

Az egyensúlyszámokról

TUZSON ZOLTÁN

Az egyensúlyszámokkal az egész interneten csak az [1]-ben találkoztam, máshol sehol sem. Ott is csak annyira, hogy megadták az értelmezését (kissé pontatlanul), majd számítógépes program segítségével meghatározták az első 11 egyensúlyszámot.

Ebben a dolgozatban arra vállalkozom, hogy bebizonyítom, hogy végtelen sok egyensúlyszám van sőt mi több, meghatározom egy képlettel az egyensúlyszámok alakját, amiből bármelyik egyensúlyszám megkapható.

Először is nézzük, az egyensúlyszámoknak az értelmezését:

Definíció. Egy természetes számot egyensúlyszámnak nevezünk, ha az összes előtte levő természetes szám összege egyenlő az őt azonnal követő valahány egymásutáni természetes szám összegével.

Például a 6 egyensúlyszám, mert $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 7 + 8$ vagyis a 6 előtti 1,2,3,4,5 számok összege és két darab utána levő egymás utáni szám, a 7 és 8 összege ugyanannyi, mindkét összeg 15.

A következő egyensúlyszám a 35, mert $1 + 2 + \dots + 34 = 595 = 36 + 37 + \dots + 49$. Az [1] szerint a következő egyensúlyszámok a 1189, 6930, 40391, stb.

Keressük meg hát az egyensúly számokat adó képletet! Az alábbi bizonyítással sehol sem találkoztam, sem az interneten sem szakkönyvekben.

Ha egy a természetes szám, akkor az egyensúlyszámok értelmezése alapján a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$(1) \quad 1 + 2 + \dots + (a - 1) = (a + 1) + (a + 2) + \dots + (a + k - 1)$$

ahol $a \geq 2, k \geq 2, a > k, a \in \mathbb{N}$.

Az egyenletet még így írhatjuk:

$$\frac{a(a-1)}{2} = \frac{(2a+k)(k-1)}{2}$$

ahonnan a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$(2) \quad a^2 - (2k - 1)a - k(k - 1) = 0$$

Ennek az egyenletnek természetes a megoldása kell legyen, vagyis a diszkriminánsa teljes négyzet kell legyen. Tehát

$$\Delta = 8k^2 + 1 = 2(2k - 1)^2 - 1 = m^2,$$

ahonnan az

$$(3) \quad m^2 - 2(2k - 1)^2 = -1$$

úgynevezett konjugált Pell egyenletet kapjuk. Ezek szerint az a egyensúlyszám, mint a (2)-es másodfokú egyenlet megoldása éppen $a = \frac{2k-1+m}{2}$ és vegyük észre, hogy az $a > k$ feltétel miatt, az $a = \frac{2k-1+m}{2}$ szám nem felel meg, csak az

$$(4) \quad a = \frac{2k - 1 + m}{2}$$

Ez tulajdonképpen az

$$(5) \quad x^2 - 2y^2 = -1$$

konjugált Pell egyenlet megoldását igényli. Ez az egyenlet és a megoldása közismert a szakirodalomban, és az interneten is megtaláljuk a megoldását például a [2] és [3] forrásokban. Ezek szerint az x_n, y_n megoldásokról a következőket tudjuk:

Az egyenlet minimális pozitív egész megoldása $x = 1$ és $y = 1$. Továbbá könnyen leellenőrizhető, hogy ha az (x, y) számpár megoldása az egyenletnek, akkor a $(3x + 4y, 2x + 3y)$ számpár is megoldása, hiszen

$$(3x + 4y)^2 - 2(2x + 3y)^2 = x^2 - 2y^2 = -1.$$

Így ezek alapján ismert, hogy

$$(6) \quad x_{n+1} = 3x_n + 4y_n \quad \text{valamint} \quad y_{n+1} = 2x_n + 3y_n, \quad \text{minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

Továbbá a (6) alapján az is felírható, hogy:

$$(7) \quad x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n \quad \text{illetve} \quad y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n, \quad \text{és} \\ x_0 = 1, x_1 = 7 \text{ ill. } y_0 = 1, y_1 = 5.$$

Ezek alapján vegyük észre, hogy matematikai indukcióval könnyen bizonyítható, hogy az (x_n, y_n) megoldáspárok csupa páratlan természetes számokból állnak, így összhangba kerülünk a (3)-as egyenletünk megoldásával.

