

Elvek és modellek a rendszerek fejlődésében

Principle and Models for System Evolution

Principii și modele în evoluția sistemelor

Ing. SZÉL Alexandru

Bukaresti Műszaki Egyetem, Elektronika és Információ Technológia Kar
e-mail: szel.alexandru@yahoo.com

ABSTRACT

Introducing new definitions for system and its main systemic properties, new evolution preservation principles, composition laws for systems, speeds, impulses, inertia, etc. in n -dimensional space are stated. Also, new approximation calculus in non-linear equations and new relaxing solutions for specific differential equations are presented, together with critical points, expansion of the studies in other applications in physics, automatics, robotics, quantum mechanics, biology, astronomy, ecology, etc. The composition laws for speeds, impulses, inertias, relative variation in n -dimensional space, can be considered relativity's theory develop, easy applicable in the researchers' current activity, engineers, etc., having a strong integrator character of different scientific branches, promoting the idea of a future common methodology. The principle of total relative variation conservation is similar to the Hamilton's principle in the classic physics, and having a universal n -dimension expression is easily applicable in all applications, including engineering. The paper opens new horizons in scientific frontier research, sustaining the numerical methods development and also the tendency of information digitization, and of the researches methodological unification.

Keywords: system model; nonlinear; deterministic; dynamical; superposition; discrete.

ÖSSZEFOGLALÓ

A rendszerek és a fontosabb rendszertulajdonságok szemléltetésére bevezetünk új meghatározásokat, fejlődési elveket, a rendszerek, sebességek, impulzusok, tehetetlenségek, stb. összevonására vonatkozó törvényeket egy n -dimenziós térben. Új módszert mutatunk be a nemlineáris egyenletrendszerek megoldására, kifejezzük a differenciálegyenletek relaxációs megoldásait, a kritikus pontok feltételeit, kibővítjük a tanulmányt fizikai, automatizálási, robotikai, kvantummechanikai, biológiai, asztronómiai, ökológiai, stb. alkalmazásokra.

A sebesség, impulzus, tehetetlenség, relatív változás, stb. összevonása egy n -dimenziós térben, a relativitáselmélet fejlesztéseként is értelmezhető, a kutatók és mérnökök mindennapi tevékenységében alkalmazhatók, integráló szerepet töltvén be különböző tudományos ágak között, támogatván egy új kutatási módszertan ötletét. Az általános relatív változás megmaradási törvénye hasonlít a hamiltoni klasszikus elvre a fizikából, az egységes n -dimenziós formája könnyen alkalmazhatóvá teszi a fejlesztők számára. A kutatás új kilátást jelent a határtudományok területén, támogatván a numerikus módszerek fejlesztését és a diszkrét információs alkalmazások elterjedését, a kutatási módszertanok egyesítését.

1. A KUTATÁS CÉLJAI, FONTOSSÁGA, ÚJSZERŰSÉGE

Új alapokra helyezni a rendszerek tanulmányozását, új elvekkel, törvényekkel, módszerekkel, ismeretekkel, a mindennapi szakmunka és a határtudományok (alapkutatás) bővítése céljából. Az új rendszermodell eszköz lehet a tervezők és kutatók számára.

2. MODELLEK, MEGHATÁROZÁSOK, ELVEK, TULAJDONSÁGOK AZ N -DIMENZIÓS TÉRBEN

A rendszerek matematikailag szigorúan meghatározhatók, ha a fejlődési törvények mellett ismertek az input/output törvények is [4],[5],[6],[7].

A gyakorlatban a véges terjedelmű fizikai rendszereket legtöbbször egyenletek, egyenletrendszerek, azonosságok formájában modellezik. A rendszerleírást egy

$S(x_1, \dots, x_n) \subseteq \mathcal{R}^n$ metrikus térben az

$$F_j(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \quad (j = 1, \dots, m) \quad (1.1.)$$

nemlineáris egyenletrendszerrel vázoljuk.

A változás elemei több formában (tér, információ, energia, tömeg, stb.) jelenhetnek meg.

A természetes rendszerekben bizonyos feltételek mellett a változás (tér, információ, stb.) energiává, az energia tömeggé változhat. Az átalakulások mindkét irányba lehetségesek.

Egy $V(x_1, \dots, x_n)$ hiperűrtartalomtól kiindulva meghatározhatjuk a relatív változás operátorát [1]:

$$\Omega(V) = dV/V = \sum_{i=1}^n a_i (dx_i / x_i) = \sum_{i=1}^n a_i \omega_i \quad \omega(V) = \sum_{i=1}^n (dx_i / x_i) = \sum_{i=1}^n (\omega_i)$$

A klaszikus rendszerek esetében a hiperűrtartalom jelentheti a rendszer T átviteli függvényét:

$$\Omega(V) = \Omega(T) = dT/T = \Omega(Y) - \Omega(X) \quad \text{ahol az } Y \text{ a bemenetek, az esetleges célfüggvények változóit,}$$

valamint az X a kimenetek, zavarójelek változóit jelentik.

