

A SET kártyajáték alkalmazása a kombinatorika és a valószínűségszámítás oktatásában

EISNER TÍMEA – SZTOJKOVICS DÓRA

A SET egy díjnyertes, gyorsasági-logikai kártyajáték. A játék fejlesztője Marsha Jean Falco [8] genetikus, aki 1974-ben Cambridge-ben dolgozott, az epilepsziás megbetegedés öröklődését kutatta a német juhászkutyák között. A kutatása során kis kártyákat készített és genetikai mintákat keresett. Ekkor jött az ötlet, hogy ebből akár egy játékot is lehetne készíteni, családjával és barátaival kidolgozták a SET-et. 17 évvel később az akkorra teljesen kidolgozott játékot bevezette a játékpiacon, amely azóta óriási siker lett.

A játék sok, különböző nehézségű matematikai kérdést vet fel. Ezzel kapcsolatban számos matematikai cikk született ([1], [2], [6], [7]). Ezek közül középiskolásoknak szóló feldolgozás a [2] és a [6] cikkekben található.

A SET kártya lehetőséget ad arra, hogy a gyerekek saját maguk fogalmazzanak meg problémákat, és megfelelő tanári irányítással meg is oldják ezeket. Így a problémafelvetéstől a megoldásig tartó folyamatot önállóan élhetik át. Ezáltal megélik a felfedezés örömét, és megismerkedhetnek a kutatás alaplépéseivel. Mivel a SET kedvelt játék a gyerekek körében, ez a folyamat izgalmas és érdekes számukra, ezáltal az élményalapú oktatás része lehet.

A kártyalapok segítségével szemléltethetjük a 3 elemű testre épített n ($1 \leq n \leq 4$) dimenziós affin terek pontjait. A játék ezáltal lehetőséget ad még megoldatlan matematikai problémák megfogalmazására is.

Jelen cikkben rámutatunk a SET játék oktatásban történő alkalmazhatóságára. Bővebb anyag megtalálható Sztojkovics Dóra, A SET kártyajáték alkalmazása a kombinatorika és a valószínűségszámítás oktatásában című OTDK dolgozatában [5], mely elérhető a <https://bit.ly/39m9e0K> címen.

1. A SET kártyajáték játékszabálya

A kártyapakliban minden lapot négy tulajdonság jellemez: forma, kitöltés, szám és szín. Minden kártyán figurák láthatóak, melyeknek háromféle formájuk (ovális,

hullámos, rombusz), háromféle kitöltésük (üres, csíkos, tömör), háromféle darabszámuk (1, 2, 3) és háromféle színük lehet (piros, zöld, lila). A teljes kártyacsomag a négy lehetséges tulajdonság összes kombinációját tartalmazza (pontosan egyszer).

A játék elején 12 lapot teszünk le asztalra és a cél az, hogy minél több SET-et találjunk ezek között. Egy SET 3 kártyából áll, amiben minden jellemzőt külön megvizsgálva, azoknak vagy minden kártyán azonosnak, vagy minden kártyán különbözőnek kell lenni. Ennek a szabálynak az összes tulajdonságra teljesülnie kell a kiválasztott 3 lap esetén.

Ha valaki talált egy SET-et, akkor szólnia kell, a többi játékos pedig ellenőrzi. Ha valóban SET volt, akkor elveheti azt a 3 lapot, kap érte 1 pontot, és a kártyák helyére újabb lapok kerülnek. Ha azonban tévedett, azért -1 pont jár, és a lapok maradnak az asztalon. Ha a játékosok megegyeznek abban, hogy az asztalon lévő kártyák között nincs SET, akkor újabb három kártyát kell letenni. A játéknak akkor van vége, ha elfogynak a lapok, vagy ha már csak az asztalon vannak kártyák, és ezek között nincsen SET. Az a játékos nyer, aki a legtöbb pontot éri el.

2. Egyszerű kombinatorikai feladatok

Tapasztalat, hogy függetlenül attól, hogy gyerek vagy felnőtt játszik az alapjátékkal, rögtön néhány kérdés felmerül a játékosokban a játék során. Ezeket a kérdéseket érdemes közösen összegyűjteni, majd megoldani a diákokkal: Hány kártyalap található a pakliban? Hány SET van összesen? Egy kártya hány SET-ben szerepel? Legfeljebb hány SET-et találhatunk a 12 lap között? Egy játék alatt legfeljebb hány SET-et találhatunk összesen? Előfordulhat-e, hogy egyetlen lap sem marad a játék végén az asztalon? Hány kártya maradhat az asztalon a játék végén? Előfordulhat, hogy nincs SET a 12 lap között? Hány kártyát tudunk letenni úgy, hogy ne legyen köztük SET? Miért pont 12 lapot teszünk az asztalra? Mi a legjobb stratégia? Mekkora a valószínűsége annak, hogy a 12 kártya tartalmaz SET-et?

