

Hexiamond, 2017

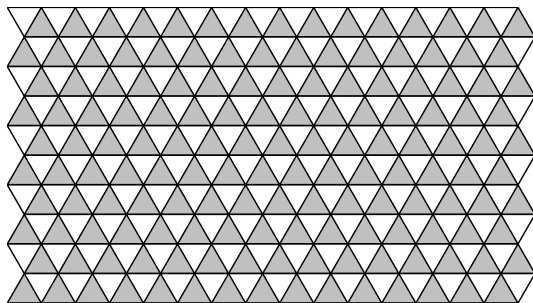
CSÁKÁNY BÉLA, MAKAY GÉZA

Poliominók és poliamondok. *Poliominó* minden véges számú egybevágó négyzetből álló összefüggő síkbeli alakzat, amelyet alkotó négyzetek mindegyike teljes oldalával csatlakozik legalább egyhez az alakzathoz tartozó további négyzetek közül. Ha ebben a mondatban „négyzet” helyett mindenütt „szabályos háromszög” áll, akkor a *poliamond* definícióját kapjuk. A poliominó szó és fogalom Solomon W. Golombtól ered, aki írásban először 1954-ben használta ([5]), a poliamond első előfordulása pedig Thomas H. O’Beirne 1961-ben megjelent [10] cikkében található. A szavak eredete alkotóik ötletességéről tanúskodik. Természetes módon nevezhetjük ugyanis a két négyzetből álló poliominót dominónak, másrészt görög vagy latin eredetű szavakban a „d” kezdőbetű gyakran kettősségre utal (dupla, dúális, dichotóm, stb.). Bár ez a két jelenség nyelvészek szerint nincs kapcsolatban egymással, könnyen megérthető és megjegyezhető, ha a 3, 4 és 5 négyzetből álló alakzatot az ismert görög számnevek kezdő betűi alapján trominónak, tetrominónak és pentominónak nevezzük, ha pedig a négyzetek számát nem adjuk meg, akkor poliominóról beszélünk (ahhoz hasonlóan, ahogyan az akárhány poligonnal határolt véges testet poliédernek mondjuk). Ugyanígy keletkezett a poliamond szó az angol „diamond”-ból, ami nem csak gyémántot jelent, hanem a francia kártya káró színét is így nevezik angolul; a káró jele pedig nagyon hasonlít két egymáshoz teljes oldalával csatlakozó szabályos háromszög alakjához. Megfelelő módon beszélünk triamondról, tetriamondról, pentiamondról és hexiamondról, amikor az egymáshoz csatlakozó szabályos háromszögek száma 3, 4, 5 és 6. Definícióinkból szándékosan hagytuk ki az egyetlen négyzetből vagy szabályos háromszögből álló alakzatot; ezeket nevezhetjük ugyan monominónak és moniamondnak, de a „poli-” előtagot használni rájuk furcsán hangzana. (Vö. monogámia és poligámia :-)

A poliominókra és poliamondokra vonatkozó alapvető ismereteket és feladatokat Golomb [6] és George E. Martin [8] könyveiben találhatjuk meg. Jelentős részüket magyar nyelven is hozzáférhető Gál Péter könyvében ([4], 31-80. o.), amelyből többek között kiderül, hogy a legérdekesebbek – mert eléggé változatosak, de még áttekinthetők – a pentominók és a hexiamondok, mindegyikből éppen 12 különböző

van, és a hexiamond-feladványok bizonyos jól meghatározott értelemben nehezebbek, mint a pentominó feladványok. Egy tipikus pentominó-feladvány: valamely rácsnégyszetektől álló tartomány *kitöltése* (más szóval *kirakása*), azaz egyszeres és hézagmentes lefedése különböző pentominókkal, amelyeket tetszőleges módon elforgatva és tükrözve is felhasználhatunk. Az ilyen feladványokat átalakíthatjuk hexiamond-problémákká négyszetek helyett háromszögeket, pentominók helyett hexiamondokat írva. Golombtól ered a kétszemélyes pentominó-játék ([6]): a játékosok váltakozva pentominókat tesznek le sakktábla üres mezőire; így a játék legfeljebb hat lépéspárból áll, és az nyer aki az utolsó pentominót teszi le. Lényegében ugyanilyen játékot játszhatunk szabályos háromszögrács alkalmas tartományán pentominók helyett hexiamondokkal.

Hexiamondok. Egyszerű, tíz év körüli gyerek számára is reményteljesen kitűzhető feladat a 12 pentominó felrajzolása számtanfűzet lapján. Hasonlóképpen a hexiamondok is felrajzolhatók háromszögrácsos papíron, amely az interneten triangular grid néven kereshető és letölthető. A tizenkét hexiamondot alkalmas méretben ollóval vagy tapétavágó késsel kivághatjuk, és hexiamond-feladványokat oldhatunk meg segítségükkel. A kézi munkákat kedvelők vastag kartonból készíthetnek hexiamond-táblát, a kartontól eltérő színű papírból kivágott háromszögeket ragasztva rá az 1. ábrán látható módon. A színeket egyszerűség kedvéért — épp úgy, mint a sakktáblán — világosnak és sötétnek fogjuk nevezni. Ábránkon a sötét háromszögek csúccsal felfelé, a világosak csúccsal lefelé állnak (másképpen: élen, ill. csúcson állnak); megállapodhatunk abban, hogy mindig ilyen állású táblát használunk. A hexiamondokat a táblához hasonló vastagságú műanyag-lapokból vághatjuk ki. Kíváncsi, hogy ezek két oldala azonos, de a táblán láthatóktól eltérő színű legyen. A legelegánsabb persze a fából készített hexiamond-készlet. Erre vonatkozóan érdemes elolvasni [4] 7. fejezetét.



