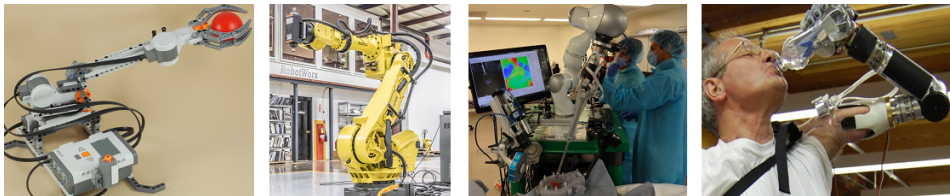


Három ízületből álló robotkar mozgatója síkban, Jacobi-mátrix használata nélkül

ZSENÁK ISTVÁN

1. A robotkarok felhasználása

Robotkar alatt olyan több ízületből álló rendszert értünk mely az emberi karhoz hasonlóan képes munkát végezni, humán irányítással, vagy automatikusan. Erőkarokat, emelőket már az ókorban is használtunk fizikai korlátaink leküzdésére. Talán ennek tudható be a robot szó jelentése is, mely szláv eredetű, és szolgamunkát, vagy csak munkát jelent. Azóta a robotkarok komoly evolúción mentek át, és mára a hadiiparban, gyógyászatban, szórakoztatóiparban, és rengeteg más területen is alkalmazzák őket. Felhasználásuk kulcsfontosságú olyan esetekben, amikor nagy pontossággal kell összeilleszteni alkatrészeket, vagy az ember számára túl nehéz tárgyakat kell felemelni, esetleg a végrehajtandó feladat túl kockázatos egy ember számára.



1. ábra. Robotkarok felhasználása játékként, ipari környezetben, orvosi segédeszközként, és protézisként. (Forrás: pixabay.com, pexels.com)

2. Robotkar mozgatója Jacobi mátrixszal

E cikk feladata, hogy bemutassa egy emberi kar (esetünkben jobb kar) mozgatójának szimulációját. Egy n ízületből álló robotkar mozgatójához szükséges ízületi szögsebességek és a végszerszám sebességének kiszámításához egy speciális mátrixot, az úgynevezett Jacobi-mátrixot alkalmazzák. Ha ismerjük a csuklópontok

hajlásszögeit, akkor kiszámíthatók a koordinátái, illetve a koordináták ismeretében kiszámíthatók a hajlásszögek. Ezen információk egyértelműen meghatározzák a kar végszerszámának koordinátáit. Fordított esetben azonban, amikor a végszerszám koordinátáit ismerjük, nem tudjuk egyértelműen meghatározni a kar ízületeinek koordinátáit, vagy hajlásszögeit. A megoldás az úgynevezett inverz kinematikai mozgásegyenletek felírásával érhető el. (Laczkó és társai, 2000; Laczkó, 1999)

Definíció szerint ha egy $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény differenciálható az x helyen, akkor a lineáris $D_{f,x}$ deriváltképzés mátrixa a Jacobi mátrix (J):

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Amennyiben a Jacobi mátrix négyzetes, determinánsát Jacobi-determinánsnak nevezzük.

A Jacobi mátrix alkalmas inverz kinematikai algoritmusok és dinamikus mozgásegyenletek felírására, így összefüggést találhatunk a csuklózváltozók sebessége, és a kar végpontjának sebessége között. Legyen p a kar végpontjának sebessége, ω pedig az ízületi szögsebességek vektora. A cél p és ω kifejezése, az alábbi összefüggés mentén: (Wetttl. 2011)

$$J = \frac{\partial p}{\partial \omega}$$

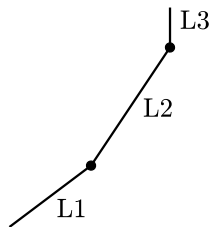
Az eljárás hibája, hogy a kar végpontjának útja a célpont felé nem lesz pontos, vagyis minden számítási iterációban valamekkora hibával adja csak meg a csuklóvektorok helyzetét. Ez a hiba abban az esetben látványos, amikor a mátrix szinguláris, ami abban a két helyzetben következhet be, amikor a kar teljesen ki van nyújtva, vagy valamelyik ízület teljesen ráfordul a másikra, azaz a két ízület nulla fokot zár be. A hibás értékek többszörös iterációval csökkenthetők, ez azonban nagyobb számítási kapacitást igényel. (Asada, 2005)

Ha pontos eredményeket szeretnénk kapni a csuklóvektorok helyzetéről, geometriai megközelítésben kell vizsgálnunk a fenti problémát.

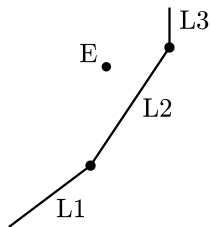
3. Geometriai megközelítés

3.1. Előkészületek

Az algoritmus kizárólag geometriai módszerek alkalmaz, az ízületek által rajzolt körök metszéspontjaira támaszkodik. Első feladatunk, hogy ábrázolunk egy lehetséges kiindulási állapotot, melyet az 2. ábra szemléltet.