1. Példa. *Hány SET-et találhatunk összesen a teljes kártyapakliban?*

Megoldás. Megfigyelhetjük, hogy bármely két lap egyértelműen meghatároz egy SET-et.

A pakliban 81 lap található, ezért az első helyre 81-féle kártyát, a másodikra 80-félét választhatunk, a harmadik pedig egyértelműen meghatározott. 3 kártyát $3! = 6$ -féle sorrendben tudunk kiválasztani, így a megoldás: $81 \cdot 80 / 6 = 1080$. ■

Mivel 2 kártya egyértelműen meghatározza a harmadikat, ezért két lapban nem egyezhetnek meg, viszont könnyen találhatunk 2 SET-et, amelynek nincs vagy 1 közös lapja van. Ezzel beláttuk, az alábbi következményt.

1. Következmény. Két különböző SET legfeljebb 1 lapban egyezhet meg.

2. Példa. Egy játék alatt legfeljebb hány SET-et találhatunk összesen?

Megoldás. Mivel 81 kártya van összesen, ezért legfeljebb $\frac{81}{3} = 27$ SET-re bonthatjuk szét a paklit, ami könnyen megvalósítható. A bizonyítást az olvasóra bízuk. ■

3. A SET-ben rejlő matematika

A "Hány kártyalapot kell letennünk az asztalra ahhoz, hogy biztosan találjunk közöttük SET-et?" kérdés megválaszolása önmagában nehéz. Megmutatjuk, hogy a SET-problémák átfogalmazhatók véges geometriai problémákká. Megtehetjük, hogy diákjainknak ezt nem mondjuk ki; ekkor kisebb dimenzióban a tanulók maguk is meg tudják válaszolni a kérdést, és néhány esetben az egyszerűbb kombinatorikai feladatok megoldása is még egyszerűbb lesz.

A kártyapakli megfeleltethető a 3 elemű testre épített 4 dimenziós affin tér pontjainak. Ekkor a kártyák a tér pontjainak, a SET-ek a tér egyeneseknek, a változó tulajdonságok száma a tér dimenziójának, a SET-mentes halmazok pedig a térben található síveknek felelnek meg. Ebben a térben minden egyenesnek 3 pontja van, és a sív egy olyan pontthalmaz, amely nem tartalmaz egyenest, azaz bármely 3 pontját kiválasztva, azok nem esnek egy egyenesre. Ahhoz, hogy a tanulók megértsék a definíciókat, tételeket, a pontok koordinátás alakja helyett kódokkal fogjuk jelölni a kártyalapokat. Az egyenes fogalmát ugyanúgy fogjuk használni, mintha az affin térről beszelnénk, a sív helyett viszont a SET-mentes halmazok kifejezést alkalmazzuk.

	1. számjegy forma	2. számjegy kitöltés	3. számjegy szám	4. számjegy szín
0	ovális	üres	3	piros
1	hullámos	csíkos	1	zöld
2	rombusz	tömör	2	lila

1. táblázat. A számjegyek jelentése

A pakliban minden kártyának 4 tulajdonsága van, amelyek 3-félék lehetnek. Jelöljük ezeket a típusokat a 0, 1, 2 számokkal, és a pakli minden egyes lapjának feleltessünk meg egy olyan kódot, amelynek 4 számjegyének jelentését (balról jobbra haladva) az 1. táblázat mutatja.

Ezzel a megfeleltetéssel megkapjuk az összes olyan 4-jegyű kódot, amelynek a számjegyei 0, 1 vagy 2 értékűek lehetnek. A fenti hozzárendelés egy-egyértelmű,

azaz egy lapnak pontosan egy kód felel meg, és egy kódhoz pontosan egy kártya tartozik, ami azt jelenti, hogy ugyanannyi 4-jegyű kód van, mint ahány lap.

3. Példa. *Mi a kapcsolat a SET-ek és a kódok között?*

Megoldás. Három kártyalap akkor alkot SET-et, ha minden tulajdonságukban megegyeznek vagy különböznek. A kódok esetén ez azt jelenti, hogy az azonos helyiértéken álló számjegyek vagy ugyanazok, vagy mind különböznek. Megfigyelhetjük és egyszerű számolással igazolhatjuk, hogy pontosan akkor alkot a 3 lap SET-et, ha a megfelelő számjegyek összege osztható 3-mal. ■

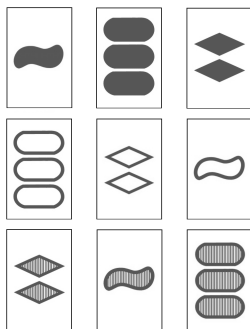
3.1. Bűvös négyzet

Alkossunk a SET kártyákból bűvös négyzetet a következő módon: Helyezzünk el 9 lapot 3×3 -as alakban úgy, hogy a kártyalapok SET-et alkossanak minden sorban, oszlopban és átlóban!

