

## A reprezentációváltás mint heurisztikus problémamegoldási stratégia taníthatóságáról 2.

NAGY ÖRS

### 1. A fejlesztés folyamata és értékelése 2.

#### 1.1. Geometriai problémák - algebrai eszközök

A második stratégia szemléletében az előzőnek éppen a fordítottja: geometriai szövegezésű feladatok algebrai eszközökkel való megközelítése. Célom ennek a stratégiának a tanításával annak illusztrálása volt, hogy tipikusan geometriai szövegezésű feladatok megoldása, néha algebrai eszköztár bevetését kívánja.

**A Descartes-féle koordináta-rendszer felhasználása.** Az analitikus mértan a geometriának az algebrahoz legközelebb álló része, tulajdonképpen egyfajta algebra, hiszen a koordináta-rendszer megfelelő megválasztása után, az objektumok közötti geometriai viszony algebrai eszközökkel vizsgálható. A nyilvánvalóság kizárása érdekében igyekeztem olyan mértanfeladatokat választani, amelyek szövegezése nem árulkodik koordináták bevezetéséről, tehát nem szerepelnek benne például koordinátákkal megadott pontok. Így a feladatok megoldása során a nehézséget minden esetben inkább a vizsgált alakzatoknak a koordináta-rendszerben való megfelelő elhelyezése okozta. A tanulmányozott objektumok rögzítése után, az azok közötti viszonyok leírása és a kért összefüggések bizonyítása már egyszerűbben ment.

**A Gauss-féle komplex számsík alkalmazása.** A komplex számok segítségével megoldható feladatok tulajdonképpen minden esetben koordinátageometriai eszközökkel is megoldhatók, hiszen a Gauss-féle komplex számsík és a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer ekvivalenciája miatt egy pont affixumának<sup>1</sup> valós, illetve imaginárius része egyenértékű annak koordinátaival.

Ennek ellenére bizonyos esetekben, főleg ha a feladatban valamilyen objektumok elforgatása szerepel, célszerűbb a komplex számsíkon dolgozni, hiszen két komplex szám szorzata geometriailag forgatva nyújtásnak felel meg. Így aztán forgatások

---

<sup>1</sup>komplex koordináta

segítségével sok esetben könnyen igazolható valamilyen alakzat szabályos volta vagy két egyenes merőlegessége, esetleg párhuzamossága.

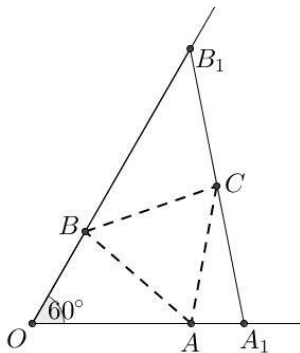
### A stratégiát szemléltető példa.

**Feladat.** Egy  $60^\circ$ -os szög egyik szárán elhelyezkedő  $A$ , illetve  $A_1$  pontoknak a szög csúcsától mért távolsága  $p$ , illetve  $2q$ ; a másik száron elhelyezkedő  $B$ , illetve  $B_1$  pontoknak a csúctól mért távolsága pedig  $q$ , illetve  $2p$ . Az  $[A_1B_1]$  szakasz felezőpontja  $C$ . Milyen természetű az  $ABC$  háromszög?

#### Segítő kérdések:

- Mi van megadva és mit kér a feladat? Készíts ábrát!
- Ki tudnád számítani a pontok affixumait az adatok segítségével?
- Meg tudnád fogalmazni valamilyen sejtést a keletkező háromszög természetére vonatkozóan?
- Hogyan tudnád bizonyítani ezt? Milyen lehetőségek vannak? Melyik előnyös, melyik kevésbé az?

**Megoldás:** Az egyszerűség kedvéért legyen a szög csúcsa az origóban, az  $[OA]$  szára pedig legyen a valós tengely. A másik szár ennek  $60^\circ$ -kal való elforgatottja pozitív trigonometrikus irányba.



Ábra. A szögtartományban levő háromszög

Ha a forgatás egységét

$$\epsilon = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \epsilon^3 = -1$$

jelöli, akkor

$$a = p, \quad a_1 = 2q, \quad b = q \cdot \epsilon, \quad b_1 = 2p \cdot \epsilon.$$

Mivel  $C$  az  $[A_1B_1]$  felezőpontja, ezért  $c = p \cdot \epsilon + q$ .