Más változó felosztások esetében (állapotok, zavaró jelek, parancsok stb.) a fenti kifejezés bővíthető (a pozitív tagok kimenet vagy célfüggvény jellegűek, valamint a negatív tagok bemenet vagy zavarójel stb. jellegűek).

Egyes rendszerek esetében a hiperűrtartalom sajátos formát ölthet:

$$V = K \prod_i x_i^{p_i}, \text{ a } p_i \text{ hatványok, súlyozó vagy dimenziós kitevők, stb.}$$

A szakirodalomban az $\Omega(V)$ függvényében a rendszerek osztályozhatók: konzervatív (hamiltoni) rendszerekre, amikor $\Omega(V) = 0$, valamint diszipatív rendszerekre, ha $\Omega(V) < 0$ [8].

A szpecifikus a_i értékek egy konkrét (1.1.) rendszer esetében $a_i = x_i \sum_j (1/F_j) \cdot (\partial F_j / \partial x_i)$ általános formát öltenek.

Ha a kölcsönhatások törvényeit kibővítjük a környezettel való kapcsolatok leírásával, definiálhatunk egy **komplett (teljes) rendszermodellt**. Ilyen esetekben elképzelhető egy objektumorientált komplett (teljes), látszólag izolált rendszermodell, amely tartalmazza az bemeneti/kimeneti jelenségek effektusait is.

Ha az (1.1.) rendszer megfelel a

$$F_j(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = c_j \quad (j = 1, \dots, m)$$

és $\Omega(V) = 0$ (egyedi dx_i/x_i elemek)

feltételeknek, akkor egy komplett rendszert képez.

Ez a – látszólag zárt rendszer – [8] hasonlít az informatikából ismeretes objektívorientált rendszerekre, tartalmazza a külső világ hatásait.

A komplett rendszernek különös tulajdonságai vannak, például nem érzékeny a külső zavaró jelekre, hullámzó tulajdonságai vannak, felértékelődnek az okozati tényezők, az összhatás és egyensúly mellett ezen rendszerek esetében, működési törvényeik az aszimptotikus határterületeken is érvényesek, stb. Komplett rendszermodell formát kaphatunk például, ha a rendszerösszefüggéseket azonosság formájába adjuk meg. Példaképpen a fizikából ismert $\lambda = \Omega T$ összefüggésből megkaphatjuk az $E = (\Omega T / \lambda) \equiv 1$ és a $d\Omega / \Omega + dT / T - d\lambda / \lambda \equiv 0$ formát, ahol a λ a hullámhossz, az Ω a szögsebesség, T a periódus.

A relaxációs állapot. A rendszerek egyik határállapota a relaxációs állapot, ahol a nagy entrópia miatt a túl kicsi vagy túl nagy energiák esetében a komponensek függetlensége/azonos valószínűsége a domináns, és ellenőrizni kell a működési törvények érvényességét. Bizonyítható, hogy egy (1.1.) rendszer távoli relaxációs állapota (amely felé aszimptotikusan tart a szabad evolúciója, ha nem is éri el mindenképpen ezt az állapotot) megkapható a következő egyenletrendszerrel:

$$\Omega(V) \longrightarrow \omega(V), \quad a_i = x_i \sum_j (1/F_j) \cdot (\partial F_j / \partial x_i) = \pm 1$$

E rendszer megoldása megadhatja a végleges relaxációs állapotot, valamint a szükséges relaxációs időt. Felismerhető, hogy a differenciálegyenletek egyszerű műveletekkel átalakíthatóak $\Omega(V)$ formára, majd összehasonlítva az $\omega(V)$ formával, direkt módon megkaphatók az a_i kifejezések. Így az egyedi differenciálegyenleteknél egyszerűbben kiszámíthatók a relaxációs értékek. Például, a klasszikus térbeli hőtágulás törvénye maximum $2V_0$ értékig érvényes.

Hasonlóképpen a Schrödinger egyenletből kiindulva meghatározhatók egy gyenge összehatású rendszer relaxációs (aszimptotikus) energiaszintjei: $\lambda \cdot h = 1$.

Bizonyos folyékony struktúrájú, kis energiaszintű rendszereknél lehetséges, hogy a relaxációs pont még a működési tartomány része.

Kritikus (egyensúly) pontok. A lineáris rendszerelmélet sajátérték koncepciójához hasonlóan, a nemlineáris rendszereknél bevezetjük a kritikus pontokat, mint azokat a pontokat, ahol a relatív változás egésze számú értéket eredményez: $(dx_i / x_i) = p_i \approx (\pm 1)^k, k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Ezek a pontok segítenek a rendszer vonzási pontjai (attractor) keresésében. Egy rendszernek több kritikus pontja lehet. A mai gyakorlatban csak a 0-s értékű pontot értékelik, egyes szerzők a kritikus pontokat helyi egyensúlypontoknak nevezik.