A bűvös négyzet játékot nem csak azért fontos megemlíteni, mert egy érdekes és látványos feladat, hanem azért is, mert a matematikai háttérének ismerete sok kérdés megválaszolásához szükséges.

A feladat elsőre nem tűnik egyszerűnek, de a következő módszerrel bárki számára könnyen megvalósíthatóvá válik: Első lépésben válasszunk három kártyát, amelyek nem alkotnak SET-et. Most helyezzük el az első kártyát az első sor első négyzetébe, a másodikat a második sor második négyzetébe, a harmadikat pedig az első sor harmadik négyzetébe. Végül mivel bármely két lap egyértelműen meghatároz egy SET-et, az összes üres négyzetbe ki tudjuk választani a hiányzó kártyalapot.

Példa:



1. ábra. Bűvös négyzet SET kártyákból

Megfigyelhetjük, hogy nem csak az oszlopok, sorok, átlók alkotnak SET-et, hanem a **kisátlók** is. A kisátló 3 olyan négyzetet jelent, ami nem egy átlón helyezkedik el, de mind a 3 különböző oszlopban és különböző sorban található:

X					X		X				X								
			X					X							X				
		X				X				X								X	

2. ábra. Kisátlók

Később belátjuk, hogy bármely SET kártyákból alkotott bűvös négyzet esetén teljesül, hogy a kisátlók is SET-et alkotnak. A 3 oszlop, a 3 sor, a 2 átló és a 4 kisátló SET-et alkot (más nem), összesen 12-t. Felmerülhet a kérdés, hogy találhatunk-e ennél több SET-et 12 lap között vagy, hogy általánosságban legfeljebb hány SET fordulhat elő $n \in \mathbb{N}^*$ lap között. Ezzel a problémával a következő fejezetben fogunk foglalkozni.

4. Példa. *Bizonyítsuk be, hogy a fenti lépésekkel valóban minden esetben bűvös négyzetet kapunk, és hogy a kisátlók is SET-et alkotnak!*

Megoldás. Első lépésben a kiválasztott 3 lapot (amelyek nem alkottak SET-et), az első sor első négyzetébe, a második sor második négyzetébe és az első sor harmadik négyzetébe helyeztük el. Mivel a 3 lap nem alkot SET-et, a bal alsó sarokba, a jobb alsó sarokba és a felső sor középső négyzetbe elhelyezhetjük a megfelelő kártyákat úgy, hogy két átlóban és a felső sorban SET-eket kapjunk. Ekkor mindhárom oszlopban pontosan 2 kártya szerepel, így a hiányzó harmadik lap egyértelműen meghatározott. Ezzel az eljárással egyértelműen helyezzük el a 9 lapot a bűvös négyzetbe.

Megválaszolandó kérdések:

1. Az alsó két sorban is SET-et alkotnak a kártyák?
2. A kisátlókban is SET-et alkotnak a lapok?
3. Biztosan teljesül-e az, hogy minden lap különböző? (Nem fordulhat-e elő, hogy 2 különböző helyre ugyanazt a lapot kellene tenni?)

Az első kettő kérdésre a válasz igen, amit úgy láthatunk be, hogy minden tulajdonság esetén megvizsgáljuk, hogy azok mind különböznek-e vagy megegyeznek-e a fennmaradó két sorban és a kisátlókban. Az első lépésben kiválasztott 3 kártyának tekintsük egy konkrét tulajdonságát. Három eset fordulhat elő: a tulajdonság típusa megegyezik mindhárom lapon, kettőn megegyezik és egy lapon különbözik vagy mindegyiken különbözik. Töltsük ki a bűvös négyzetet csak ezzel az egy tulajdonsággal. Könnyen beláthatjuk, hogy minden tulajdonság az összes esetben minden

sorban és kisátlóban vagy megegyezik vagy mind különbözik, azaz SET-eket kapunk ezeken a helyeken. A bizonyítást az olvasóra bízjuk.

Megmutatjuk, hogy az eljárás során lerakott 9 kártya mind különböző. Ezt indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy van 2 lap, ami megegyezik. Mivel az első 3 kártya különböző, és nem alkot SET-et, ezért ezek 3 egymástól és az eredetiektől különböző lapot határoznak meg, tehát azonos kártya csak az oszlopokból hiányzó lapok között fordulhat elő. Tegyük fel, hogy az első és a második oszlop hiányzó kártyái megegyeznek. Ekkor a bal oldali oszlop és az alsó sor lapjai SET-et alkotnak, és pontosan 2 lapban egyeznek meg, ami ellentmond az 1. következménynek. Ezzel bebizonyítottuk azt is, hogy az eljárás során mind a 9 kártya különböző lesz. ■

Az egyszerűség kedvéért bevezetjük a következő definíciókat:

1. Definíció. Nevezzük a bűvös négyzet oszlopait, sorait, átlóit, kisátlóit egységesen *egyeneseeknek*, a kártyákat pedig *pontoknak*. Így, ha 3 lap SET-et alkot, mondhatjuk, hogy egy egyenesre esnek.