1. ábra

Hexiamond-feladatokat képernyőn is kitűzhetünk és megoldhatunk a jelen cikk

olvasói (és barátaik, tanítványaik) számára készült programmal, amely a

(1) <http://www.math.u-szeged.hu/~makay/Hexiamond/>

webhelyen található, és feladatok összes megoldásainak megtalálására (tehát feladatok megoldhatatlanságának igazolására is) alkalmazható. További lehetőségek: Thimo Rosenkranz 2014-ben készült, a [14] webhelyről letölthető hexiamond-programja a szabályos háromszögrácsal ellátott síkon bármely 72 háromszögből álló alakzat minden olyan lényegesen különböző kitöltését megadja, amelyben mindegyik hexiamond szerepel. Mindkét program mutatja a lehetséges lényegesen különböző kitöltések számát is; így nevezünk két kitöltést, ha nem kaphatók meg egymásból forgatással és tükrözéssel. Látni fogjuk, hogy ez a szám váratlanul nagy is lehet. Gerd Müller 2015-ben közzétett, a [9] webcímen elérhető programjával hexiamondokból kedvünk szerinti alakzatokat rakhatunk ki. E programok létezése és elérhetősége épp úgy nem teszi érdektelenné a hexiamond-feladványok saját fejjel és kézzel történő megoldását, ahogyan a sakkprogramok sem a sakktfeladványokon való, tábla melletti fejtörést.

Célszerű, és ha nem egymagunkban gondolkodunk róluk, elengedhetetlen is a hexiamondoknak az alakjukat felidéző nevet adni. Ezt már O’Beirne megtette; elnevezéseinek magyar fordítását az alábbi táblázat második sora¹ mutatja. Gál Péter több esetben azoktól eltérő nevet használ. Hasonlóképpen mi is; ezeket megfelelően a táblázat harmadik és negyedik² sorában találjuk.

kígyó	lepke	kőnyök	horog	korona	rangjelcsík	jelzőtábla	szfinx	vitorlás	rák	pult	hatszög
kígyó	lepke	golfütő	cipő	korona	bumeráng	pisztoly	szfinx	vitorlás	rák	bot	hatszög
kígyó	lepke	mécses	cipő	süveg	tompa	pisztoly	macska	gálya	hegyes	pálca	kerek

Hexiamond-feladványok. Az első ilyen feladványokat még a „hexiamond” név bevezetése előtt tette közzé Reeve és Tyrrell ([13]). Ezek:

- a 72 szabályos háromszög alkotta rombusz (röviden: a 72 méretű rombusz) kitöltése a 12 különböző hexiamonddal, amelyre negyvennél több megoldást találtak³,

- az 54 méretű szabályos hatszög kitöltése 9 különböző hexiamonddal.

Mindkét feladványra egy-egy megoldást mutattak be. Ők vezették be a paritás-vizsgálatot, ami egyszerű módszer hexiamond-feladványok megoldhatatlanságának bizonyítására.

¹A rangjelcsíkhöz: Katonai rendfokozatot jelző, tompaszögben megtört csík.

²A sakktfigurák nevéhez hasonlóan két szótagú neveket választottunk, és nem csupa főneveket.

³Az (1) és a [14] webhelyen található program 156 megoldást szolgáltat.

Vegyük észre, hogy a macska és a gálya kivételével bármely hexiamondot is helyezzük el a táblán, az három világos és három sötét rács-háromszöget (a továbbiakban röviden: *mezőt*) fed le, míg a macska és a gálya esetén a lefedett világos és sötét mezők számának különbsége 2 vagy -2. Nevezzük hexiamond-tábla tet-szőleges tartománya *paritás-számának* a benne levő világos és sötét mezők száma különbségének abszolút értékét. A macska és a gálya paritás-száma tehát 2, a többi hexiamondé pedig 0. Ebből látható, hogy

- hexiamondokkal nem tölthető ki a táblának olyan tartománya, amelynek paritás-száma páratlan,
- különböző hexiamondokkal nem tölthetők ki azok, amelyek paritás-száma nem a 0, 2 és 4 számok valamelyike, és
- a 12 különböző hexiamonddal nem tölthetők ki azok sem, amelyek paritás-száma 2.

Nem nehéz példákat találni arra, hogy a megfelelő paritás-szám a kitölthetőségnek csak szükséges feltétele.

Reeve és Tyrrel 22-re becsülte az olyan hexiamond-halmazok számát, amelyekkel a második feladvány megoldhatatlan. Mivel az 54 méretű szabályos hatszög paritás-száma 0, csak azokra a 9 elemű hexiamond-halmazokra létezhet megoldás, amelyek vagy a gálya és a macska mindegyikét tartalmazzák, vagy egyiküket sem. Vizsgálatunk azt mutatja, hogy a fentiek alapján lehetséges összes $\binom{10}{7} + \binom{10}{9} = 120 + 10 = 130$ darab 9 elemű hexiamond-halmazból 109 esetben lehetséges a kitöltés. Vagyis Reeve és Tyrrel becslése elég pontos volt.