A rendszerek az evolúciójuk során több kritikus pontot is elérhetnek. A kritikus pontok között a hullámzó tulajdonságok a jellemzőbbek (nagy sebességgel), míg a kritikus pontok körül csökkennek a sebességek, az anyagi tulajdonságok válnak fontosabbá.

Mivel a hullámzó viselkedések nagyobb sebességűek (kisebb időközökkel), az evolúció ugrásszerűnek tűnik a kritikus pontok között. Két vagy több rendszer összehatása esetén az evolúció egy vagy több (új) kritikus pont felé halad a tehetetlenség növelése irányába, esetenként inaktív potenciális energiákat hozván létre a kritikus pontokban:

$$\left\{ \frac{\Delta \lambda_i}{\lambda_i} \right\} \Rightarrow \frac{\Delta \Lambda}{\Lambda} = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Például, két rendszer esetében } \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = -\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \Rightarrow (-k), k \in \mathbb{Z}$$

A kritikus pontok közötti evolúció csak bizonyos energiaküszöbök $\Delta E = h \cdot \nu$ elérésével lehetséges.

Ezek szerint a komplex rendszereknél a mozgó komponenseken kívül léteznek nemfunkcionális (inerciális) komponensek és funkcionális komponensek is. A változó hullámhossz ($\Delta \lambda_i$) eredmények sebességváltozásokat okoznak. Lehet, hogy a fényforrások sikeres szuperpozíciója fénymotorok lehetőségeit rejti magukban?

A kapcsolati összefüggés

Mint egy kapcsolati összefüggést a klasszikus és javasolt modellek között (a relativista modellek esetében is) megnevezhetjük például a HUBLE törvényt az asztronómiából:

$v = c \cdot (d\lambda_i / \lambda_i)$ és általánosítva

$x_i = n \cdot \lambda_i$ ha $\lambda_i < x_i$ és

$\lambda_i = k \cdot x_i$ ha $x_i < \lambda_i$ $i = 1, n$

Végül megkapjuk a

$$v = c \cdot [\Omega(\mathcal{V}) \pm \Omega(r)] = c \cdot [\omega(V) \pm \omega(r)], a > = \sum b_i v_i$$

kifejezést, ahol v sebesség, c a fény sebessége a légüres térben, valamint a λ_i a hullámhossz.

A fenti összefüggés kifejezi a sebességek összevonását az n -dimenziós térben, valamint a rendszer összefüggései korrekt megfogalmazása esetén a külvilág hatásait is bevonva, amikor a rendszer nem mozog, tehát $v = 0$, beszélhetünk az összsebesség konzerválásáról is. Ha a rendszer nincs jól definiálva, a globális sebesség nem nulla (a rendszer vagy az éter mozog). Az $\omega(r)$, és $\Omega(r)$ értékek a vonatkoztatási rendszer változásai (a fenti példában az n és k függvényei). Az $x_i < \lambda_i$ tagok pozitívak, valamint az $x_i > \lambda_i$ tagok negatívak. Az $\omega(r) = 0$ feltétel $x_i = \lambda_i$ egyenlőséget jelent. Az a_i kifejezés fennebb határoztuk meg. Az eredmény kifejezi az x_i elemek sebességeinek interakcióját, a fizikai jelentőségüktől függetlenül. Egy másik kapcsolatot a rendszer átviteli függvénye képezhet a fenti kifejezések szerint.

Ha $(dx_i/x_i) \ll p_i$, (dx_i/x_i) a mozgás mértéke, $p_i - (dx_i/x_i)$ a tehetetlenség mértéke lehet a p_i kritikus pont körül. Az interakció mértéke a mozgás és a tehetetlenség szorzata:

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i(dx_i/x_i) \cdot (p_j - a_j(dx_j/x_j)) \text{ vagyis, } S = [P \cdot \Omega(V) - (\Omega(V))^2]$$

ahol p_j értékek a j változók kritikus pontjainak az értékei.

Ezek után bevezetjük a megvalósíthatóság feltételét:

Egy komplett rendszer fizikailag megvalósítható, ha bármely véges időtartalomra véges összhatással rendelkezik: $S < \text{const}$.

A relatív impulzus kifejezése a következő:

$$H = v \cdot [P - (\Omega(V) \pm \Omega(r))] = c \cdot \left[[\Omega(V) \pm \Omega(r)] \cdot P - [\Omega(V) \pm \Omega(r)]^2 \right]$$

Hasonlóképpen kifejezhetők új összefüggések a nyomás, sűrűség, hővezetőség, stb. esetére.