Megjegyzés. A kezdő 3 lapot más alakzatban is elhelyezhetjük, úgy hogy azok nem esnek egy egyenesre.

3.2. További kombinatorikai feladatok

5. Példa. Keressük meg, hogy $4 \leq n \leq 9$ lap között hány SET-et találhatunk legfeljebb!

Megoldás. Jelöljük a maximális SET-ek számát n lap esetén m_n -nel.

$n = 4$ kártyánál először kiválasztunk 3 lapot, amelyek SET-et alkotnak, majd ehhez keresünk egy negyediket. Ezzel nem tudjuk növelni a SET-ek számát, mivel az nem fordulhat elő, hogy a negyedik kártya az első 3 közül valamelyik 2-vel SET-et alkot (különben az első 3 lap nem lenne SET).

$n = 5$ kártya esetén az előző 4-hez választunk egy újat. A negyedik kártya az első 3 lappal 3 különböző SET-et határoz meg, aminek a harmadik lapja még a pakliban van. Csak úgy tudjuk növelni a SET-ek számát, ha ebből a 3-ból választjuk valamelyiket, azaz $m_5 = 2$.

Tekintsük az $n = 9$ esetet. Ekkor 12 SET-et biztosan találhatunk, ezt korábban a bűvös négyzet fejezetnél (1. ábra) láthattuk. A négyzetnek 3 sora, 3 oszlopa, 2 átlója és 4 kisátlója van, és ezek mind SET-et alkotnak, tehát $m_9 \geq 12$. Ezt az értéket felülről becsülhetjük: 9 kártyából bármelyik 2 meghatároz egy SET-et. 9 lapból kettőt $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ -féleképpen választhatunk, amit osztanunk kell 3-mal

(minden SET-et 3-szor számoltunk, mert a SET-et alkotó 3 lapból kettőt $\binom{3}{2} = 3$ -féleképpen választhatunk ki). Ez összesen 12 lehetőség, azaz $m_9 \leq 12$, amiből következik, hogy $m_9 = 12$.

Tekintsük az $n = 8$ esetet. Válasszunk 9 kártyát úgy, hogy a lehető legtöbb SET-et tartalmazzák. Ekkor, ha egy olyan lapot veszünk ki, amely a legkevesebb SET-ben szerepel, akkor alsó becslést kapunk m_8 értékére. A bővös négyzeten könnyen ellenőrizhetjük, hogy mind a 9 kártya pontosan 4 SET-ben szerepel. Ha a 9 lapból elhagyjuk bármelyiket, akkor 4-gyel csökken a SET-ek száma, amiből következik, hogy $m_8 \geq 12 - 4 = 8$. Mivel az 1. következmény alapján 2 különböző SET legfeljebb 1 lapban egyezhet meg, ezért a 8 kártya mindegyike legfeljebb $\lceil \frac{8-1}{2} \rceil = 3$ SET-ben szerepelhet. Ezért 8 lap legfeljebb $\frac{8 \cdot 3}{3} = 8$ SET-et tartalmazhat (azért kell 3-mal osztanunk, mert különben minden SET-et mindhárom lapja esetén számolnánk), így $m_8 \leq 8$, így $m_8 = 8$.

Tekintsük az $n = 7$ esetet. Induljunk ki 8 olyan lapból, amelyek 8 SET-et tartalmaznak. Ekkor mindegyik kártya 3 SET-ben szerepel. Jelöljük X-szel a bővös négyzetből elvett lapot, a többi kártya helyére pedig azt írjuk, hogy az adott lap hány SET-ben szerepel:

X	3	3
3	3	3
3	3	3

3. ábra. $n=8$

Ha ebből is elveszünk egyet, akkor megkapjuk, hogy $m_7 \geq 8 - 3 = 5$. Mivel mindegyik kártya legfeljebb $\lceil \frac{7-1}{2} \rceil = 3$ SET-ben szerepelhet, ezért a 7 lap legfeljebb $\frac{7 \cdot 3}{3} = 7$ SET-et tartalmazhat, így $m_7 \leq 7$. A fenti eljárás konstrukciót ad $m_7 = 5$ -re, (Vinci 2009) igazolta, hogy ez a pontos érték.