Dawson tétele – hexiamondokra. A pentominókkal kapcsolatos legismertebb fejtörőt először Dudeney említi klasszikus feladat-gyűjteményében ([3]) egy kétes hitelességű anekdotába ágyazva, amely szerint Hódító Vilmos fia, Henrik, később maga is Anglia királya, Lajos francia királyfinál vendégeskedve (akiből ugyancsak király lett, a francia történelem Kövér Lajosként említi), vendéglátóját nagyon megverte sakkbán. Lajos mérgeiben Henrik arcába vágta a sakktáblát, mire Henrik a sakktáblát Lajos fején darabokra törte, majd lóra kapott és elmenekült a történeteken feldühödött franciák bosszúja elől. Érdekes módon a sakktábla 13 különböző alakú darabra tört, amelyekből 12 öt-öt összefüggő mezőből állt, a maradék négy mező pedig egyetlen kis négyzetet alkotott. Dudeney fejtörője: rakjuk össze a sakktáblát a 13 darabból! Ezt így is fogalmazhatjuk: rakjuk le a sakktáblára a 12 pentominót úgy, hogy a kimaradó mezők egy négyzetet alkossanak.

Dudeney egy megoldást ismertetett. Ennél tovább ment Thomas R. Dawson⁴, aki bebizonyította, hogy *bárhol is jelölünk ki a sakktáblán egy négy mezőből álló négyzetet, a többi 60 mező kitölthető a 12 különböző pentominóval* ([2]; [11]; [1],

⁴A tündérsakk (azaz a szokásostól eltérő alakú tábla és menetmódú sakktábla) legnagyobb szakértője, ld. pl. [1], 73-74. o.

159. o.; [4], 45.o.; [6], pp. 7-8; [8], pp. 66-68.). Dawson bizonyítása rendkívül elegáns: bár a sakktáblán a négy mezőből álló különböző négyzetek száma 49, a bizonyításban a sakktáblának csupán három tartományáról kell megmutatni, hogy kirakható pentominókkal.

Gondoljuk meg, átvihető-e Dawson tétele megfelelő hexiamond-táblára és hexiamondokra. Mind a sakktábla, mind a kihagyandó négyzet konvex, és 8 szimmetriája van. Ezzel összhangban csak a konvex és szimmetrikus (azaz legalább egy tükrözéssel vagy forgatással önmagába átvihető) hexiamond-táblákat és kihagyandó poliamondokat fogjuk vizsgálni; az utóbbiakat röviden *kimaradványnak* nevezzük. Megköveteljük, hogy a kihagyás után visszamaradó tartomány, a *megmaradvány* 72 méretű, tehát potenciálisan a 12 különböző hexiamonddal kirakható és összefüggő legyen (az utóbbi Dawson tételében nyilvánvaló). A szabályos háromszögrács háromszögeiből álló konvex sokszög minden belső szöge vagy 60 vagy 120 fokal. Innen egyszerűen belátható, hogy konvex rács- n -szögek csak az $n = 3, 4, 5, 6$ esetekben léteznek.

Egy konvex rács-sokszög leírható 6 darab számmal a következő módon. Tekintsük a háromszögrács táblánkat, amelynek teteje legyen észak, a többi irány ebből egyértelműen következik. Az (a, b, c, d, e, f) számhatos $(a, b, c, d, e, f \geq 0)$ jelentse azt a rács-sokszöget, amely úgy keletkezik, hogy egy rács csúcspontból kiindulva rácsvonalakon menve keletnek a , dél-délkeletnek b , dél-délnyugatnak c , nyugatnak d , észak-északnyugatnak e és végül észak-északkeletnek f lépést teszünk meg. Amennyiben ez az óramutató járásával egyező irányú séta záródik a kiinduló csúcspontban, akkor ez egy konvex rács-sokszöget határoz meg. Mik ennek a feltételei? Első nyilvánvaló feltétel, hogy a számhatosban nem szerepelhet 2 db 0-s szám egymás után (a ciklikus permutációt is figyelembe véve). Az ugyanis azt jelentené, hogy „visszafordulunk”, vagy nem az óramutató járásával egyező irányba megyünk tovább. Második, hogy a sétának záródnia kell. Nézzük meg, mekkora utat teszünk meg összesen keleti irányban:

$$a + b/2 - c/2 - d - e/2 + f/2,$$

és ennek persze 0-t kell adnia, így kapjuk a

$$2a + b - c - 2d - e + f = 0$$

egyenlőséget. Nyugati irányban ugyanezen út ellentettjét tesszük meg, az nem ad új feltételt. Hasonlóan felírhatjuk a dél-délkeleti és a dél-délnyugati irányban megtett utakra vonatkozó feltételeket is:

$$(2) \quad \begin{aligned} 2b + c - d - 2e - f + a &= 0 \\ 2c + d - e - 2f - a + b &= 0 \end{aligned}$$

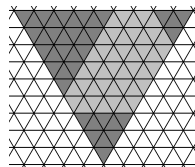
A fenti három egyelőség nem független: a másodikból kivonva a harmadikat pontosan az elsőt kapjuk. Ennek egyszerű geometriai magyarázata is van: ha a dél-délkeleti és a dél-délnyugati irányokban a teljes séta során nem mozdulunk el, akkor ezek a feltételek kijelölnek egy-egy (a dél-délkeleti és a dél-délnyugati irányokra merőleges) egyenest, amin rajta kell legyünk a séta végén, és amin a kiinduló rácpont is rajta van. A két egyenesnek egyetlen metszéspontja van, és az pont a kiinduló rácpont, így a séta végén is ott kell lennünk, vagyis a séta záródott.