Több szempontból is fontos lehet a tehetetlenség összevonása:

$$\Omega(V) = dV/V = \sum_{i=1}^n a_i(dx_i/x_i) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \omega_i \quad \omega(V) = \sum_{i=1}^n (dx_i/x_i) = \sum_{i=1}^n (\omega_i) \quad P = \sum_{i=1}^n (p_i)$$

$$I = P - \Omega = \sum (p_i - a_i \omega_i) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i + \Omega_i) \Rightarrow \Omega = P - 1 + \prod_{i=1}^n (1 - p_i + \Omega_i)$$

A kifejezés az első fokú hibák összevonási törvényére utalható vissza a hibák elmélete szerint.

Ezek szerint kifejeztük a relatív változások szuperpozícióját, vagyis az alrendszerek szuperpozícióját is.

Az Einsteini energia-tömeg összefüggés a fenti eredmény szerint kifejezhető a következőképpen:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = c^2 \cdot (P - \Omega) = c^2 \cdot \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i + \Omega_i) \right)$$

A relatív összváltozás megmaradási elve.

A rendszerek esetében kijelenthető a **minimum relatív összváltozás elve**, amely kifejezi a különböző fizikai jelentőségű változók közötti relatív változáscsere lehetőségét az összváltozás állandó vagy minimum szinten tartásával (a mellékletben magyarázzuk például a levitációt)

$$\sum_{j=1}^p S = \sum_{j=1}^p \left[P \cdot \Omega(V) - (\Omega(V))^2 \right] = \text{MIN/CONST}$$

A kifejezés a fizikából ismeretes Hamilton-féle variációs elvre emlékeztet, de ennél az egyedi formája miatt is könnyebben alkalmazható. A minimizálás megoldható akár diszkrét formában is, például a dinamikus programozás segítségével.

Az alkalmazkodás

A lassan változó elemeket kemény elemeknek nevezzük. Ahhoz, hogy a rendszer alkalmazkodni tudjon a puha (gyorsan változó) elemekhez, szükséges, hogy tartalmazzon megfelelő mennyiségben, gyorsabban változó, instabilabb puha elemeket, azaz szükséges, hogy

$$\sum_{j=1}^p \frac{dx_j}{x_j} \geq \sum_{i=p+1}^n \frac{dx_i}{x_i}$$

ahol p a puha elemek gradienseinek a száma.

A puha elemek függvényében a Boltzmann szerinti entrópia-képlet kifejezhető a következő alakban:

$$S = K_B \ln \left(\sum_{j=1}^p \frac{dx_j}{x_j} / \sum_{i=1}^n \frac{dx_i}{x_i} \right)$$

Az evolúció megmaradási törvény

A fizikából ismert Newton-féle tehetetlenségi törvény általánosításával definiáljuk az evolúció megmaradási törvényt összehatások alatt is: egy rendszer megtartja a folytonos evolúcióját, ha folytonosan megtartja az evolúciós görbe formáját. Mondhatnánk például, hogy a rendszer evolúciója illeszkedik az evolúciós görbéhez, ha a rendszer múltja jelene és jövője a görbén található. A rendszer evolúciója változhat akár a rendszer belső működéséből, akár a külvilág (médium) anizotrópikus változásaiból kifolyólag. A külvilág változásait figyelmen kívül hagyva, az evolúció megmaradási törvényével kapcsolatban nem lehet csak *szükséges feltételeket* megfogalmazni. Az *elégéses feltételek* megfogalmazásához a modellbe be kell vonni a külvilág esetleges változásait is. Ez egy komplett rendszermodell esetében lehetségessé válik, ha a külső változók törvénye ismeretes. A szükséges feltételek közé sorolhatók például:

- ha a rendszer megőrzi az evolúciós egyenletek formáját;
- ha megfelel egy invariáns kifejezésnek, amely tartalmazza a görbe legalább három egymásutáni általános pontját, stb.

Hasonlóképpen a térgörbület fogalmához a fizikából (a relativitási elveket is beleértve) bevezethetünk egy invariáns típusú kifejezést az **evolúciós görbén való maradás elemzésére**, például:

$I(k) = 1$ állandó, lineáris evolúció az eredeti görbén (a görbe minden k pontján),

$I(k) = \text{const} \neq 1$ állandó, nemlineáris evolúció állandó görbülettel,

$I(k) \neq I(k-1)$ változó, a k nem folytonos pont.

Egy ilyen kifejezés mértéke lehet a fenntartható fejlődés elemzésének.

A stabilitás feltétele

Ha a hiperűrtartalom $V > 0$ és $\omega(r) \leq 0$, a rendszer stabil (Ljapunov szerint) [6]. Tehát a $V > 0$ és $\omega(r) \leq 0$ feltételeket alkalmazhatjuk a rendszerek stabilitásának elemzésére. Ismerjük fel, hogy e módon elemezhetjük a stabilitást az evolúció-törvény ismerete nélkül, csak a mért vagy látott változók alapján.