Ha most felírjuk a karakterisztikus egyenletet, tehát megoldjuk a rekurziókat, akkor azt kapjuk, hogy

$$(8) \quad \begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(\sqrt{2} + 1)^{2n+1} + (\sqrt{2} - 1)^{2n+1} \right] \text{ és} \\ y_n &= \frac{1}{2} \left[(\sqrt{2} + 1)^{2n+1} - (\sqrt{2} - 1)^{2n+1} \right] \end{aligned}$$

Ezekhez a megoldásokhoz a következő érdekes módon is eljuthatunk:

Mivel

$$x^2 - 2y^2 = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = -1$$

és most emeljük $2n + 1$ hatványra mind a két oldalt azt kapjuk, hogy

$$(x + y\sqrt{2})^{2n+1}(x - y\sqrt{2})^{2n+1} = -1.$$

De a Newton binomiális képlet alapján léteznek olyan (x_n, y_n) természetes szám-párok, amelyekre igaz, hogy

$$(9) \quad (x + y\sqrt{2})^{2n+1} = x_n + y_n\sqrt{2} \text{ és } (x - y\sqrt{2})^{2n+1} = x_n - y_n\sqrt{2}$$

Ezek alapján azonnal adódik, hogy $x_n^2 - 2y_n^2 = -1$ vagyis (x_n, y_n) megoldása a szóban forgó Pell egyenletnek. Továbbá még felírhatók, hogy

$$\begin{aligned} x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2} &= (x + y\sqrt{2})^{2n+3} = (x + y\sqrt{2})^2(x + y\sqrt{2})^{2n+1} \\ &= (x_0 + y_0\sqrt{2})^2(x + y\sqrt{2})^{2n+1} \end{aligned}$$

vagyis

$$x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})(x_n + y_n\sqrt{2}),$$

ahonnan megkapjuk a (4) alatti összefüggéseket.

A (8) alatti összefüggéseket is könnyen megkapjuk, ha megoldjuk x_n és y_n -ben az

$$\begin{aligned} x_n + y_n\sqrt{2} &= (\sqrt{2} + 1)^{2n+1} \\ x_n - y_n\sqrt{2} &= (\sqrt{2} - 1)^{2n+1} \end{aligned}$$

egyenletrendszerét.

Érdekes módon, az így kapott (x_n, y_n) megoldások, az (5) konjugált Pell egyenletnek az összes természetes megoldását megadják, ennek bizonyítása nem egyszerű, de megtalálható a számelméleti szakkönyvek zömében, meg az interneten is.

Most már megfogalmazhatjuk a központi eredményeinket, felírva a (3)-as egyenlet m és k megoldásait:

$$m = x_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(\sqrt{2} + 1)^{2n+1} + (\sqrt{2} - 1)^{2n+1} \right]$$

és a (4)-es és a (8)-as összefüggések alapján azonnal adódik, hogy:

$$\begin{aligned} (*) \quad a = a_n &= \frac{x_n + y_n}{2} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[(\sqrt{2} + 1)^{2n+2} + (\sqrt{2} - 1)^{2n+2} \right] \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[(3 + 2\sqrt{2})^{n+1} + (3 - 2\sqrt{2})^{n+1} \right] \text{ minden } n \in \mathbb{N}^* \text{ esetén.} \end{aligned}$$

Így ez utóbbi (*) képlet adja meg az összes egyensúlyszám képletét.

Az előbbieket alapján tehát megfogalmazhatjuk, hogy az (1)-ben az egyensúlyszám előtti (tehát bal oldali) összegnek $a_n - 1$ tagja van, az egyensúlyszám utáni (jobb oldali) összegnek pedig

$$k = k_n = \frac{1}{2} \left[(\sqrt{2} + 1)^{2n+1} - (\sqrt{2} - 1)^{2n+1} + 1 \right]$$

tagja van, továbbá a két összeg közös értéke $\frac{a_n(a_n-1)}{2}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a (*) formula megadja az [1]-ben a számítógépes program által kapott 6, 35, 1189, 6930, 40391, stb egyensúlyszámokat is.

Szakirodalom

- [1] <http://gorbem.hu/OK/Mat/Egyensuly.htm>
- [2] <https://math.stackexchange.com/questions/1268902/solutions-of-the-pell-type-equation-x2-2y2-1>
- [3] <https://math.stackexchange.com/questions/2309613/general-solution-to-x2-2y2-1>