

## Függvényegyenletek középiskolában

LUDÁNYI LEVENTE, MATOS ZOLTÁN

### 1. Bevezető

A 2020. január 31-én megjelent Nemzeti Alaptantervhez kapcsolódó magyarországi tananyagreform nem ír elő kerettantervet a speciális matematika tagozatok számára, így a középfokú intézmények ezen osztályaiknál hatalmas szabadságot kaptak. Ilyen esetben azonnal felmerül a kérdés, mit érdemes itt tanítani? Mivel tudjuk az eddigi oktatásunkat megújítani, jobbá tenni, más országokban már bevált irányhoz közelíteni?

Bármeekkora szabadságot is kapjon a középiskola, több dolgot érdemes figyelembe vennie egy új téma bevezetésénél. Egy matematikatanár számára azonnal kérdésként merülhet fel, hogy az új téma mennyire kapcsolódik a többi matematika tananyaghoz, segíti-e azok begyakorlását vagy mélyebb megértését, nem haladja-e meg a diákok absztrakciós szintjét? Ezek mellett fel kell tenni a tanulók olyan gyakorlati igényei számára fontos kérdéseket, mint például használható-e ez a téma hazai és/vagy nemzetközi versenyeken, felhasználható-e más tantárgyak tanulásánál?

A következő írás a függvényegyenletek középiskolai tananyagba történő beépíthetőségét e kérdések mentén haladva vizsgálja meg.

### 2. Függvényegyenletek kapcsolata a középiskolai törzsanyaggal

A középiskolai törzsanyagban sok olyan fogalom szerepel, amely átfogalmazható függvényegyenleti problémára, így egy erre tudatosan figyelő tanár számára lehetőség van több fogalom vagy feladat ilyenfajta megfogalmazására is. Ez a több irányú megközelítés pedig az adott téma mélyebb megértését, valamint a hosszú távú memóriába történő rögzülését is segíti. Az erre vonatkozó kutatások eredményeit Szendrei Julianna a következőképp összegzi: *„Az találták, hogy ismétlésen kívül a több szempontú megközelítés segítette leginkább a hosszú távú memóriába*

való rögzítést, valamint a tanultaknak problémaszituációkban való alkalmazását.” ([3] 186. o.)

A következő példák mindegyike (a függvényegyenletek külön modulban történnő tanítása nélkül is) megemlíthető például egy emelt szintű érettségire felkészítő fakultációs csoportban.

**1. Példa. (Függvénytulajdonságok értelmezése)** A valós számok halmazán értelmezett függvényt párosnak, illetve páratlannak nevezzük, ha megoldása az  $f(-x) = f(x)$ , illetve  $f(-x) = -f(x)$  függvényegyenletnek.

**2. Példa. (Sorozatok megadása)** Egy rekurzív módon definiált sorozat explicit megadása tekinthető úgy, mint egy pozitív egész számok halmazán értelmezett függvényre felírt függvényegyenlet megoldása.

Így például az a feladat, hogy adjuk meg az  $a_1 = 1$  és  $a_{n+1} = 2a_n + 1$  rekurzív úton definiált sorozat explicit alakját ( $a_n = 2^n - 1$ ) megfogalmazható úgy is, hogy adjuk meg azt az  $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt, amelynél bármely  $n \in \mathbb{Z}^+$  esetén teljesül, hogy  $f(n+1) = 2f(n) + 1$  és amelyre  $f(1) = 1$ . (Megoldás:  $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 2^x - 1$ )

**3. Példa. (Számítási sorozat fogalma)** A számítási sorozat fogalmát a „függvényegyenletek nyelvén” a következőképp fogalmazhatnánk meg:

Az  $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt számítási sorozatnak nevezzük, ha megoldása az  $f(n+1) = f(n) + d$  ( $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $d \in \mathbb{R}$ ) egyenletnek.

Hasonló módon, akár a mértani sorozatra is adható „függvényegyenletes definíció”.

**4. Példa. (Teljes indukció)** „Az  $a_n$  sorozatot a következő módon definiáljuk:  $a_1 = 1$ ,  $a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$ , ha  $n > 1$ . Határozzuk meg  $a_{2005}$  értékét!” (Nemzetközi magyar matematikai verseny – 2005.)