**1. módszer.** Az  $ABC$  háromszög szabályos, ha például  $B$  a  $C$  pontnak az  $A$  pont körüli  $+60^\circ$ -kal való elforgatottja, azaz

$$b - a = (c - a) \cdot \epsilon.$$

A fölirt affixumokat behelyettesítve

$$q \cdot \epsilon - p = (p \cdot \epsilon + q - p) \cdot \epsilon,$$

$$p(\epsilon^2 - \epsilon + 1) = 0,$$

ami igaz, mert  $\epsilon^3 = -1$  miatt  $\epsilon^2 - \epsilon + 1 = 0$ .

**2. módszer.** Az affixumok értékét behelyettesítjük a szabályos háromszög csúcsainak affixumaira vonatkozó szükséges és elégséges feltételbe. Ekkor

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 \cdot \epsilon^2 + p^2 \cdot \epsilon^2 + 2pq \cdot \epsilon + q^2 &= \\ = pq \cdot \epsilon + pq \cdot \epsilon^2 + q^2 \cdot \epsilon + p^2 \cdot \epsilon + pq. \end{aligned}$$

Ezt rendezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} p^2(\epsilon^2 - \epsilon + 1) + q^2(\epsilon^2 - \epsilon + 1) &= pq(\epsilon^2 - \epsilon + 1), \\ (p^2 - pq + q^2)(\epsilon^2 - \epsilon + 1) &= 0, \end{aligned}$$

ami igaz, mert  $\epsilon^3 = -1$  miatt  $\epsilon^2 - \epsilon + 1 = 0$ .

**Megjegyzés:** A megfelelő modell megtalálása után a megoldás technikai kivitelezésével többnyire önállóan boldogultak a diákok, és a háromszög szabályosságának mindkét módon való igazolása előfordult a megoldásaikban. Akik nem voltak teljesen biztosak a forgatások felírásában, inkább a 2. módszert, az azonosságba való behelyettesítést részesítették előnyben. Végül a feladat hasonló háromszögeken alapuló szintetikus geometriai bizonyítására is kitértünk.

## 1.2. Alkalmas függvény keresése

Céлом ennek a stratégiának a bemutatásával annak tudatosítása volt a diákokban, hogy a romániai középiskolai tananyag központi elemének számító függvény fogalma és az arra épülő matematikai analízis nem elszigetelt tudományterület, hanem egy lehetséges és gyakran nagyon hasznos eszköz az problémamegoldás során. Lássák a diákok, hogy a matematika különböző területeinek az összekapcsolása hasznos és sok esetben nélkülözhetetlen a nem sablonszerű problémák eredményes megoldása érdekében.

**Elemi függvények tulajdonságainak felhasználása.** Egyszerűnek tűnő egyenletek megoldása(i) gyakran viszonylag könnyen kitalálható(k), viszont az unicitás bizonyítása elemi eszközökkel már nem mindig lehetséges. Ilyenkor valamilyen alkalmas függvény bevezetése és értelmezési tartományának, ill. értékkészletének tanulmányozása vagy a függvény injektív, monoton, konvex/konkáv tulajdonságának felhasználása lehet eredményes. Geometriai szélsőérték-problémák esetén a megfelelő elemi becslés okozhat nehézséget, ám ez gyakran valamilyen alkalmas függvény korlátosságának belátásával vagy éppen szélsőértékeinek kiszámításával elkerülhető.

**A matematikai analízis elemeinek alkalmazása.** A differenciál- és integrálszámítás a 11., illetve 12. osztályos romániai matematikatanítás központi eleme, így hangsúlyosan végigkíséri e két évfolyam tananyagát. A számtalan elemi, de akár többszörösen összetett függvény deriválása és a különböző integrálszámítási technikák mellett, a terület-, térfogatszámítást és bizonyos sorozatok határértékének meghatározását leszámítva, kevés idő jut az analízis eszközeinek akár a matematikán belüli alkalmazásaira. E hiány pótlása érdekében végül olyan problémákat tanulmányoztunk, melyek megoldása igen egyszerű differenciál-, esetleg integrálszámítás bevonásával.

**A stratégiát szemléltető példa.**

**Feladat.** Oldd meg az  $\begin{cases} x - \sqrt{y} = 1 \\ y - \sqrt{z} = 1 \\ z - \sqrt{x} = 1 \end{cases}$  egyenletrendszert!

**Segítő kérdések:**

- Milyen szerkezetűek a rendszer egyenletei? Mit veszel észre?
- Át tudnád alakítani a rendszert? Hogyan tudnád kifejezni az egyik ismeretlent?
- Fel tudnál írni a három egyenlet alapján egy olyan egyenletet, amelyben csak az egyik ismeretlen szerepel?
- Milyen alakú ez az egyenlet? Mi következik ebből?