A differenciálegyenletek elméletének megfelelően, **a rendszer szimmetrikus**, ha kielégíti a következő feltételt:

$$(dx_1 / x_1) = (dx_2 / x_2) = \dots = (dx_n / x_n)$$

A szimmetrikus rendszerek kritikus pontjaira felírható:

$$\prod \frac{\Delta \lambda_i}{\lambda_i} = k \text{ egész szám. Ez a termodinamikában a } \{\mathbf{P}, \mathbf{V}, \mathbf{T}\} \text{ térben ismeretes kifejezés.}$$

A **szinkronikus evolúció** feltétele, hogy a különböző (dx_i / x_i) elemek hasonló fontossággal (valószínűséggel) bírjanak, vagyis eleget tegyenek egy $\sum \alpha_i (dx_i / x_i) = \text{const}$ kifejezésnek az $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$ feltételek mellett.

A struktúra, láthatóság

A világegyetemben minden változik. A változások mértékétől és a megfigyelők „felbontási” lehetőségeitől függ, hogy mi az, ami struktúra és mi az, ami változás. Ezek szerint:

Az x_i változó a rendszer szerkezeti (strukturális) eleme, ha teljesül a következő feltétel:

$$\max \left(\frac{dx_i}{x_i} \right) \leq C_0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

ahol C_0 egy megfigyelői állandó, amely olyan szint, amelyet a megfigyelő még képes változásként érzékelni. A rendszer szerkezetét azok az x_i elemek építik fel, amelyek megfelelnek a fenti feltételnek, és explicit formában megjelennek a rendszer leírási modelljében.

Az előző meghatározáshoz hasonlóan határozzuk meg a változás láthatóságát is:

Az x_i rendszerelem változása látható, ha

$$\min \left(\frac{dx_i}{x_i} \right) \geq C_m \quad \max \left(\frac{dx_i}{x_i} \right) \leq C_M$$

és ahol C_m és C_M függenek a megfigyelői képességektől. Általában $C_0 \leq C_M$, de a látható tartomány tartalmazhat strukturális és változó elemeket is, vagyis mindent ami a fenti tartományba tartozik.

Spektrális értelmezések

Nyilvánvaló, hogy bizonyos kommunikációs rendszerekben nagyon gyenge jelek esetén, a relatív kifejezések használata ajánlatos, például egy $\sim 10^{-12}$ m nagyságrendű x jel és $dx \sim 10^{-14}$ m esetén már csak a jel felismerése is könnyebb a jel

$$\frac{dx_i}{x_i} \quad (\sim 10^{-2} \text{ m}) \text{ formában való feldolgozásával.}$$

A spektrális változók segítségével osztályozhatjuk a folyamatok állapotát ($i = 1, n$):

$$\text{mod}\left(\frac{dx_i}{x_i}\right) \ll 1 \quad \text{inerciális állapotú folyamatok,}$$

$$\text{mod}\left(\frac{dx_i}{x_i}\right) \approx 0,1, 2, 3, \dots \text{ (egész szám) – kritikus állapotú folyamatok,}$$

$$\text{mod}\left(\frac{dx_i}{x_i}\right) > 1 \quad \text{gerjedő, hullámzó, robbanó, katasztrófa állapotok.}$$

A RENDSZERMODELL EGY MEGOLDÁSA

Ismervén az operációkutatás, különösen az optimalizálási módszerek és speciálisan a korlátok nélküli optimalizálási módszerek lehetőségeit [12], egy (1.1.) típusú nemlineáris rendszer megoldása könnyebben megvalósítható, megkeresvén egy

$$G_j = F_j(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) - c_j = 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad \text{típusú ekvivalens rendszer megoldását}$$
$$\min \left(\Phi = \sum_{j=1}^m G_j^2(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \right)$$

formában, egy ismert számítógépes módszer segítségével (például az n -dimenziós szimplex módszerével) [1], [10].

Egy nemlineáris egyenletrendszer megoldása egy funkcionál minimalizálása révén, a módszer általánossága mellett előnyös abból a szempontból is, hogy gyakorlatilag nincs megkötés a kifejezések és a változók száma között, szükség szerint bevezethetők új kifejezések és változók (például egy nemlineáris differenciálegyenlet kicserélése esetén egy lineáris egyenletrendszerre).

Ha a minimizálandó funkcionálba beépítünk egy célfüggvényt, optimális megoldást kapunk.

A módszert kombinálva a relaxációs elvvel és az evolúciós egyenletek új dinamikus sorozatokkal való leképezésével, megoldhatóvá válnak bizonyos variációs problémák is.