A feladat átfogalmazható, s kitűzhető függvényegyenletes alakban is: A pozitív egész számok halmazán értelmezett  $f$  függvényről a következőket tudjuk.  $f(1) = 1$  és  $f(n) = \frac{n+1}{n-1}(f(1) + f(2) + \dots + f(n-1))$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$  esetén. Határozzuk meg  $f(2005)$  értékét!

A sorozat első néhány elemének felírása után megsejthető az általános tag ( $a_n = (n+1)2^{n-2}$ ), amit aztán teljes indukcióval bizonyíthatunk. Az ilyen típusú feladatok nagyban színesíthetik a teljes indukciós órákat. Az pedig, hogy a „Bizonyítsa be teljes indukcióval, hogy...” típusú zárt feladatmegfogalmazáshoz képest a feladatmegoldónak magának kell megsejtenie a bizonyítandót, mindenképpen minőségbeli különbséget jelent.

**5. Példa. (Algebrai azonosságok)** A hatvány, gyök, logaritmus témakör összefoglalásakor vagy érettségi előtti rendszerző ismétlésekor feltehető az a kérdés, hogy

mely folytonos függvények tesznek eleget az alábbi egyenleteknek:

$f(xy) = f(x)f(y)$  bármely  $x, y \in \mathbb{R}$  esetén. (Ennek megoldása például az  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ )

$f(x+y) = f(x)f(y)$  bármely  $x, y \in \mathbb{R}$  esetén. (Ennek megoldása például az  $f(x) = 2^x$ )

$f(xy) = f(x) + f(y)$  bármely  $x, y \in \mathbb{R}^+$  esetén. (Ennek megoldása például az  $f(x) = \log_4 x$ )

A korábbi példákkal ellentétben ez utóbbinak azért is van nagy jelentősége, mert a diák számára egymástól idegennek tűnő témaköröket (függvények és a hatvány, gyök, logaritmus fejezetet) kapcsol össze. Ezen felüli előnye, hogy rávilágít arra, hogy ezek az azonosságok függvénytulajdonságként is értelmezhetők.

Saját tapasztalat, hogy az előbbi három kérdés egymás utáni föltételénél az elsőre ritkán akad diák, aki válaszolni tudna, s ha mégis, akkor leginkább az  $f(x) = x$  függvény jut eszébe. Viszont a választ látva, a második kérdésre, már sokaktól, az utolsóra pedig szinte az egész csoporttól pillanatok alatt születik helyes válasz.

Fontos megemlíteni, hogy ilyenkor a diákoktól csupán egy-egy alkalmas függvény megtalálását várjuk. Szakköri foglalkozáson azonban a feladat általános megoldásával és diszkussziójával is érdemes foglalkozni (pl. Van-e megoldása a harmadik egyenletnek  $x, y \in \mathbb{R}$  esetén?). Ehhez kiválóan használhatók [2] utolsó fejezetének feladatai.

### 3. Függvényegyenletek megoldása során használt, a törzsanyagban is szereplő témakörök

Bizonyos típusú függvényegyenletek megoldásához szükséges matematikai eszközökkel a diákok ab ovo rendelkeznek, így ennek a témának egy bevezető jellegű tárgyalása semmiképpen sem nevezhető túl korainak a középiskolás korban.

Hazai matematikaversenyeken az elmúlt évtizedekben többször fordultak elő olyan függvényegyenletek, amelyek az argumentumok helyettesítésével voltak megoldhatók.

Ilyen az  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  ( $E \subseteq \mathbb{R}$ ) ismeretlen függvényre  $x \in E$  esetén teljesülő egyenlettípus:

$$a_1(x)f(x) + a_2(x)f\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) = g(x) \quad (cx-a \neq 0).$$

Itt az  $x \rightarrow \frac{ax+b}{cx-a}$  helyettesítéssel kapott egyenlet – mivel az argumentumok másodrendű csoportot alkotnak a függvények összetételével – az eredeti egyenlettel

kiegészítve egy kétismeretlenes egyenletrendszert ad, amely megoldása adja az eredeti függvényegyenlet megoldását. Ez az egyenletstípus ( $a_1(x)$ -et és  $a_2(x)$ -et konstansnak választva) a középszintű érettségi követelményben is előforduló lineáris kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásához vezet.