Nem nehéz belátni, hogy a (2) feltételek ugyanazt jelentik, mint az $a - d = -(b - e) = c - f$ egyenlőségek, amelyek teljesülését ránézéssel ellenőrizhetjük.

A továbbiakban ezt a számhatos jelölést használjuk a konvex rács-sokszögek leírására. Vegyük észre, hogy a rács-sokszög elforgatása megfelel a számhatos ciklikus permutációjának, a tükrözés pedig a számhatos fordított sorrendben való felírásának és (a tükrözés tengelyétől függő) ciklikus permutációnak. A jelölésünk mindig egy a háromszögrácson való eltolástól eltekintve egyértelmű rács-sokszöget ad meg, ha a forgatási és tükrözési szimmetriáktól is el kívánunk tekinteni, akkor az $(a, b, c, d, e, f) +$ jelölést fogjuk használni.

Dawson hexiamondokra átirított tételét vizsgáljuk a rács-sokszög oldalainak száma szerint sorrendben, tehát legyen először a tábla és a kimaradvány háromszög alakú. Ekkor a tábla jele $(n, 0, n, 0, n, 0)$, mérete n^2 , paritás-száma n . Ezért a 81 méretű háromszög, amelyből 9 méretű háromszöget hagyunk ki, alkalmasnak látszik, mert a 12 hexiamond éppen elférne a megmaradványon. Annak a paritás-száma azonban 6 vagy 12, így nem tölthető ki különböző hexiamondokkal.

Figyeljük meg, hogy az (a, b, c, d, e, f) konvex rács-sokszög mindig befoglalható egy $(f + a + b, 0, b + c + d, 0, d + e + f, 0)$ háromszögbe, és abból a megfelelő csúcsoknál az $(f, 0, f, 0, f, 0)$, $(b, 0, b, 0, b, 0)$ és $(d, 0, d, 0, d, 0)$ háromszögek levágásával keletkezik. Ezért (a, b, c, d, e, f) paritásszáma $|f + a + b - f - b - d| = |a - d|$.



2. ábra

Egyszerűen belátható, hogy minden rács-négyszög konvex, és két tompaszöge van. Ha ezek egymással szemben vannak, a négyszög paralelogramma, az ellenkező esetben pedig (egyenlő szárú) trapéz. A paralelogrammák (szimmetriától eltekintve) megadhatók $(a, 0, b, a, 0, b)$ alakban, ahol $a \geq b$; méretük ekkor $2ab$, paritás-számuk 0. Bármely paralelogramma három különböző állásban helyezhető el a háromszög-rácson, annak megfelelően, hogy párhuzamos élpárjaik a lehetsé-

ges három irány közül melyikbe mutatnak (a két másik állású paralelogramma a jelölésünk szerint a $(b, a, 0, b, a, 0)$ és a $(0, b, a, 0, b, a)$). Legyen a tekintett tábla az $(a, 0, b, a, 0, b)+$, a kimaradvány a $(c, 0, d, c, 0, d)+$ paralelogramma, ahol $c \geq d$, $a > c$ és $b > d$. Ha a tábla és a kimaradvány különböző állásúak, az utóbbi mindig elhelyezhető úgy, hogy a megmaradó tartomány ne legyen összefüggő. Ezért csak olyan a, b, c, d számokat keresünk, hogy az $(a, 0, b, a, 0, b)$ táblából a $(c, 0, d, c, 0, d)$ négyszöget kihagyva a megmaradó tartomány a 12 különböző hexiamonddal kirakható legyen (itt legyen $a \geq b$, de $c \geq d$ nem feltétlenül igaz). A méretekre vonatkozó szabály szerint ennek szükséges feltétele $2(ab - cd) = 72$. A $(8, 0, 5, 8, 0, 5)$ tábla, és a $(2, 0, 2, 2, 0, 2)$ kimaradvány ezt teljesíti. Az (1) programmal vagy Rosenkranz programjával ([14]) ellenőrizhetjük, hogy rájuk „Dawson-típusú tétel” érvényes.

