\circ$)	$A_4^{(2)}/A_4^{(1)}$	$\text{La}_4^{(2)}$ ($^\circ$)	$A_4^{(3)}/A_4^{(1)}$	$\text{La}_4^{(3)}$ ($^\circ$)
113,311	-82,18 (-82,18)	2,277322	-24,57 (335,43)	3,014013	54,568 (54,568)

4. táblázat Mérési eredmények a minta mágnes 2ω frekvenciájú komponensére a bemeneti (ϑ_i, λ_i) szögparaméterek lehetséges sorrendjei (1.– 6. sor) mellett. Soronként a zárójelbe tett $\text{La}_2^{(j)}$ értékek $(j = 1, 2, 3)$ az első és a második helyen álló $\lambda_i^{(j)}$ -k pontos összegével egyenlők. Jelölések mint a 2. táblázatban

Table 4 Measurement results for the 2ω frequency component of the sample magnet with all possible orders of the (ϑ_i, λ_i) input parameters (rows 1– 6). In each row the values of $\text{La}_2^{(j)}$ $(j = 1, 2, 3)$ in brackets are equal to the sum of the $\lambda_i^{(j)}$ s being input at the first and the second place. Symbols are as in Table 2

$i = 1, 2, 3, 4$		$j = 1$		$j = 2$		$j = 3$	
		$A_2^{(1)}/A_4^{(1)}$	$\text{La}_2^{(1)}$ ($^\circ$)	$A_2^{(2)}/A_4^{(1)}$	$\text{La}_2^{(2)}$ ($^\circ$)	$A_2^{(3)}/A_4^{(1)}$	$\text{La}_2^{(3)}$ ($^\circ$)
1	1, 2, ., .	33,825	139,33 (-40,79)	132,870	234,521 (234,103)	79,583	-0,717 (-0,467)
2	1, 3, ., .	36,791	45,595 (45,83)	46,048	136,572 (137,616)	125,268	26,781 (26,656)
3	1, 4, ., .	10,054	-61,600 (-61,52)	5,593	158,863 (162,805)	157,379	-44,841 (-44,427)
4	2, 3, ., .	46,160	-20,805 (-20,66)	126,571	172,541 (172,623)	175,929	99,424 (98,995)
5	2, 4, ., .	54,091	232,142 (231,99)	38,440	198,324 (197,812)	38,823	207,466 (27,912)
6	3, 4, ., .	8,849	-41,838 (-41,39)	111,577	100,711 (101,325)	66,392	55,774 (55,035)

jének függvényében. A számítások a 4ω frekvenciájú komponensre a (39)–(44) egyenletek alapján, a 2ω frekvenciájú komponensre a (45)–(53) egyenletek alapján történtek (3. és 4. táblázat).

A 4. táblázatban minden soron belül még további három bemeneti sorrend lehetséges (pl. az 1. sorban 1, 2, 3, 4 mellett 1, 2, 4, 3 és 2, 1, 3, 4, illetve 2, 1, 4, 3), amelyek viszont mind az adott sorban feltüntetett eredményeket szolgáltatják. A legtöbb esetben itt is $\text{La}_2^{(j)} \approx \lambda_1^{(j)} + \lambda_2^{(j)}$, de a

$$\text{tg}(\text{La}_2^{(j)}) \approx \text{tg}(\lambda_1^{(j)} + \lambda_2^{(j)}), \quad (j = 1, 2, 3) \quad (54)$$

mindig fennáll az elsőnek és a másodiknak bevitt λ -k összegének tangensére.

Miután az $A_4^{(1)}$ -gyel való osztással m_4 -t az egyenletekből kiküszöböltük, egy ismeretlen paraméterekkel rendelkező (SDP) mágnes spinner magnetométeres mérésével öt db mérési eredményt kaphatunk a mágnes 4ω frekvenciájú komponensére (III. Táblázat) és hatot a 2ω frekvenciájú komponensre (4. táblázat valamelyik sora). Ezek az eredmények már csak a mágnes tengelyeinek (x, λ_1) , (y, λ_2) , (z, λ_3) , (ξ, λ_4) szögparamétereitől függenek és eredményeink szerint alkalmasak lehetnek azok meghatározására.

Kiértékelés

Tizenegy mérési eredményünk van nyolc ismeretlen kiszámítására. A (39) és (40), valamint a (42), (44) és (16) egyenletek a 4ω frekvenciájú komponensre, míg az (52) és (53) alatti három-három egyenlet a 2ω frekvenciájú komponensre képviseli. Vegyük mind a tizenegy egyenlet jobb és bal oldala különbségének négyzetét, majd ezek összegét, és keressük meg a kapott kifejezést minimalizáló paramétereket! A minimum feladat megoldásához szükség van a tengelyek bemeneti sorrendjének ismeretére (vö. 4. táblázat) és egy kezdeti (nulladik) megoldásra, ami külön számítás igényel. Feltéve, hogy a minimum feladat megoldható, akkor a (x', λ_1') , (y', λ_2') , (z', λ_3') , (ξ', λ_4') minimalizáló paraméterek azonosnak vehetők a mért mágnes keresett paramétereivel. Az itt felvázolt eljárás alkalmazása a fenti egyenletek továbbszámolásával megvalósítható, de hosszadalmas, terjedelmes kifejezések kezelését igényli, ami meghaladja ennek a dolgozatnak a kereteit.

Ehelyett tekintsük a következő, egyszerűsített és kevesebb megkötést előíró feladatot!