Például adjuk meg a valós számok halmazán értelmezett  $f$  függvényt, amelyre igaz, hogy

$$(1) \quad 2f(x) + 3f(2-x) = -3x - 7$$

Az argumentumok  $\left\{x; \frac{ax+b}{cx-a}\right\}$  típusúak ( $a = -1$ ;  $b = 2$ ;  $c = 0$ ), így végezzük el az  $x \rightarrow 2-x$  helyettesítést. A kapott egyenlet:

$$(2) \quad 2f(2-x) + 3f(x) = 3x - 13$$

(2) egyenlet 3-szorosából (1) egyenlet kétszeresét kivonva  $5f(x) = 15x - 25$  adódik, ahonnan  $f(x) = 3x - 5$ , ami valóban megfelel feladatunk feltételének.

Jól látható, hogy a feladat által igényelt eszközrendszer nem nyúlik túl a középszintű érettségi követelményén (pl. helyettesítés, kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldása) azt viszont egy merőben új helyzetben, s jelölésekkel alkalmazza (pl. az egyenletrendszerben nem  $x$  és  $y$  a két ismeretlen, hanem egy-egy függvény). Ebből adódóan a középiskolai tananyagban történő integrálása nem ró újabb megtanulandó fogalmakat, algoritmusokat a tanulókra, csupán a meglévő tananyagot gyakoroltatja. Ez a tény viszont egyértelmű igenlő választ ad arra a kérdésre is, hogy a diákok többsége rendelkezik-e ebben az életkorban bizonyos típusú függvényegyenletek megoldásához szükséges absztrakciós szinttel.

#### 4. Függvényegyenletek matematikaversenyeken

Függvényegyenletek témaköréről dr. Kántor Sándor jegyezte meg, hogy „*a tananyagban nem szerepel, de tanulmányi versenyen szinte mindig.*” ([1] 56. o.) Ezt alátámasztandó a következő összesítés azt mutatja be, hogy az utóbbi években hány alkalommal fordultak elő függvényegyenletekhez köthető feladatok magyarországi diákokat is érintő nemzetközi versenyen.

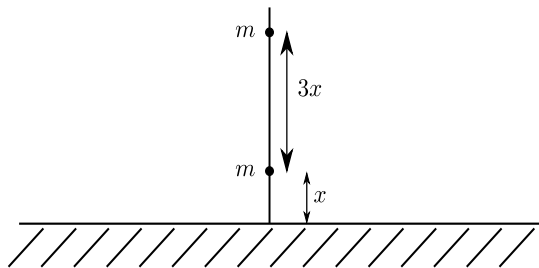
- IMO (International Mathematical Olympiad: 2000-től 2019-ig 11 alkalommal
- MEMO (Middle European Mathematical Olympiad): 2007-től 2019-ig minden évben
- EGMO (European Girls' Mathematical Olympiad): 2012-től 2020-ig 5 alkalommal
- NMMV (Nemzetközi Magyar matematikaverseny): 2000-től 2019-ig 9 alkalommal

Jól látszik, hogy valóban versenyeken gyakran elforduló témáról van szó, ami újabb indok a függvényegyenletek témakör tagozatos osztályok tanórai és normál osztályok szakköri foglalkozásaiba történő beépítésére.

## 5. Függvényegyenletek felhasználása más tantárgyak tanulásánál

A függvényegyenletek segítségével lehetővé válik, hogy nem csak a matematika, hanem más tantárgyak tananyagát is többféle megközelítésben tanulmányozzák középiskolás diákok. Példaként álljon itt egy, a fizika törzsanyagában szereplő össze-függés függvényegyenletek segítségével történő levezetése.