A trapézok $(a - b, b, 0, a, 0, b)$ alakban írhatók fel, ahol $a > b$; méretük $2ab - b^2$, paritás-számuk b . A trapézoknak hat különböző állása van; most is feltesszük, hogy a keresett kimaradvány is trapéz, és a táblával megegyező állású: $(c - d, d, 0, c, 0, d)$, $a > c$, $b > d$. A megmaradvány paritás-száma $b - d$, és ha 12 hexiamonddal kitölthető, akkor $b = d + 4$. Másrészt most — a paralelogrammák esetéhez hasonlóan — $2(ab - cd) - 4(b + d) = 72$. Ennek az $(5, 5, 0, 10, 0, 5)$ tábla és az $(1, 1, 0, 2, 0, 1)$ kimaradvány eleget tesz. Ellenőrizhetjük, hogy ezt a kimaradványt bárhol elhelyezve a táblán, a megmaradvány kirakható. Ez régi észrevétel: Philpott [12] cikkében jelzi, hogy ismeri a bizonyítását. Külön érdekesség, hogy hasonlóan Dawson tételéhez, a kimaradvány itt hasonló a táblához.

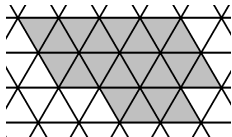
A konvex rács-ötszögnek egyetlen szöge hegyesszög; ha szimmetrikus, akkor ezt a szöget a szimmetria változatlanul hagyja. Ennek a szárain van az ötszög leghosszabb oldala; legyen ennek hosszúsága a , a szöggel szemben levő oldalé b . Ekkor ötszögünk $(a, a - b, b, a - b, a, 0)$, mérete $2a^2 - b^2$, paritás-száma b . A kimaradványt is keressük (a táblával megegyező állású) $(c, c - d, d, c - d, c, 0)$ alakban. A megmaradvány paritás-száma most is $b - d$, és szükségképpen $b = d + 4$. A méretekre vonatkozó egyenlet eszközeinkkel kezelhető egyetlen megoldása $(8, 3, 5, 3, 8, 0)$, mint tábla, és $(4, 3, 1, 3, 4, 0)$, mint kimaradvány. A megmaradvány azonban az utóbbinak nem minden helyzetében rakható ki.

A konvex rács-hatszögnek minden szöge tompaszög. Bármely a, b, c pozitív egészekhez van olyan szimmetrikus konvex hatszög, amelyben három egymást követő oldal hossza a , b és c . Ilyen az (a, b, c, a, b, c) hatszög, amelynek mérete $2(ab + ac + bc)$, paritás-száma 0. Ha táblának a $(3, 3, 5, 3, 3, 5)$, kimaradványnak az $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ hatszöget tekintjük, akkor a megmaradvány mérete 72, és a kimaradvány bármely helyzete esetén kirakható (ellenőrizzük!). Másik lehetőség: legyen a tábla $(3, 4, 4, 3, 4, 4)$, a kimaradvány a $(2, 0, 2, 2, 0, 2)+$ paralelogramma. A megmaradvány mérete ekkor is 72, és a kimaradvány bármely állása és helyzete esetén (ld. a plusz jelet a paralelogramma számhatosa végén) kirakható.

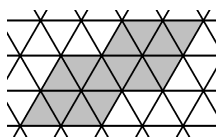
Dawson tétele és hexiamondokra kimondott változatai bizonyításának „szép-ségét” egy-egy számmal is jellemezhetjük: a kimaradvány lehetséges helyzetei h számának és a bizonyításhoz szükséges kirakások k számának hányadosával: minél nagyobb ez a szám, annál elegánsabbnak tekinthetjük a bizonyítást. A poliominókra vonatkozó eredeti tételnél ez az arány a már említett $49/3 = 16,33$, a most bemutatott négy tábla-kimaradvány párra pedig a következő táblázatból látható:

tábla	kimaradvány	h	k	h/k
(8, 0, 5, 8, 0, 5)	(2, 0, 2, 2, 0, 2)	32	16	2
(5, 5, 0, 10, 0, 5)	(1, 1, 0, 2, 0, 1)	35	19	1,84
(3, 3, 5, 3, 3, 5)	(1, 1, 1, 1, 1, 1)	29	10	2,9
(3, 4, 4, 3, 4, 4)	(2, 0, 2, 2, 0, 2)+	68	19	3,57

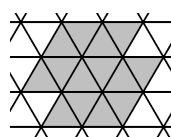
Hogy h mindig sokkal nagyobb, mint k , a táblák szimmetriáinak köszönhető. Ha Dawson csak a sakktábla szimmetriáit vette volna figyelembe bizonyításánál, akkor a h/k hányados a lényegesen szerényebb 4,9 értéket vette volna fel (miért?). Ő azonban felhasználta azt is, hogy a négy mezőből álló négyzet négyféleképpen helyezhető el egy kilenc mezőből álló négyzetben úgy, hogy a kimaradó mezők mindig ugyanazt a pentominót alkossák, és van a sakktáblán három olyan, egyenként kilenc mezőt tartalmazó négyzet, amelyekben a lényegesen különböző helyzetű négy mezőből álló négyzetek mindegyike megtalálható. Hasonló gondolattal megjavítható a táblázatunkban szereplő 3,57-es érték is. Vegyük észre, hogy a 3. ábrán látható rács-nyolcszögben a $(2, 0, 2, 2, 0, 2)+$ paralelogramma három különböző helyen is elfér úgy, hogy a kimaradó 12 mező ugyanazzal a két hexiamonddal (a hegyessel és a tompával) tölthető ki.