Az szakirodalomban [3] ismertek egyes módszerek a (1.1.) típusú nemlineáris differenciálegyenletek lineáris formára való levezetésére.

A funkcionál minimalizálása kombinálva az n -dimenziós szimplex módszerével különösen ajánlatos, mivel a függvényekkel kapcsolatban nincsenek folytonossági és deriválhatósági elvárások, amelyek legtöbb esetben lokális optimumot eredményeznek.

A alábbiakban egy példát mutatunk be a módszer alkalmazására.

A fenti tárgyalt problémák estében nem volt szükségünk a tömeg fogalmára. Egy sor más probléma bemutatása egy következő cikk témaköre lehet.

3. ALKALMAZÁSOK

3.1. A komplett rendszermodell megoldása

A következőkben bemutatunk egy módszert a nemlineáris egyenletrendszerek numerikus megoldására.

Legyen adott egy nemlineáris egyenletrendszer:

$$F_j(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$$

$$(j=1, \dots, m) \quad (3.1.)$$

Felépítünk az egyenletrendszerrel (a megoldás szempontjából) egyenértékű problémát:
Számítsuk ki az $x_1, \dots, x_n$ értékeket, amelyek biztosítják a Φ funkcionál minimumát:

$$\min \left(\Phi = \sum_{j=1}^m F_j^2(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \right) \quad 3.2.$$

Ahol az F_j függvények (3.1). formájúak. Megfigyeljük, hogy a (3.1) rendszer $x_1, \dots, x_n$ megoldása biztosítja ugyanakkor a (3.2) funkcionális minimumát is, és ez fordítva is igaz. Ezek szerint a nemlineáris egyenletrendszerek megoldása helyettesíthető egyetlen funkcionál korlátok nélküli minimalizálásának a problémájával. Az utóbbi probléma megoldása sokkal könnyebb az ismert, korlátok nélküli optimalizálási módszerek segítségével, például: az egyirányú változások módszere; a Box-módszer; a Hooke-Jeeves (pattern search)-módszer; a Rosenbrock-módszer; a gradiens típusú módszerek; a Newton-Raphson típusú módszerek; a kontrakciós módszerek, stb.

A Box-módszer (a szakirodalomban több néven is ismert: Spandley- vagy Hex-módszer, vagy az n -dimenziós szimplex módszere) [10]. Az n -dimenziós térben felépítünk egy $n+1$ csúccsal rendelkező szabályos csúcsok közötti egyenlő távolságú, szimplexnek nevezett alakzatot (például a háromdimenziós térben egy tetraédert stb.). Kiszámítjuk a Φ értékét a szimplex csúcaiban. A legnagyobb értéknek megfelelő csúcsot kicseréljük sorozatosan egy ellenkező irányú, ezzel szimmetrikus ponttal, egy új szimplexet alkotván. Ismételve a módszert, átugorjuk a már kiválasztott csúcsokat, szükség szerint a pontosítás céljából csökkentjük a szimplex oldalainak a méretét, és megkapjuk a megfelelő értékű csúcsot. A szakirodalomban megtalálhatók az n -dimenziós szimplex csúcsait és az új csúcs kiválasztását szolgáló kifejezések. A modell megoldásának lépései a következők:

- beolvassuk a változók számát (n), az n -dimenziós szimplex oldalainak kezdő méretét (a), a hibaküszöböt Φ becslésére (ϵ), a maximális iterációk számát (t)
- felépítjük a kezdő szimplex $V_1, \dots, V_i, \dots, V_{n+1}$ csúcsait a következőképpen:

$$V_i = V_i(x_i^1, \dots, x_i^j, \dots, x_i^n) \quad (3.3.)$$

ahol

$$p = \frac{a}{n\sqrt{2}}(n-1+\sqrt{n+1}) \quad x_i^j = \begin{cases} 0 & \text{ha } i=1 \\ q & \text{ha } i+1 \neq j, i > 1 \\ p & \text{ha } i+1 = j, i > 1 \end{cases}$$

$$q = \frac{a}{n\sqrt{2}}(-1+\sqrt{n+1})$$

- kiszámítjuk a Φ értékét a szimplex minden csúcsában,
- kiválasztjuk a Φ legrosszabb (legnagyobb), még ki nem választott pontbeli értékét és megjegyezzük a megfelelő csúcsot
- kiszámítjuk az új szimmetrikus csúcsot a legrosszabb helyett (ez a legrosszabb csúcs képe lesz a többi csúcs tükrében), felhasználva a (3.4) képletet:

$$x_i^N = \left[\frac{2}{n} \left(\sum_{j=1}^{n+1} x_i^j - x_i^R \right) \right] - x_i^R \quad (i=1, \dots, n) \quad (3.4)$$

- ismételjük az algoritmust a 3. ponttól mindaddig, amíg valamely csúcsban $\Phi \leq \epsilon$ vagy az iterációk száma elérte a megadott t értéket,
- kiírjuk a csúcs koordinátáit, az elért Φ értéket, az elért iterációk számát, az ϵ, t, a értékeit.