Tekintsük, az $n = 6$ esetet. Induljunk ki az előbb megkonstruált 7 lapból, amelyben a SET-ek száma 5. Itt a 7 kártyából 1 darab 3 SET-ben fordul elő (amelyik az előző 2-vel egy egyenesre esett, így a második elvett lappal nem csökkent az öt tartalmazó SET-ek száma), 6 pedig 2-ben:

X	X	3
2	2	2
2	2	2

4. ábra. $n=7$

Ebből a 6 lapból valamelyiket elhagyva kapjuk, hogy $m_6 \geq 5 - 2 = 3$. Mivel mindegyik kártya legfeljebb $\lceil \frac{6-1}{2} \rceil = 2$ SET-ben szerepelhet, ezért a 6 lap legfeljebb

$\frac{6-2}{3} = 4$ SET-et tartalmazhat, így $m_6 \leq 4$. Az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha mindegyik kártya pontosan 2 SET-ben szerepel.

Belátjuk, hogy $m_6 = 4$ nem lehetséges. Legyen a 6 kártya $\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$, $\boxed{E}$, $\boxed{F}$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\boxed{A}$ SET-et alkot $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ -vel és $\boxed{D}$ $\boxed{E}$ -vel. Mivel az 1. következmény alapján 2 különböző SET legfeljebb 1 lapban egyezhet meg, ezért $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$, $\boxed{E}$ kártyák biztosan nem tartalmaznak SET-et. Mivel $\boxed{F}$ nem alkot SET-et $\boxed{A}$ -val, és $\boxed{F}$ is 2 SET-ben szerepel, ezért $\boxed{B}$ $\boxed{D}$ -vel és $\boxed{C}$ $\boxed{E}$ -vel vagy $\boxed{B}$ $\boxed{E}$ -vel és $\boxed{C}$ $\boxed{D}$ -vel alkot SET-et. Tekintsük a lapok kódjait, és tetszőleges tulajdonság értékét mind a 6 kártya esetén. Jelöljük ezeket az értékeket a, b, c, d, e, f betűkkel. Mivel a SET-ek esetén ezeknek az értékeknek az összege osztható 3-mal, ezért:

$$3 \mid 2a + b + c + d + e,$$

$$3 \mid 2f + b + c + d + e,$$

azaz $2a$ és $2f$ ugyanazt a maradékot adja 3-mal osztva, amiből az is következik, hogy a -nak és f -nek is megegyezik a 3-mal való osztási maradéka. A kódok csak 0, 1, 2 értékek lehetnek, ezért ez azt jelenti, hogy $a = f$. Ez minden tulajdonság esetén teljesül, így $\boxed{A} = \boxed{F}$ adódik, ami ellentmondás. Tehát $3 \leq m_6 < 4$ miatt $m_6 = 3$. ■

SET-mentes lapok száma. Játék közben felmerülhet a kérdés, megtörténhet-e az, hogy az asztalon lévő 12 lap között nincs SET. A válasz az, hogy viszonylag ritkán, de előfordulhat.

Keressük meg, hogy legfeljebb hány lapot tudunk úgy kiválasztani, hogy azok ne tartalmazzanak SET-et!

A SET kártyajáték esetén 4 tulajdonság fordul elő, de tekinthetjük például csak a piros lapokat, ebben az esetben 3 tulajdonság maradna. Vagy ha újabbat találnánk ki (például minden kártyának lenne háttérszíne, ami szintén háromféle lehet), akkor 5 jellemzője lenne a lapoknak.

A fenti feladatra a választ először a kevesebb változó tulajdonság esetén célszerű vizsgálni. Ha 3 tulajdonságot rögzítünk. Ekkor 3 lapot kapunk, és ezek nyilván SET-et alkotnak, így legfeljebb 2 kártyát tudunk kiválasztani úgy, hogy azok ne alkossanak SET-et.

Most 2 tulajdonságot rögzítünk és 2 fog változni. Rögzítsük például a számot és a színt, legyen minden kártyán 2 piros figura. Az eredeti 4-jegyű kódok utolsó két számjegyét le hagyjuk, hiszen ezek minden kártya esetén ugyanazok lesznek. Ekkor 2 tulajdonság marad, ami 3-féle lehet, a forma és a kitöltés. Így összesen 9 lapot kapunk. A kártyákhoz 2-jegyű kódokat rendelünk, ahol az első számjegy a formát, a második a kitöltést jelenti.

Ezt a 9 lapot el tudjuk rendezni úgy, hogy bővös négyzetet alkossanak. A bővös négyzet egy speciális esete, ha a következő módszerrel helyezzük el a kártyákat: Tekintsük a lapoknak megfelelő kódokat, és ezek segítségével tegyük a lapokat egy 3×3 -as tábla négyzeteibe úgy, hogy a sorok sorszáma az első számjeggyel, az oszlopok sorszáma pedig a másodikkal egyezzen meg.

	0	1	2		0	1	2
0	00	01	02	0			
1	10	11	12	1			
2	20	21	22	2			

5. ábra. Bővös négyzet kódokkal és lapokkal

Észrevehetjük, hogy 3 kártya pontosan akkor alkot SET-et ha a tábla ugyanazon sorában, oszlopában, átlójában, kisátlójában helyezkedik el, tehát valóban bővös négyzetet kaptunk.