2. ábra. A kiindulási állapot.

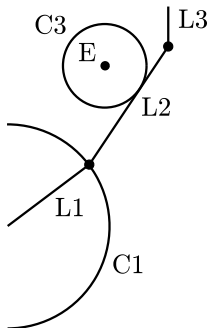


3. ábra. A célpont megadása.

Az L1 vektor a felkart, az L2 az alkart, az L3 pedig a kezet reprezentálja. Csuklónak nevezzük a L2 és L3 vektorok közös pontját, és könyöknek nevezzük az L1 és L2 vektorok közös pontját. Természetesen feltesszük, hogy ezen vektorpárok csak egy pontban érnek össze.

Nevezzük célállapotnak az ízületek helyzetét az algoritmus lefutása után, és nevezzük célpontnak azt a pontot, ahol a kéz, (L3 vektor) csuklótól legtávolabbi pontja elhelyezkedik az algoritmus lefutása után. Az algoritmus célja tehát a célállapot meghatározása a célpont ismeretében. Ábrázoljuk a célpontot, melyet az E ponttal szemléltetünk a 3. ábrán. A valóságban a célpont mindig egy nagyon közeli pont az alapállapothoz képest, alábbi példánkban csak a szemléltetés miatt van nagy különbség az E pont és a kiindulási állapot végpontja között.

A célpont köré rajzoljunk egy L3 sugarú kört. Ha nem vesszük figyelembe az anatómiai szabályokat, akkor ezen a körön bárhol elhelyezkedhet a csukló.



4. ábra: A felkarból és a kézből képzett körök helyzete.

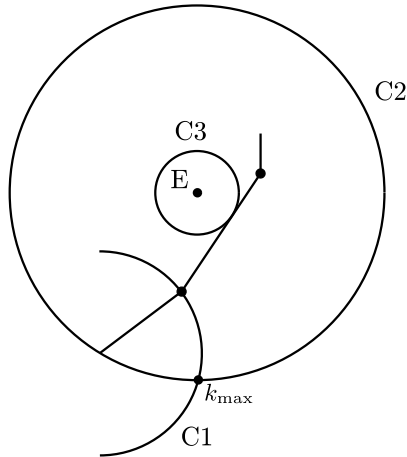
A felkarból képzünk egy kört. Példánkban a jobb kart modelleztük, ezért a kör bal oldalát elhagyhatjuk, hiszen 2D-ben nem tudjuk könyökünket a fejünk bal oldalára vezetni. A jelenlegi állapotot a 4. ábra szemlélteti. A későbbi egyszerűbb hivatkozás érdekében az L1 vektor kiindulópontját, vagyis a vállat nevezzük origónak, és képzeljük bele a kart egy derékszögű koordináta-rendszerbe, ahol a vízszintes tengely koordinátáit az x -el, a függőleges tengely koordinátáit y -nal jelöljük. Az alábbi ábrán láthatjuk a könyök és a csukló lehetséges pontjait. Előbbit a C1-gyel

jelzett félkörrel, utóbbit a C3-al jelzett körrel ábrázoljuk. Biztosak lehetünk benne, hogy ha a kar végpontja az E pontot érinti, a könyök akkor is a C1 félkörön marad. A kar mozgása után az L3 vektor egyik végpontjának az E pontban, másik végpontjának pedig a C3 körön kell lennie.

3.2. A könyök legtávolabbi lehetséges pontja a célponthoz

Most, hogy ismerjük könyök és a csukló lehetséges pontjait, meg kell határoznunk az anatómia szabályoknak megfelelő azon pontokat, melyeken a csukló és a könyök valóban elhelyezkedhet. Ez ritkább esetben valóban egy-egy pont, általában viszont több pontból álló köríveket kell keresnünk. A körívek meghatározásához meg kell keresnünk az ívek szélsőértékeit.

Induljunk ki abból, hogy a jelenlegi szélsőértékek a felkarból képzett félkör két végpontja, melyek közül az egyik $(0, L1)$, másik pedig $(0, -L1)$, ha feltesszük, hogy az L1 vektor kiindulópontját tekintjük az origónak. Ezt a körívet kell szűkítenünk úgy, hogy az ízületek helyzete minden esetben kielégítse az anatómiai szabályokat. A fenti köríven négy olyan vizsgálatot kell elvégezni, melyek eredményeként kapott pontok szélsőértékként szolgálnak az algoritmusnak.