3. ábra



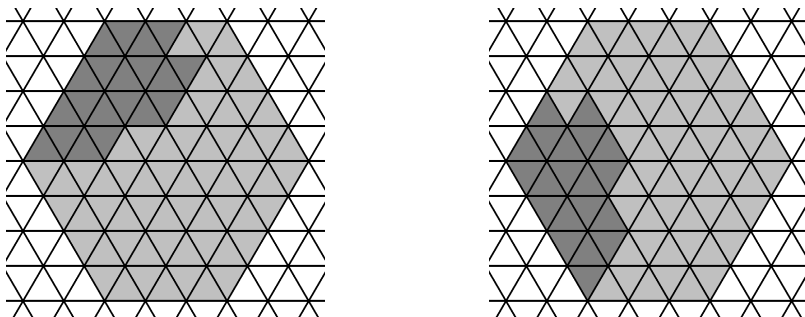
4. ábra



5. ábra

Ezért, ha rács-nyolcszögünket úgy helyezzük el a $(3, 4, 4, 3, 4, 4)$ táblán, hogy a rajta kívül maradó 60 mező a hegyestől és a tompától (és egymástól is) különböző hexiamondokkal kirakható legyen, akkor — alkalmas elhelyezés esetén — három kirakás helyett egy is elegendő lesz. Két ilyen elhelyezést mutat a 6. ábra. Ugyanez a gondolat további javításokat tesz lehetővé a 4. és 5. ábrán látható rács-nyolcszögek segítségével; ezeket az elszánt olvasó az (1) program segítségével megtalálhatja. Ilyen úton k értéke a $(3, 4, 4, 3, 4, 4) - (2, 0, 2, 2, 0, 2)+$ páron 11-re csökkenthető, ami h/k -ra 6,18-at ad. Ez még mindig lényegesen kisebb, mint Dawson bizonyításának elegancia-hányadosa, ami alátámasztja Gál Péter értékelését:

hexiamondokkal játszani sokkal nehezebb, mint pentominókkal ([4], 79. o.).



6. ábra

Kitölthető konvex rács-sokszögek. Ezek közül a paralelogrammák és a 12 különböző hexiamonddal kitölthetők felsorolását megtaláljuk [4] 61. oldalán. Itt megadjuk az összest. Nyilvánvalóan szorítkozhatunk azokra az n -szögekre, amelyek mérete osztható 6-tal, és legfeljebb 72. Használni fogjuk az előző fejezetben bevezetett jelölést, a konvex rács-sokszögek méretére és paritás-számára tett megállapításokat, valamint a kitölthetőség eldöntéséhez szükség esetén az (1) programot.

Kitölthető rácsháromszög nincs. Csak a 36 méretű jöhetne számításba, annak azonban 6 a paritás-száma.

Mivel az $(a, 0, b, a, 0, b)$ paralelogramma $(a \leq b)$ mérete $2ab$, ezért a és b legalább egyike osztható hárommal. Az ilyen (a, b) párok között 32 azoknak a száma, amelyekre $2ab \leq 72$, és ezek közül 14 kirakható: $(3, 1)$, $(6, 2)$, $(4, 3)$, $(5, 3)$, $\dots$, $(11, 3)$, $(6, 4)$, $(9, 4)$, $(6, 5)$, $(6, 6)$. Ezek közül szükségünk lesz a továbbiakban a 6, 2 oldalú paralelogramma kitöltéseire, ezért ezeket itt megmutatjuk:

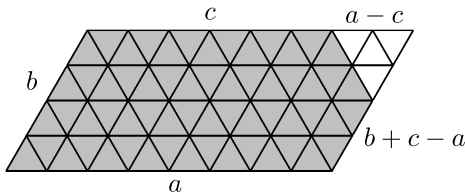


Ami lényeges lesz számunkra a továbbiakban, hogy minden kitöltésben szerepel a tompa és a hegyes is.

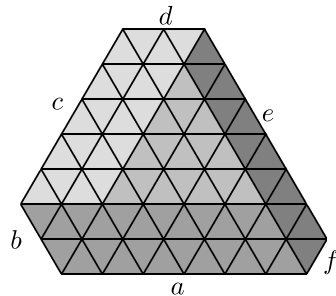
Ha az $(a - b, b, 0, a, 0, b)$ trapéz kitölthető, akkor paritás-száma (b) 2 vagy 4, mérete pedig megfelelően $4(a - 1)$ vagy $8(a - 2)$, és így — ugyancsak megfelelően — a $3k + 1$ vagy $3k - 1$ alakú. Ha a paritás-szám 2, a $(2, 2, 0, 4, 0, 2)$ trapézt könnyen kirakjuk (ld. a fenti paralelogramma kitöltéseinek megfelelő részeit). Ha $a \geq 7$, a trapéz kirakásához használnunk kell a macska és a gálya egyikét. A paritás-szabály miatt a macska „feje” csak északra állhat, ezért a fej oldalán kimaradó mezők paralelogrammát alkotnak, amely a fentiek alapján csak az elfajult (0 háromszöget tartalmazó) vagy a 6, 2 oldalú paralelogramma lehet. A macska másik oldalára csak pálcát vagy tompát rakhatnánk; ezek közül a pálcá mellé már nem tehetünk tőle különböző hexiamondot, a tompa berakása után fennmaradó rész pedig ismét