X-et rajzolunk abba a négyzetbe, amelynek megfeleltetett lapot ki szeretnénk választani. Célunk, hogy minél több X-et tudjunk tenni a négyzetekbe úgy, hogy ne válasszuk ki egy adott sor, oszlop, átló vagy kisátló mindhárom négyzetét, azaz a kijelölt kártyalapok ne alkossanak SET-et.

Ezt az ábrázolást kiterjeszthetjük azokra az esetekre is, amikor több tulajdonság változik. Ha egy új tulajdonságot veszünk hozzá az eddigiekhez, ami szintén 3-féle lehet, akkor 3-szor annyi táblára van szükségünk, mint az előző esetben, hogy minden kártyalap szerepeljen.

1. Tétel. 2 változó tulajdonság esetén a maximális SET-mentes halmaz 4 lapból áll.

Bizonyítás. A 6. ábrán láthatunk 4 olyan lapot, melyek nem alkotnak SET-et.

X	X	
		X
		X

6. ábra. SET-mentes halmaz 2 változó tulajdonság esetén

A kiválasztott 4 lapból semelyik 3 nem esik egy egyenesre, ezt könnyen ellenőrizhetjük. Belátjuk, hogy 5 kártya már nem választható ki a 9 lap közül. Indirekt

módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy találhatunk 5 lapot úgy, hogy azok nem tartalmazzanak SET-et. 5 kártyából kettőt $\frac{5-4}{2} = 10$ -féleképpen választhatunk ki, ami 10 SET-et határoz meg.

A jelöletlen kártyák száma $9 - 5 = 4$. Egy jelöletlen kártya legfeljebb $\left[\frac{5}{2}\right] = 2$ olyan SET-ben szerepelhet, amelyben a másik 2 lap kiválasztott, ezért a 4 jelöletlen kártya legfeljebb $2 \cdot 4 = 8$ SET-et fed le a 10-ből. Így a maradék 2 SET-ből a harmadik lap biztosan a kiválasztottak között van, ami ellentmondás. Tehát 2 változó tulajdonság esetén nem lehet 5 lapot kiválasztani úgy, hogy azok ne tartalmazzanak SET-et. ■

Belátható, hogy három változó tulajdonság esetén 9, négy változó tulajdonság esetén 20 lapot tudunk kiválasztani úgy, hogy azok ne tartalmazzanak SET-et, amiből rögtön következik, hogy 21 lap között biztosan lesz SET.

Egy kis történelem. A maximális SET-mentes halmaz keresése a változó tulajdonságok számának függvényében egy nagyon komoly matematikai probléma: *Mekkora a maximális süveg mérete a 3 elemű test feletti d dimenziós affin térben?*

A változó tulajdonságok száma adja meg az adott affin tér dimenzióját (d), a maximális SET-mentes halmaz pedig a maximális süvegnek felel meg. Jelöljük a_d -vel a maximális süveg méretét d dimenzióban (d -süveg). 4 dimenzióban (ami megegyezik a SET kártyapaklival) a kérdést először Giuseppe Pellegrino válaszolta meg (Pellegrino 1971), 3 évvel azelőtt, hogy Marsha Jean Falco megalkotta a SET játékot. 5 dimenzióban már annyi lehetőség jöhet szóba, hogy számítógéppel is rendkívül hosszú ideig tartana kiszámolni. Ezért is számított nagy sikernek, hogy 2002-ben Yves Edel, Sandy Ferret, Ivan Landjev és Leo Storme megoldották a feladatot (Edel-Ferret-Landjev-Storme 2002). Ekkor legfeljebb 45 kártyát tudunk kiválasztani úgy, hogy azok ne tartalmazzanak SET-et. 6 dimenzióban 112 ez az érték. A további esetekben a feladat egyelőre megoldatlan.

Hány kártya maradhat az asztalon a játék végén? A tanulókkal ezt a kérdést akkor érdemes tárgyalni, amikor már sokat játszottak, és így van tapasztalatuk.

Nyilván csak 3-mal osztható számú kártya maradhat, mivel a játék folyamán hármasával vesszük fel a lapokat, és a pakliban is 3-mal osztható számú kártya van. Ezután feltehetjük a következő kérdést: *Minden 81-nél kisebb 3-mal osztható szám esetén maradhat annyi kártya az asztalon?* A 2. példából következik, hogy megtörténhet, hogy minden kártya elfogy. Tehát 0 lap maradhat a játék végén az asztalon.

Maradhat-e 3 lap az asztalon? Ez egy nehezebb kérdés, a játék során azt tapasztalhatják a gyerekek, hogy soha nem fordul elő, hogy 3 kártya maradjon. Így megfogalmazhatjuk a sejtést:

1. Sejtés. *Nem maradhat 3 lap a játék végén az asztalon.*

Bizonyítás. A megoldáshoz a lapok kódjait használjuk. Ha összeadjuk azokat a számjegyeket, amelyek egy konkrét helyiértéken állnak az összes kód esetén, akkor $0 \cdot 27 + 1 \cdot 27 + 2 \cdot 27 = 81$ adódik. Mivel ez mind a 4 helyiértékre teljesül, az összes lap megfelelő számjegyeinek összege osztható 3-mal.