**Példa:** Középiskola elején megtanulhatjuk, hogyan mozog egy pontszerű test homogén (például gravitációs) erőterben. Az elmozdulás idő függvényében történő meghatározása után a sebesség és a gyorsulás is meghatározható az elmozdulás időszerinti deriváltjaiként. Mivel ezzel a teljes mozgást le tudjuk írni, ezért a cél az elmozdulás meghatározása az idő függvényeként. Zérus kezdősebességgel induló tömegpontokat vizsgálunk a feladat során, azonban koordinátarendszer váltással egy pontszerű test mozgása bármely kezdősebesség esetén visszavezethető erre, így a megoldásunk az általánosabb esetben is igaz lesz egy homogén erőterben mozgó tömegpontra.



1. ábra.

A kísérletet elvégezve az 1. ábrán látható nagyon egyszerű elrendezéssel azt tapasztaljuk, hogy a koppanások között azonos idő telik el. Így következő függvényegyenlethez jutunk:

$$f(2t) = 4f(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

ahol  $f$  az idő  $(t)$  függvénye, értéke pedig az elmozdulás.

Ez pedig speciális esete az

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

úgynevezett normanégyszet egyenletnek, amelyet kielégítő  $f$  függvényről a következők állapíthatók meg:

- $x = y = 0$  helyettesítéssel  $f(0) + f(0) = 2f(0) + 2f(0)$ , ahonnan  $f(0) = 0$ .
- $x = 0$  helyettesítéssel  $f(y) + f(-y) = 2f(0) + 2f(y)$ , ahonnan ( $f(0) = 0$  miatt)  $f(-y) = f(y)$ , vagyis  $f$  páros függvény.
- Mivel  $f(0) = f(0 \cdot x) = 0^2 \cdot f(x) = 0$ , és  $f(x) = f(1 \cdot x) = 1^2 \cdot f(x)$ , és  $x = y$  helyettesítéssel  $f(2x) + f(0) = 4f(x)$ , így ( $f(0) = 0$  miatt)  $f(2x) = 2^2 \cdot f(x)$ ,

ezért az a sejtésünk támadhat, hogy bármely  $n \in \mathbb{N}$  esetén

$$(*) \quad f(nx) = n^2 f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Ezt  $n$  szerinti teljes indukcióval tudjuk bizonyítani.

Belátjuk  $n = 0$ -ra és  $n = 1$ -re már beláttuk.

Tételezzük fel, hogy bármely  $k < n$ -re igaz a bizonyítandó egyenlőség, ahonnan belátjuk, hogy  $(n + 1)$ -re is igaz, azaz

$$f(nx + x) + f(nx - x) = 2f(nx) + 2f(x)$$

amit átrendezve

$$\begin{aligned} f[(n + 1)x] &= f(nx + x) = 2f(nx) + 2f(x) - f(nx - x) = \\ &= 2n^2 f(x) + 2f(x) - (n - 1)^2 f(x) = (n + 1)^2 f(x) \end{aligned}$$

vagyis állításunk valóban bármely  $n \in \mathbb{N}$  esetén teljesül.

Ezen ismeretek birtokában viszont  $f$  a következőképp határozható meg.

$$(*) \text{ egyenlet } x = 1 \text{ esetén } f(n) = n^2 f(1) \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(*) \text{ egyenlet } x = \frac{1}{n} \text{ esetén } f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = n^2 f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ ahonnan } f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} f(1) \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

(\*) egyenlet  $x = \frac{m}{n}$  ( $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ) esetén  $f\left(\frac{m}{n}\right) = n^2 f\left(\frac{m}{n}\right)$  ahonnan ( $n^2$ -tel való osztás után  $f(m) = m^2 f(1)$ -et kihasználva)  $f\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)^2 f(1)$  adódik, vagyis ha  $r \in \mathbb{Q}^+$ , akkor  $f(r) = r^2 f(1)$  alakú.