egy paralelogramma lenne, ami megintcsak az elfajult, vagy a 6, 2 oldalú lehetne. Mivel a fej vagy a farok felőli oldalon ki fog alakulni legalább egy 6, 2 oldalú paralelogramma, és annak kirakásához szükségünk lenne tompára is, így macskával nem lehet kirakni a trapézt. Ha pedig gályát használunk, annak a „vitorlái” északnyugat vagy északkelet felé állnak, és a kirakás csak hegyessel folytatható. Ekkor a további mezők ismét egy (vagy több) 6, 2 oldalú paralelogrammát alkotnak, s a kitöltéshez szükségünk lenne a hegyesre is, de azt már elhasználtuk. Így $(2, 2, 0, 4, 0, 2)$ az egyetlen 2 paritás-számú kitölthető trapéz. A 4 paritás-számúak közül a méretkorlát miatt csak $(1, 4, 0, 5, 0, 4)$, $(4, 4, 0, 8, 0, 4)$, $(7, 4, 0, 11, 0, 4)$ vehető figyelembe. Ezek mind kitölthetők.

Már megfigyeltük, hogy konvex rács-ötszög egyetlen hegyesszögének egyik szárán van az ötszög leghosszabb oldala; jelölje most ennek a hosszúságát a , a másik szárán levő oldal hosszúságát b (nincs kizárva, hogy $a = b$), ld. a 7. ábrát. Legyen a következő oldal hosszúsága c (szükségképpen $a > c > a - b$). Ekkor a tekintett rács-ötszög: $(c, a - c, b + c - a, a, 0, b)$. Ennek mérete $t = 2ab - (a - c)^2$, paritás-száma $a - c$. Ezért kitölthető rács-ötszögre $a = c + 2$ vagy $a = c + 4$ teljesül, ahonnan következik, hogy a és b egyike $3k + 1$, másika $3k + 2$ alakú. Az ezeket a feltételeket kielégítő (a, b, c) hármasok a méretkorlátot figyelembe véve a következő ötszögeket szolgáltatják, amelyek mind kitölthetők: $(3, 2, 2, 5, 0, 4)$, $(3, 4, 1, 7, 0, 5)$, $(5, 2, 3, 7, 0, 5)$, $(6, 2, 2, 8, 0, 4)$.



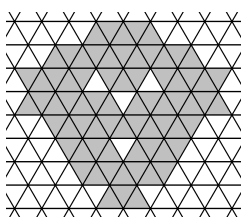
7. ábra



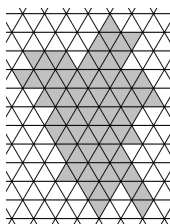
8. ábra

Mint az előző fejezetben láttuk, bármely a, b, c pozitív egészekhez létezik olyan rács-hatszög, amelyben három, egymást követő oldal hosszúsága a , b , és c . A következő oldal hosszúsága csak olyan pozitív egész d szám lehet, amelyre teljesül $a + b > d > a - c$. Ekkor a további következő oldalak: $e = a + b - d$, $f = d - (a - c)$. Ennek a hatszögnek a mérete $2(ab + cd + ef) + (a - d)^2$, másképpen $2(a + b)(c + d) - a^2 - d^2$ (8. ábra), paritás-száma $|a - d|$. Az adott méretű konvex rács-hatszögek egyszerű program segítségével meghatározhatók (papíron ceruzával ez hosszadalmas lenne). Kirakhatóságukat az (1) programmal megvizsgálva a következőt kapjuk: 20 olyan konvex rács-hatszög van, amelyek mérete osztható hattal és legfeljebb 72, és ezek közül 17 kitölthető különböző hexiamondokkal.

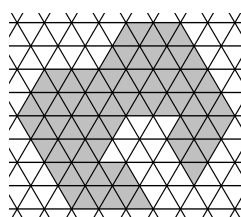
Csúcsok? Az (1) program és Rosenkranz programja a hexiamond-feladványok megoldásainak számát és ezáltal a feladványok nehézségét is jelzik. Várható ugyanis, hogy két olyan feladvány közül, amelyek egyenlő méretű rács-sokszögek kitöltésére vonatkoznak, az oldható meg nehezebben, amelynek kevesebb megoldása van. Érdekes kihívás *éppen csak megoldható* feladványokat találni, vagyis olyan rács-sokszögeket, amelyek egyetlen módon rakhatók ki hexiamondokkal. Szimmetriával rendelkező rács-sokszögek esetén a szimmetria által egymásba átvihető kirakásokat nem tekintjük különbözőnek; ilyen értelemben pl. a $(2, 2, 0, 4, 0, 2)$ rácstrapéz két különböző módon rakható ki. Gondolhatnánk, hogy az éppen csak megoldható feladványok bonyolult alakzatok kirakásából állnak (9. és 10. ábra), de van ellenpélda is (11. ábra).