Korábban beláttuk, hogy egy SET-ben mind a 4 tulajdonságra igaz, hogy a megfelelő számjegyek összege osztható 3-mal (és fordítva is), tehát ha a pakliból kivesszünk egy SET-et, akkor az oszthatóság tulajdonságai miatt a különbség (azaz megmaradt kártyák megfelelő számjegyeinek összege) is osztható lesz 3-mal. Így, ha elvettünk annyi SET-et, hogy már csak 3 kártya maradt, akkor a 3-mal való oszthatóság ezekre is teljesülni fog, tehát a lapok SET-et alkotnak. ■

Maradhat-e 6, 9, 12, 15, 18, 21, ..., 81 kártya az asztalon?

Mivel a maximális SET-mentes lapok száma 20, ezért 21 kártya esetén már biztosan találunk legalább egy SET-et. Tehát a fenti kérdés már csak 6, 9, 12, 15, 18 lapra vonatkozik.

6. Példa. *Maradhat-e 9 lap a játék végén az asztalon?*

Megoldás. Tekintsük a következő ábrát:

X		X					X		
					X		X		X
X		X					X		

7. ábra. 9 SET-mentes lap (Davis-Maclagan 2003)

Ezek jelenthetik például az összes piros kártyát abban az elrendezésben, ahol a sor sorszáma a formát, az oszlop sorszáma a kitöltést, a tábla sorszáma pedig a darabszámot mutatja meg. Az X-szel jelölt lapok nem tartalmaznak SET-et. Ha a ki nem választott 18 lapot SET-ekbe tudjuk rendezni az azt jelenti, hogy maradhat 9 lap a játék végén, mivel a nem szereplő 54 lapot (a zöldket és a lilákat) szét tudjuk válogatni 18 csoportba úgy, hogy azok mind SET-et alkossanak.

X	2	X	4	5	2	2	X	6
1	1	1	5	X	4	X	6	X
X	3	X	3	4	5	6	X	3

8. ábra. Maradhat 9 kártya az asztalon

Az azonos számmal jelölt lapok SET-et alkotnak, tehát maradhat 9 kártya a játék végén az asztalon. ■

Hasonlóan adhatunk konstrukciót olyan játékhelyzetekre, hogy 6, 12, 15, 18 lap marad az asztalon, amely már nem tartalmaz SET-et.

3.3. Valószínűségszámítás

A SET kártya lehetőséget ad valószínűségszámítási feladatok megfogalmazására és megoldására. A klasszikus kártyákra vonatkozó feladatok mellett érdekes SET-specifikus feladatok is megfogalmazhatóak. Ezek közül sorolunk fel néhányat a következőkben.

7. Példa. *Mekkora valószínűséggel alkot 3 véletlenszerűen választott kártyalap SET-et?*

Megoldás. Válasszunk ki tetszőlegesen 2 kártyát. Pontosan 1 lap található a maradék 79 között, amelyekkel ezek SET-et alkotnak. Annak a valószínűsége, a 79-ből pont ezt választjuk, $\frac{1}{79}$. ■

Ahhoz, hogy meg tudjuk mondani, átlagban hány SET található azt asztalra letett 12 kártya között, ismernünk kell a diszkrét valószínűségi változó és a várható érték definícióját, továbbá két speciális eloszlás, a Bernoulli és a binomiális eloszlás fogalmát. A feladat megoldásához véges halmazon értelmezett valószínűségi változókra van szükség.

8. Példa. *Adjuk meg 12 kártya esetén a SET-ek várható számát!*

Megoldás. Ahhoz, hogy meghatározzuk 12 kártya esetén a várható SET-ek számát, először ne 12, hanem csak 3 lapot tekintsünk. Ekkor a feladat visszavezethető Bernoulli eloszlásra, 12 lap esetén pedig binomiális eloszlásra.

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ diszkrét valószínűségi mező, ahol Ω a teljes kártyapakli hármelemű halmazainak részhalmaza, így $|\Omega| = \binom{81}{3} = 85320$. Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó, melynek értéke

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \omega \in \Omega \text{ SET}, \\ 0, & \text{ha } \omega \in \Omega \text{ nem SET}. \end{cases}$$

A következő lépésben megállapítjuk a Bernoulli és a binomiális eloszlás p paraméterét.

Annak a valószínűsége, hogy 3 véletlenszerűen választott kártyalap SET-et alkot a 7. feladat alapján

$$\frac{1}{79} \approx 0,013.$$

Tehát az X valószínűségi változó eloszlása:

$$p_0 = 1 - \frac{1}{79} \approx 0,987, \quad p_1 = \frac{1}{79} \approx 0,013.$$

X várható értéke $\frac{1}{79}$.