**Megoldás:** Mivel az egyenletekben csak két-két ismeretlen szerepel, ezért mindegyikből kifejezve az elsőfokú tagot, majd egymásba helyettesítve egy egyismeretlenes egyenletet kapunk:

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{y} \\ y = 1 + \sqrt{z} \\ z = 1 + \sqrt{x} \end{cases} \implies x = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}.$$

Tekintsük az

$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 + \sqrt{x}$$

függvényt. Ekkor a fenti egyenlet  $f(f(f(x))) = x$  alakba írható, és az  $f \circ f \circ f$  függvény fixpontját keressük. Mivel  $f$  szigorúan növekvő, ezért

$$f(f(f(x))) = x \iff f(x) = x \iff 1 + \sqrt{x} = x, \quad x \geq 1,$$

ahonnan rendezés, majd négyzetre emelés után kapjuk, hogy  $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ , de az egyenletnek csak az  $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$  megoldása. Tehát  $M = \left\{ \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \right\}$ .

**Megjegyzés:** A feladat megoldásában az alábbi tulajdonság egy sajátos esetét használtuk, miszerint, az  $f$  szigorúan növekvő függvény fixpontja megegyezik az  $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-szer}}$  függvény fixpontjával. A megoldás során elemeztük a szigorú növekedés szükséges voltát.

## 2. Az utómérés anyaga és értékelése

A három hónapos tevékenységsorozatot követően a diákok egy zárómérésen vettek részt. Az előteszthez hasonlóan 90 perc alatt három, számukra ismeretlen problémát kellett minél részletesebben és akár többféle módszerrel megoldaniuk. A feladatok a következő képességek mérésére szolgáltak:

- kísérletezés alapján történő sejtések megfogalmazása, majd azok bizonyítása
- különböző reprezentációkban való gondolkodás, vizuális problémareprezentációk alkotása, elemzése
- a transzformációelv mint általános heurisztikus eljárás alkalmazása

Ezek mellett a diákoknak a problémamegoldási folyamatot végigkísítő tudatos metakognitív tevékenységének változására, fejlődésére is kíváncsi voltam.

### 2.1. A feladatok

1. Határozd meg az  $x^2 + y^2$  kifejezés lehetséges legkisebb értékét, ha  $5x + y = 7$  és  $x, y \in \mathbb{R}$ .
2. Határozd meg a  $2xy + 2yz + xz$  kifejezés értékét, ha az  $x, y, z > 0$  számok teljesítik a  $3x^2 + 4y^2 + 6xy = 169$ ,  $4y^2 + z^2 - 2yz = 25$ ,  $3x^2 + z^2 + 3xz = 144$  összefüggéseket!
3. Oldd meg a  $(2^x - 1)^2 = \log_2(\sqrt{x} + 1)$ ,  $x \geq 0$  egyenletet!

### 2.2. A feladatok értékelése

Az első feladat esetén arra voltam kíváncsi, hogy a diákoknak eszükbe jut-e az algebrai szélsőérték-feladat geometriai úton való szemléletesebb megoldása az algebrai megoldáshoz képest, illetve hányan próbálkoznak esetleg mindkét módszerrel. A diákok eredményeit összesítő táblázat:

|                         | Középiskolás tanuló    | Egyetemi hallgató      |
|-------------------------|------------------------|------------------------|
| Teljes, helyes megoldás | 10/23 $\approx$ 43,48% | 14/24 $\approx$ 58,34% |
| Ebből geometriai úton   | 4/23 $\approx$ 17,4%   | 6/24 $\approx$ 25%     |
| Geometriai gondolat     | 13/23 $\approx$ 56,52% | 16/24 $\approx$ 66,67% |
| Hibás megoldás          | 13/23 $\approx$ 56,52% | 10/24 $\approx$ 41,66% |

A második feladattal azt szándékoztam mérni, hogy egy algebrai szövegezésű feladat esetén eszükbe jut-e a diákoknak vizuális geometriai modell készítése, majd annak felhasználása a probléma sikeres megoldása érdekében.