A nyolc ismeretlen meghatározásához minimálisan nyolc független mérési eredmény (3. és 4. táblázat) és ezek

5. táblázat A közelítő számítás eredményei a minta mágnes tengelyirányainak (λ , ϑ) szögparamétereire (négy adatpár) és m_4 momentumára a harmincadik iterációs lépés után, valamint előbbieik átlaga a táblázat végén, összehasonlítva a zárójelbe tett közelítő megoldással (λ_0 , ϑ_0).

Jelmagyarázat: Sorszám: utalás a 4. táblázat soraira. n az 1.–4. sorokhoz: a tabulált megoldás n -szer állt elő, vagyis minden sikeres esetben. n az 5. sorhoz: a közölt megoldás 3 kissé különböző adatok átlaga. n a 6. sorhoz: egy plusz két kissé különböző megoldás átlaga. A táblázat végén n : a sorátlagok száma, zárójelben a konvergáló megoldások száma. A továbbiak a (λ , ϑ) átlagok fokokban, k a pontossági paraméter, α_{95} (°) a konfidencia kör sugara (Fisher, 1953)

Table 5 Results of computation of the angular parameters (λ , ϑ) and moment (m_4) of the sample magnet (see text) for all possible orders of input parameters after the thirtieth step of iteration as well as the average of the computed angular parameters compared with the approximate solution (λ_0 , ϑ_0) in brackets at the end of the Table.
Further symbols: Sorszám: row number. n for rows 1–4: number of equal solutions. n for row 5: the tabulated value is the average of three like solutions. n for row 6: the tabulated value is the average of one plus two like solutions. n at the end of the Table: number of the averages over the rows of the angular parameters and of the convergent iterations in brackets. (λ , ϑ) are the averages of each of the four pairs of angular parameters. k and α_{95} (°): Fisher (1953) statistical parameters

Sorszám	N	λ (°)	ϑ (°)	$m_4 \cdot 10^{10} \text{Am}^5$	
1	3	193,85	36,51	1,0021 (3×)	
		305,48	50,33		
		32,25	67,37		
		106,24	28,05		
2	4	192,37	37,37	1,0039 (4×)	
		305,94	51,02		
		33,22	67,36		
		106,29	27,10		
3	3	189,60	35,04	0,9463 (3×)	
		307,40	52,08		
		32,02	65,25		
		108,80	29,12		
4	3	192,25	37,23	1,0032 (3×)	
		306,04	51,06		
		33,15	67,22		
		106,38	27,22		
5	3	193,25	36,74	1,0021 (2×)	
		305,91	50,56	0,9981 (1×)	
		32,57	67,10		
		106,09	27,87		
6	3	194,35	36,79	1,0023 (2×)	
		305,29	49,92	1,0007 (1×)	
		32,51	67,52		
		105,65	27,77		
		$\lambda/(\lambda_0)$	$\vartheta/(\vartheta_0)$	k	$\alpha_{95}(\text{°})$
1 – 6	6 (19)	192,60 (192,85)	36,62 (37,10)	2573	1,30
		305,99 (306,36)	50,83 (50,72)	8409	0,73
		32,61 (32,98)	66,97 (66,91)	8567	0,72
		106,57 (105,63)	27,86 (27,62)	4389	1,01

kapcsolatát az ismeretlenekkel leíró nyolc egyenlet szükséges. Az első és második a (39) és (40), valamint a (42), (44) és (16) egyenletek a 4ω frekvenciájú komponensre, míg az (52) vagy az (53) alatti három egyenlet a 2ω frekvenciájú komponensre képviseli. Utóbbi, két tíztagú összeg hányadosának tangense, amelynek értéke viszont kevéssel tér el az elsőnek és másodiknak bevitt λ -k összegének tangensétől. Ezért – első közelítés képpen – az (53) egyenlet helyett az (egyenlőségként felírt) (54) egyenleteket sorolhatjuk a nyolc megoldandó egyenlet közé és közelítő megoldásként a bemeneti szögparamétereket tekinthetjük. A kapott nyolcismeretlenes egyenletrendszer linearizáljuk és a szukcesszív approximáció módszerével megoldjuk.

A minta mágnes összes lehetséges mérési eredményére elvégezve a számításokat (3. és 4. táblázat), helyesnek tűnő (mindig az aktuális bemeneti szögparaméterekhez közeli konvergencia) megoldásokat kaptunk 19 esetben (5. táblázat), 5 esetben viszont nem. A 4. táblázat soraira utalva sikertelenek voltak (nem konvergáltak, vagy „elúsztak”) az $1/2$, 1 , 3 , 4 , $3/1$, 4 , 3 , 2 , $4/3$, 2 , 1 , 4 , $5/2$, 4 , 3 , 1 és $6/3$, 4 , 1 , 2 bemeneti sorrenddel végzett számítások.

A fenti közelítés kétféleképpen is finomítható, ha a megoldandó nyolc egyenletben a 4ω komponensre vonatkozó egyenletek mellett, a 2ω komponens *mért* fázisait (53), illetve amplitúdóit (52) szerepeltetjük az *egyenlősített* (54) helyett.

Általában azonban nem várható, hogy azok a megszorítások, amelyeket csupán nyolc egyenlet ír elő, helyes vagy azt közelítő megoldásra vezetnek.

A tanulmány szerzője

Márton Péter

Hivatkozások

- Fisher R. A. (1953): Dispersion on a sphere. Proc. R. Soc. London, Ser. A, 217. 295–305.
- James R. W. (1968): Multipole analysis: I. Theory, and geomagnetic multipoles 1965.0. Aust. J. Phys., 21, 455–464.
- Umow N. (1904): Die Construction des geomagnetischen Bildes des Gauss'schen Potentials, als Methode zur Erforschung der Gesetze des Erdmagnetismus. Terr. Magn. Atmos. Elect., 9, 105–1012.