Az eredeti kérdés arra vonatkozik, hogy 12 lap esetén mennyi a várható SET-ek száma. 12 kártyából 3-at $\binom{12}{3} = 220$ féleképpen választhatunk, így a feladat $B(220, \frac{1}{79})$ binomiális eloszlásra vezethető vissza, ahol $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_{220} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a valószínűségi változó. Ennek a várható értéke

$$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{220}) = 220 \cdot \frac{1}{79} \approx 2,785.$$

■

Adjuk meg a valószínűségét annak, hogy $1 \leq n \leq 81$ tetszőlegesen választott lap tartalmaz SET-et!

Az előzőek alapján ez a valószínűség számítógép segítségével meghatározható. Mi most az $1 \leq n \leq 5$ és a $21 \leq n \leq 81$ eseteket vizsgáljuk, mert ezeket az értékeket könnyen kiszámolhatjuk. Jelölje A_n azt az eseményt, hogy n lap között van SET ($n \in \mathbb{N}^*$).

Nyilvánvaló, hogy $P(A_1) = P(A_2) = 0$, hiszen 3 lap kell ahhoz, hogy SET-et kapjunk, továbbá $P(A_n) = 1$ minden $21 \leq n \leq 81$ esetén, mivel 21 kártya biztosan tartalmaz SET-et. $P(A_3)$ értékét már az előző feladatban kiszámoltuk:

$$P(A_3) = \frac{1}{79} \approx 0,013.$$

9. Példa. *Adjuk meg a valószínűségét annak, hogy $n = 4$ lap tartalmaz SET-et!*

Megoldás. $P(A_4)$ meghatározásához a teljes valószínűség tételét használjuk. B eseményt a következőképpen értelmezzük:

$B :=$ az összes lapból hármat kiválasztva SET-et kapunk.

Ekkor B és B^c teljes eseményrendszert alkot, és ahogy korábban megállapítottuk, $P(B) = \frac{1}{79}$ és $P(B^c) = 1 - P(B) = \frac{78}{79}$. A 4 kártyát úgy választjuk, hogy tetszőleges 3 laphoz hozzáveszünk véletlenszerűen még egyet. A teljes valószínűség tétele alapján

$$P(A_4) = P(A_4|B)P(B) + P(A_4|B^c)P(B^c).$$

$P(A_4|B) = 1$, mivel B esemény már garantálja a SET létezését.

$P(A_4|B^c)$ kiszámítása:

Tegyük fel, hogy B nem teljesül. Ebben az esetben a kiválasztott 3 lapból bármelyik 2 egyértelműen meghatároz egy SET-et, melyeknek a 3. lapja még a pakliban van. Ez $\binom{3}{2} = 3$ különböző kártyát jelent. Csak akkor kaphatunk SET-et, ha a maradék 78 lapból ez a 3 közül választjuk valamelyiket, tehát $P(A_4|B^c) = \frac{3}{78}$, és

$$P(A_4) = \frac{1}{79} + \frac{3}{78} \cdot \frac{78}{79} = \frac{4}{79} \approx 0,051.$$

■

Bizakodunk abban, hogy ez a tanulmány felkeltette Önben, mint olvasóban az érdeklődést a játék köré épített, játékon alapuló matematikai gondolkodásfejlesztés iránt, és arra inspirálja, hogy kipróbálja, alkalmazza a matematika oktatása során.

Irodalomjegyzék

- [1] Davis, Benjamin Lent – Maclagan, Diane 2003. *The Card Game SET*. The Mathematical Intelligencer. **25**, no. 3
- [2] Deme-Farkas Rita 2008. *Variációk a SET témájára*. Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok.
<https://www.komal.hu/cikkek/2008-02/SET.h.shtml>
- [3] Edel, Yves – Ferret, Sandy – Landjev, Ivan – Storme, Leo 2002. *The classification of the largest caps in AG(5, 3)*. Journal of Combinatorial Theory. Series A. **99**. 95–110.
- [4] Pellegrino, Giuseppe 1971. *Sul massimo ordine delle calotte in S_{4,3}*. Matematiche (Catania). 25:149?157.
- [5] Sztojkovics Dóra 2019. *A SET kártyajáték alkalmazása a kombinatorika és a valószínűségszámítás oktatásában*. Pécsi Tudományegyetem Természettudományi Kar. (OTDK dolgozat)
Elektronikus és internetes forrás:
- [6] *Mathematics Workbook*. <https://www.setgame.com/math-workbook> (2015.)
- [7] Vinci, Jim 2009. *Investigations into the Card Game SET*.
<https://www.setgame.com/sites/default/files/teacherscorner/SETPROOF.pdf>
- [8] <https://www.setgame.com/founder-inventor>