|                     | Középiskolás tanuló    | Egyetemi hallgató      |
|---------------------|------------------------|------------------------|
| Tökéletes megoldás  | 8/23 $\approx$ 34,78%  | 10/24 $\approx$ 41,67% |
| Helyes geom. modell | 11/23 $\approx$ 47,82% | 13/24 $\approx$ 54,16% |
| Geometriai gondolat | 16/23 $\approx$ 69,56% | 18/24 $\approx$ 75%    |
| Semmilyen modell    | 7/23 $\approx$ 30,44%  | 6/24 $\approx$ 25%     |

A 3. feladat kitűzésével azt szándékoztam mérni, hogy a diákok milyen mértékben használnak függvényteni eszközöket egyenletek megoldása során. Konkrétan eszükbe jut-e az egyenlet két oldalán álló kifejezésekről igazolni azok szigorú konvexitását, illetve konkavítását, ezáltal belátva, hogy maximum két megoldás lehet, így azokat ki lehet találni. Esetleg észreveszik-e, hogy a két kifejezés egymás inverze, így az egyenlet egyszerűbb, könnyebben megoldható alakra hozható.

|                      | Középiskolás tanuló   | Egyetemi hallgató      |
|----------------------|-----------------------|------------------------|
| Tökéletes megoldás   | 6/23 $\approx$ 26,1%  | 10/24 $\approx$ 41,67% |
| Megoldás megsejtése  | 19/23 $\approx$ 82,6% | 18/24 $\approx$ 75%    |
| Inverzek észrevétele | 4/23 $\approx$ 17,4%  | 14/24 $\approx$ 58,33% |
| Sejtés sincs         | 4/23 $\approx$ 17,4%  | 6/24 $\approx$ 25%     |

### 2.3. A mérések statisztikai összehasonlítása

Az utómérés eredményei egyértelműen igazolják a foglalkozások fejlesztő hatását úgy a középiskolások, mint az egyetemi hallgatók körében.

| Tökéletes megoldások | Középiskolás tanuló    | Egyetemi hallgató      |
|----------------------|------------------------|------------------------|
| Előteszt             | 6/69 $\approx$ 8,7%    | 12/72 $\approx$ 16,67% |
| Utóteszt             | 24/69 $\approx$ 34,78% | 34/72 $\approx$ 47,22% |

Lényegesnek tartom, hogy sokkal szembetűnőbb a pozitív változás a feladatok szövegezésétől eltérő megoldásmód, problémareprezentáció keresésére tett kísérletek számát tekintve.

| Más reprezentációk | Középiskolás tanuló    | Egyetemi hallgató      |
|--------------------|------------------------|------------------------|
| Előteszt           | 4/69 $\approx$ 5,8%    | 9/72 $\approx$ 12,5%   |
| Utóteszt           | 33/69 $\approx$ 47,83% | 48/72 $\approx$ 66,67% |

Jól látható, hogy jelentősen nőtt azok száma, akik esetleg figyelmetlenség, gyakorlatlanság, vagy éppen az adott probléma megkövetelte tárgyi tudás hiánya miatt

nem oldották meg teljesen a illető feladatot, de többféle szemszögből megközelítették azt. Az eredmények egyértelműen mutatják a foglalkozások pozitív hatását a diákok gondolkodásában végbement szemléletváltozás, gazdagodás tekintetében.

A foglalkozások fejlesztő hatását a két mérés statisztikai összehasonlítása révén is elemeztem. Minden diák mindkét mérésen minden feladatára aszerint, hogy megoldotta, használható sejtése/modellje volt, vagy semmi érdemlegeset sem sikerült kezdenie az adott feladattal, 2, 1, illetve 0 pontot kapott. Azok a diákok, akik legalább két eltérő megoldást is adtak egy problémára plusz 1 pontot kaptak az illető feladatra. Így minden diák mindkét teszten 0 és  $3 \cdot (2 + 1) = 9$  pont közötti minősítést kapott.

Az elő- és utómérés során kapott adatok normalitását kvartilis-kvartilis diagram segítségével grafikusan vizsgáltam ( $\sigma = 1,85$ ,  $m = 1,84$ , ill.  $\sigma = 2,24$ ,  $m = 3,9$ ), majd F-próba segítségével ellenőriztem, hogy a két adatsor szórása szignifikánsan nem tér el egymástól, végül a két adatsor átlagának szignifikáns eltérését egymintás párosított T-próbával ellenőriztem. Ez mindkét csoport eredményeinek szignifikáns növekedését mutatta. ( $p_{isk.} = 0,0006$ , illetve  $p_{egy.} = 0,0001$ )

### 3. Véggövetkeztetések

#### 3.1. A hipotézisek igazolása

A diákok elő- és utómérésen közölt megoldásait összevetve, főleg az egyetemi hallgatók esetén egyértelmű változás figyelhető meg a problémamegoldási folyamatot végigkísérő metakognitív tevékenységük tekintetében is. Mindkét korosztály, de főleg az egyetemi hallgatók dolgozataiból az is kiderül, hogy nagy részük tudatosabban alkalmazza a különböző problémamegoldási heurisztikákat, illetve részletesebben számol be a feladatmegoldási folyamat során felvetődött ötleteiről, próbálkozásairól.