Ha a megközelítés nem elfogadható, csökkentjük a szimplex a oldalának a méretét, és tovább folytatjuk a becslést a 3. ponttól kezdődően. A kiválasztott csúcsokat megjelöljük, és újra nem választjuk ki, szükségszerűen választván egy kevésbé rossz Φ értéknek megfelelő pontot.

Ismeretes, hogy a legtöbb egyenletrendszer-megoldó algoritmus igényli az egyenletek és a változók számának egyenlőségét. Ebből a szempontból a javasolt algoritmus használható akkor is, ha a változók száma különbözik az egyenletek számától és a modell ellentmondásmentes. Ha az egyenletrendszernek több megoldása is van, akkor a megadott algoritmus kiválasztja az egyiket. A gyakorlatban a több megoldásos egyenletrendszerek esetében legtöbbször szükségeszerű egy új kritérium (célfüggvény) bevitele, ami viszont a problémát az optimális rendszerek problémakörébe utalja át.

NUMERIKUS SZIMULÁCIÓ

A bemutatásban felhasználjuk a Kolozsvári Sapiientia Egyetem támogatásával 2004-ben végzett kutatási eredményt. Egy nemlineáris áramkör megoldását vázoltuk fel, a következő egyenletrendszerekből kiindulva:

$$\begin{cases} 4x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y - 5 = 0 \\ 3x^3 + y^2 + x - 9 = 0 \end{cases} \quad (3.2.1.)$$

Felépítjük a (3.2) funkcionált:

$$\begin{aligned} \Phi &= F_1^2(x, y) + F_2^2(x, y) = \\ &= [4x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y - 5]^2 + [3x^3 + y^2 + x - 9]^2 \end{aligned} \quad (3.2.2.)$$

A funkcionál minimalizálása céljából (ami egyenértékű az egyenletrendszer megoldásával) a Box-módszert használtuk a (0, 0) pontból kiindulva. A részeredmények a következő táblázatban találhatóak.

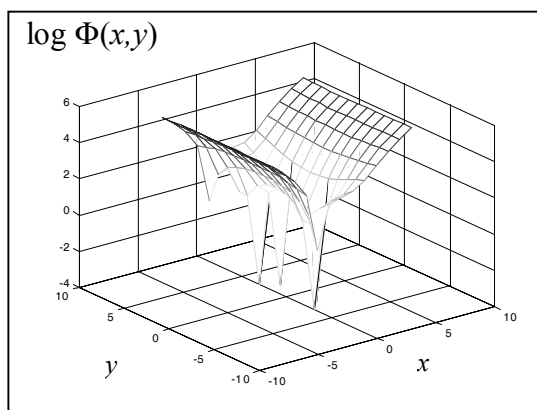
A szimuláció lépései:

1. sz. táblázat.

Iteráció	X	Y	Φ
$a = 2$	$p = 0,5174$	$q = 0,9314$	
1	0,0000	0,0000	106,000
2	0,5174	1,9314	617,781
3	1,9315	0,5174	48,840
4	-1,4140	1,4140	1488,000
5	1,9314	0,5174	617,781
$a = 0,1$	$p = 0,0965$	$q = 0,0258$	
1	0,5174	1,9314	48,840
2	0,6139	1,9572	672,117
3	0,5432	2,1279	48,140
4	0,4467	2,0021	60,460
5	0,6139	1,9572	37,680
6	0,6398	2,0538	36,137
7	0,7105	1,9831	26,774
8	0,7364	2,0797	24,699
9	0,8081	2,0090	16,475
10	0,8339	2,1056	14,277
11	0,9056	2,0349	7,711
12	0,9315	2,1316	5,924
13	1,0032	2,0609	1,712
14	1,0291	2,1578	1,023
15	1,1008	2,0871	0,227

Indulásként az $a = 2$ oldalú szimplexszel dolgoztunk, de mivel az eredmény már az 5. csúcsban ismétlődött, szükségeszerű volt az algoritmust a 3. csúcsból folytatni kisebb ($a = 0,1$) oldalú szimplexszel. Már a 15. iteráció után megkaptuk az $x = 1,1008$ és $y = 2,0871$ megoldást, amely csak egy kisebb a értékkel lenne tovább pontosítható. A Φ függvény grafikonján látható, hogy ez az értékpár a minimalizálási probléma egyik

megoldása. A Φ funkcionál minimalizálását ellenőrzésképpen megoldottuk a MATLAB programcsomag alapértelmezett algoritmusával is, amely 154 iteráció után adta meg az $x = 1,0831$ és $y = 2,0260$ eredményt.