9. ábra

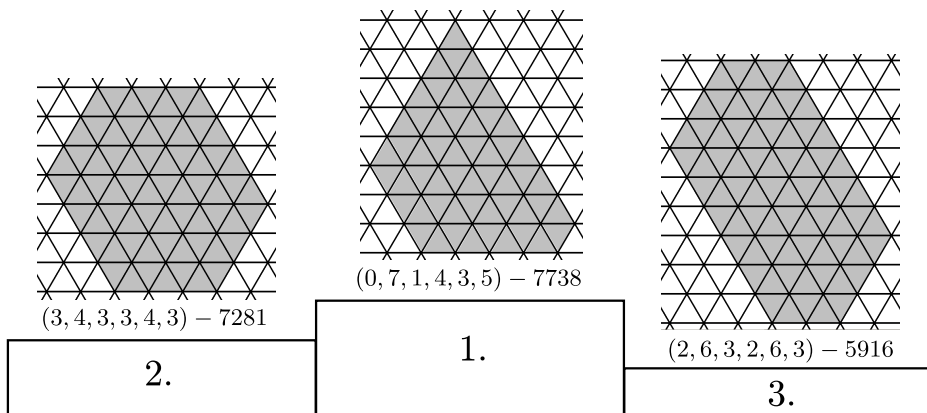


10. ábra



11. ábra

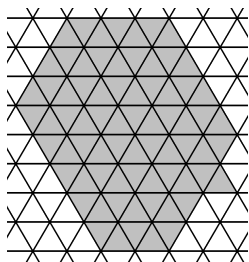
Még érdekesebbnek látszik a legtöbb módon kirakható rács-sokszögek keresése. Ez könnyű lehet adott tulajdonságú sokszögek esetén; például konvex sokszögekre az előző fejezetben tett megfigyelések és (1) alkalmazásával nyerjük a következő dobogót:



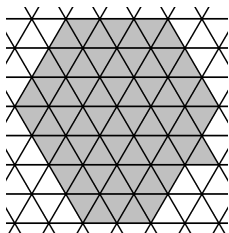
A kitöltések száma már itt is meglepő, de ha a konvexitástól eltekintünk, még nagyobb számokat kapunk. A nemkonvex sokszögek változatossága miatt az összes sokszögekre végleges eredményünk nincs, bár a méretkorlát folytán létezik olyan sokszög, amely a legtöbb különböző módon tölthető ki. A 12. ábrán látjuk a 12 kü-

lönböző hexiamonddal kitölthető csúcstartót, a 13. ábrán pedig az abszolút bajnokot: az akárhány különböző hexiamonddal kitölthetők jelenlegi „legjobbikát”. Ezek megfelelően 14600 ill. 25036 módon rakhatók ki. A húszezresek klubja most három kilencszögből áll: mindhárman az 59 méretű $(3, 3, 4, 2, 4, 3)$ hatszögből keletkeznek úgy, hogy azt alkalmas helyen egy megfelelő állású mezővel bővítjük.

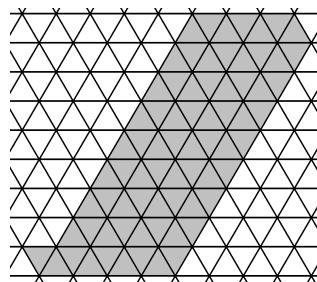
A $6k - 1$ ($7 \leq k \leq 12$) méretű konvex rács-sokszöget egy további mezővel kibővítve rendszerint olyan alakzatot kapunk, amelynek sok kitöltése van. Ilyenekkel kísérletezve találtunk olyan hétszöget (14. ábra), amely **2017** különböző módon rakható ki.



12. ábra



13. ábra



14. ábra

Irodalom

- [1] Csákány Béla, Diszkrét matematikai játékok, Polygon, 1998, 2005.
- [2] Dawson, Thomas R., Lester, W. E., A notation for dissection problems, *Fairy Chess Review*, 3:5(1937), 46-47.
- [3] Dudeney, Henry E., The Broken Chessboard, Problem 74 in *The Canterbury Puzzles*, 1907, 1919.
- [4] Gál Péter, Ördöglakatok, pentominók és társaik, Typotex, 2008.
- [5] Golomb, Solomon W., Checkerboards and Polyominoes, *Amer. Math. Monthly*, 61(1954), 675-82.
- [6] Golomb, Solomon W., Polyominoes, Scribners, 1965; Princeton Univ. Press, 1994.
- [7] Goodger, David, "Choose 9" Hexagons,
<http://puzzler.sourceforge.net/docs/hexamonds.html#hexiamonds>
- [8] Martin, George E., Polyominoes, MAA, 1991.
- [9] Müller, Gerd, <http://users.ph.tum.de/gmueller/hexamonds/index.html#>
- [10] O'Beirne, T H., Pentominoes and Hexiamonds, *New Scientist*, 12(1961), 379-80.
- [11] Stead, W., Dissection, *Fairy Chess Review*, 9:1(1954), 2-4.
- [12] Philpott, Wade E., Polyomino and polyiamond problems: Part II, *Journal of Recreational Mathematics*, 10:2(1977-78), 98-105.

- [13] Reeve, J. E., Tyrrell, J. A., Maestro puzzles, Math. Gazette, 45(1961), 97-99.
- [14] Rosenkranz, Thimo, <http://www.pentoma.de/>

Csákány Béla, Bolyai Intézet, Aradi vértanúk tere 1, 6720 Szeged;
csakany@math.u-szeged.hu

Makay Géza, Bolyai Intézet, Aradi vértanúk tere 1, 6720 Szeged;
makayg@math.u-szeged.hu