A fentiek és az előző rész alapján kijelenthető, hogy a foglalkozásoknak fejlesztő hatása volt, és a kutatás igazolta az elején fölállított hipotéziseimet:

- megfelelő tananyaggal a diákok problémamegoldó képessége fejleszthető
  - a diákok tananyagrészek-összekapcsoló, -szintetizáló képessége fejleszthető
  - a diákok vizuális problémareprezentáció-készítési és transzformációelv alkalmazási képessége fejleszthető
- a problémamegoldási heurisztikák tanítása révén a diákoknak a problémamegoldás során alkalmazható eszköztára bővíthető

### 3.2. Továbblépési lehetőségek

A problémamegoldási képesség eredményes fejlesztése csak hosszan tartó, szerteágazó és folyamatos munkával valósítható meg. Általános és középiskolás korban ennek legfőbb meghatározó tényezői az iskolai és az otthoni munka. Ezért nagyon fontos, hogy az osztályban való munka, nemcsak matematika, hanem egyéb órán is milyen szellemben zajlik. Emiatt szükségesnek tartom a heurisztikus problémamegoldási stratégiák explicit tanítását és tudatosítását nemcsak a szakkörök diákközönsége körében, hanem osztályszinten, a mindennapokban is. Továbblépésként egyik célom ennek megvalósítása lenne. Másik célom a fejlesztő tevékenységek feladatanyagának - amennyire lehetséges - a mindennapi matematikaóráim tananyagába való beépítése, valamint az érintett témakörök kibővítése más heurisztikus eljárásokra is kitérve.

Az egyetemi hallgatók körében végzett mérések ugyancsak azt mutatják, hogy számukra is fontos lenne akár egy választható problémamegoldó szeminárium hasonló témakörben.

### Irodalomjegyzék

- [1] Kosztolányi József: *A problémamegoldási stratégiák tanításáról*, PhD értekezés, Debreceni Egyetem, 2006
- [2] Pintér Klára: *A matematikai problémamegoldás és problémaalkotás tanításáról*, PhD értekezés, Szegedi Tudományegyetem, 2012
- [3] Schoenfeld, Alan H.: *Problem Solving in the Mathematics Curriculum*, MAA Notes, 1983

#### Felhasznált feladatgyűjtemények

- [4] András Szilárd: *A matematika tanítása*, Státus Kiadó, Csíkszereda, 2009
- [5] Andrică Dorin și col.: *Geometrie pentru grupele de performanță*, Editura Studia, Cluj-Napoca, 2010
- [6] Czapáry Endre, Czapáry Endréné, Csete Lajos, Hegyi Györgyné, Irányiné Harró Ágota, Morvai Éva, Reiman István: *Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.*, Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó, Budapest, 2005
- [7] Engel, Arthur: *Probleme de matematică - Strategii de rezolvare*, Editura Gil, 2006
- [8] Olosz Ferenc: *Egyenletek I-II.*, Zalamat Alapítvány, Nagykanizsa, 2012
- [9] Petrușel Adrian și col.: *Algebră pentru grupele de performanță*, Editura Studia, Cluj-Napoca, 2010
- [10] Pop Vasile, Lupșor Viorel și col.: *Matematică pentru grupele de performanță. Exerciții și probleme, clasa a IX-a*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 2004



- [11] Pop Vasile, Lupșor Viorel și col.: *Matematică pentru grupele de performanță. Exerciții și probleme, clasa a X-a*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 2004
- [12] Reiman István, Dobos Sándor: *Nemzetközi matematikai diákolimpiák 1959-2003*, Typotex kiadó, Budapest, 2003
- [13] Reiman István: *Fejezetek az elemi geometriából*, Typotex kiadó, Budapest, 2002
- [14] Reiman István: *Geometria és határterületei*, Szalay Könyvkiadó és Kerereskedőház, Kisújszállás, 1999
- [15] Tudor Victor: *Probleme de algebră cu rezolvări ingenioase*, Editura Carminis, Pitești, 1999