1. ábra
A funkcionál grafikus ábrázolása

3.2. Példa a relaxációra

$$\omega = \frac{dV}{V} = \sum_{i=1}^n \frac{dx_i}{x_i} = \text{const.}$$

$$\omega_R = \frac{dV}{V} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \frac{dx_i}{x_i} = \text{const.} \Rightarrow \varepsilon_i = \pm 1$$

A harmonikus mozgás relaxációi

$$J\varepsilon'' + 2D\varepsilon' + t\varepsilon = M$$

$$J \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} + t \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{M}{\varepsilon'} - 2D \Rightarrow$$

$$J = t = \frac{M}{\varepsilon'} - 2D$$

Termodinamikai rendszer relaxációja

$$dq = du + dw$$

$$\frac{dq}{q} = \frac{du}{u} \frac{u}{q} + \frac{dw}{w} \frac{w}{q}$$

$$\frac{u}{q} = \frac{w}{q} = 1 \Rightarrow$$

$$u = w = q$$

3.3. A levitáció, az alrendszerek kompozíciója

$$I = P - (dV/V) = P - \Omega = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i + a_i(d x_i/x_i)) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i + a_i^* \omega_i) \Rightarrow \Omega = P - 1 + \prod_{i=1}^n (1 - p_i + \Omega_i)$$

Ha egyes relatív változások nőnek, csökkenhet a tehetetlenség.

3.4. A kritikus pontok

$$\text{mod}\left(\frac{dx_i}{x_i}\right) \approx 0,1, 2, 3, \dots$$

Péllda a Volterra-modell a ragadozó és a nem ragadozó halak túlélésére

$$\frac{dx}{x} = (A - \varepsilon) - By$$

$$\frac{dy}{y} = -(C + \varepsilon) + Dx \Rightarrow$$

$$y = \frac{A - \varepsilon}{B}$$

$$x = \frac{C + \varepsilon}{D}$$

4. SZAKIRODALOM

- [1] SZEL A., in Principle and Models for System Evolution, edited by Hungarian Technical Society of Transylvania International Conference of Computer Science and Energetic-Electrical Engineering-Oradea 2007, pp. 174-179, ISSN 1842-4546.
- [2] HAY KIN, S., in Adaptive Filter Theory, Prentice Hall 2001
- [3] RADU P. V. and ION V. S., in Sisteme Dinamice, Curs Institutul Politehnic din Bucuresti 1993
- [4] KALMAN R.E. and FALB P.L. and ARBIB M.A., in *Teoria sistemelor dinamice*. Editura Tehnică București, 1975
- [5] ZADEH L.A. and POLAK E. in *Rendszerelmélet*. Műszaki Könyvkiadó Budapest, 1972
- [6] IONESCU V. and VARGA A., in *Teoria sistemelor*. Editura ALL București, 1994
- [7] BELEA C., in *Teoria sistemelor. Sisteme neliniare*. Editura Didactică și Pedagogică București, 1985
- [8] BOURCEANU G. and GROSU I. and BELDIE C., in *Evoluție și autoorganizare în sisteme departe de echilibru*. Editura Tehnică București, 1989
- [9] XXX *CadetWin-99: CNN application development environment and toolkit under Windows*. Version 3.0. Budapest, Analogical and Neural Computing Laboratory, Computer and Automation Institute, Hungarian Academy of Science 1999
- [10] CURIEVICI I., in *Optimizări în industria chimică*. Editura Didactică și Pedagogică București, 1980
- [11] PIERCE R. G., in *Solution Methods for Nonlinear Models*. University of Surrey 1997
- [12] SZÉL A., in *Perfecționarea modelelor de prognoză* București, Comisia Națională de Informatică, contract nr.257/1994 Bucuresti 1994
- [13] SZÉL A. and GACSADI A. and KAKAS S., in *Általános rendszermodell fejlesztése az inercialitás függvényében és alkalmazásai Kolozsvár Sapientia Alapítvány, (K/449-2003. contract) 2004*
- [14] ANOSOV D. V. and ARNOLD V.I., in *Dynamical Systems I*. 1988, Springer-Verlag, Berlin, Heideberg, New York, London, Paris, Tokio.
- [15] ARNOLD V. I., in *Dynamical Systems III (Mathematical Aspects of Classical and Celstial Mechanics)*, 1988, Springer-Verlag, Berlin, Heideberg, New York, London, Paris, Tokyo.
- [16] ARNOLD V. I. and NOVIKOV S.P. in *Dynamical Systems IV. Symplectic Geometry and its Applications*, 1990, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong.
- [17] BELTRAMI E., in *Mathematics for Dynamic Modeling*, 1999, Academic Press, INC. Boston, Orlando, San Diego, New York, Austin, London, Sydney, Tokyo, Toronto.