Mivel  $f$  páros, ezért  $f(-r) = f(r) = r^2 f(1) = (-r)^2 f(1)$  (ha  $r > 0$ ). Kiegészítve az elején kapott eredménnyel, miszerint  $f(0) = 0 = 0^2 \cdot f(1)$ , elmondható, hogy

$$f(r) = r^2 f(1) \quad (r \in \mathbb{Q})$$

Kihasználva a kapott egyenletet, az  $f$  függvény folytonosságát valamint, hogy tetszőleges  $x$  valós számhoz létezik hozzá konvergáló racionális számokból álló  $\{r_n\}$  sorozat kapjuk, hogy

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n^2 f(1) = x^2 f(1) = cx^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

ami bármely  $c \in \mathbb{R}$  esetén megoldása a normanégyszet egyenletnek.

Kérdésként merülhet fel, hogy miért tettük fel  $f$ -ről, hogy folytonos. A normanégyszet egyenlet megoldását kérő matematikatanár eleve a folytonos megoldások megtalálását tűzné ki feladatul. Ha viszont a példánk szövegének megfelelő fizikai megfontolásokból állítjuk fel az egyenletet, akkor elmondhatjuk, hogy  $f$  egy valóságos test hely-idő függvénye, amit a fizikában folytonosnak feltételezünk (nem lehet szakadása, hiszen egy test képtelen „teleportálni”).

Így megtaláltuk a test kitérését leíró függvényt, s kijelenthetjük, hogy ha egy (kellően kisméretű) test kezdősebesség nélkül szabadon esik, akkor az út-idő függvényének képe egy parabola lesz, aminek egyenlete  $f(t) = ct^2$  ( $c \in \mathbb{R}$ ), hiszen – ahogyan azt behelyettesítéssel ellenőrizhetjük – ez valóban megoldása az  $f(2t) = 4f(t)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) kiindulási egyenletünknek.

E példa azt is megmutatta, hogy matematikán kívüli tantárgy esetében is szükség lehet a függvényegyenletek megoldása során használt alábbi módszerekre:

- konkrét példákból született sejtés teljes indukcióval történő bizonyítása;
- a megoldásfüggvény folytonosságának kihasználása;
- a keresett függvényre valamely tulajdonságának meghatározása a változó értékének speciális választásával;
- a megoldásfüggvény páros/páratlan tulajdonságának kihasználása.

## 6. Összegzés

Fenti példáinkkal azt szeretnénk volna szemléltetni, hogy a Bevezetőben felsorolt kérdéseket vizsgálva a függvényegyenletek témakör ideális a matematika tagozatos tananyagba történő beépítésre, hiszen hatékonyan képes a matematikai ismereteket átadni szándékozó tanár, valamint a nemzetközi matematika versenyeken indulni kívánó, vagy fizika tanulmányokban elmélyedni szándékozó diákok munkáját segíteni. Ezen felül a saját csoportjai befogadó képességét ismerő tanár több olyan helyet is találhat a középiskolai törzsanyag tanítása során, ahol függvényegyenletekről közvetlenül vagy közvetett módon beszélhet.

A szerzők ez úton köszönik dr. Kocsis Imrénnek, a Debreceni Egyetem tanácskezes egyetemi professzorának, hogy írásunkat átolvasta, s megjegyzéseivel segítette.

## Irodalomjegyzék

- [1] Kántor Sándor, *Függvényegyenletek megoldási módszerei*, in. Talentumok a révkörmárami diáktalálkozókon. Studium, Debrecen, 2012.

- [2] Lajkó Károly, *Függvényegyenletek feladatokban*, 2. kiadás, DE Mat. Intézet, Debrecen, 2005.
- [3] Szendrei Julianna, *Gondolod, hogy egyre megy? Dialógusok a matematikatanításról*. Typotex, Budapest, 2005.
- [4] <https://www.egmo.org/egmos/egmo2/>
- [5] <https://nmmv.berzsenyi.hu/>
- [6] <https://www.imo-official.org/problems.aspx>

---

*Ludányi Levente, 12. osztályos tanuló, SZTE Gyakorló Gimnázium és Általános Iskola Szeged, Szentháromság utca 2., ludanyi.levente@gmail.com*

*Matos Zoltán, középiskolai tanár, SZTE Gyakorló Gimnázium és Általános Iskola Szeged, Szentháromság utca 2., matos@freemail.hu*