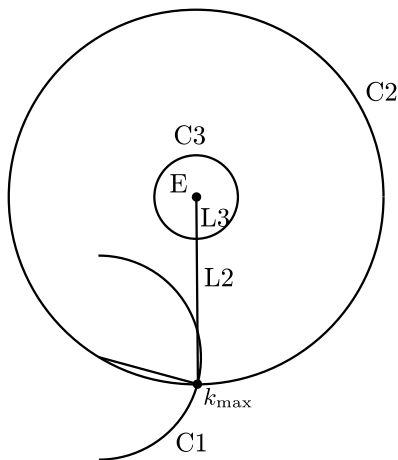


5. ábra: A körök metszéspontjai a könyök lehetséges szélsőértékeit adják meg.

Következő feladatunk azt a szélsőértéket megtalálni, ami nem más, mint az ízületek azon állapota, amikor a kéz, (L3) és az alkar (L2) párhuzamos. Ez az állapot meghatározza a könyök legtávolabbi lehetséges pontját az E ponttól. Nevezzük ezt a pontot $k_{\max}$ -nak. Adjuk össze az L2 és L3 vektorok hosszát, és ezt a távolságot mérjük a végpontból, az L1 vektorból képzett félkörre (C1) (Az L2 vektorból képzett kört C2-nek, az L3-ból képzett kört pedig C3-nak nevezzük.). Amennyiben az

így képzett kör és a félkör egy ponton metszik egymást, úgy azok a pontok, melyeknek távolabb vannak az E ponttól, kiesnek a könyök lehetséges pontjai közül. Ezt az állapotot az 5. ábra szemlélteti. Amennyiben két metszéspontot kapunk, akkor a két metszéspont közötti körív marad csak meg a könyök lehetséges pontjainak.

Ez a szélsőérték azt az állapotot reprezentálja, amikor az alkar és a kéz vonala párhuzamos. A csukló anatómiai mozgásterét tekintve ez biztos jó megoldás, az alkar és a felkar által bezárt szöget viszont anatómiai szempontból még nem vizsgáltuk. A fent leírt állapotot a 6. ábra szemlélteti.



6. ábra: A csukló egy lehetséges állapotában a kéz és az alkar párhuzamos.

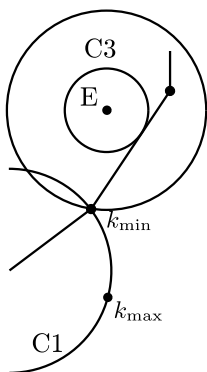
További három vizsgálatot kell még elvégeznünk:

1. A könyök azon pontjának megkeresése, amin túl a csukló már nem éri el a lehetséges pontjait. (Nevezzük ezt a pontot $k_{\min}$ -nek.)
2. A kéz és az alkar nem zárhatnak be 90 foknál kisebb szöget egyik irányban sem. (Nevezzük ezt a pontot k_s -nek.)
3. A felkar és az alkar nem zárhat be 35 foknál kisebb, és 180 foknál nagyobb szöget. (Előbbit nevezzük $f_{\min}$ -nek, utóbbit pedig $f_{\max}$ -nak.) (Moroz, 2013)

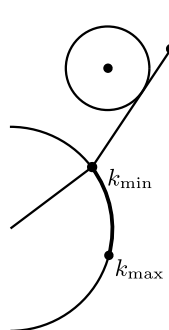
3.3. A könyök legközelebbi lehetséges pontja a célponthoz

Az első ilyen szélsőértékünk ($k_{\min}$) tehát az a pont, amelyre, ha a könyök kerül, akkor az alkar egyetlen pontban, a legtávolabbiban érinti az L3 vektorból képzett kört (C3). Ezen a ponton túl az L2 vektor végpontja túlnyúlna a csukló lehetséges pontjait jelentő körön. E szélsőérték kiszámításához vonjuk ki az L2 vektor hosszából az L3 vektort, és az így kapott távolságot mérjük az C1 körre. Amennyiben nem kaptunk metszéspontot, nincs minimum távolságunk, vagyis az L1 megmaradt

körívén nincs olyan pont, amire az L2 vektort mérve túllógunk az C3 kör legtávolabbi pontján. Amennyiben egy metszéspontot kapunk, egyetlen ilyen pont van, ez azonban gyakorlatilag nem különbözik a harmadik esettől, amikor két metszéspontot kapunk. Előbbi esetben egyetlen pontot kell kivennünk a körív pontjainak halmazából, utóbbiban egy körívet. Ebben az esetben az anatómiai szabályoknak (jelen példában) a jobboldali ponttól lejjebb lévő pontok felelnek meg a könyök lehetséges pozíciójának. (Tehát azok, melyeknek y koordinátája kisebb, mint a kapott szélsőérték y koordinátája.) Az így kapott kört és a metszéspontokból adódó szélsőértékeket a 7. ábra szemlélteti.



7. ábra. Ha a két metszéspont között helyezkedik el a könyök, az alkar átnyúlik a csukló lehetséges pontjaiból képzett körön.



8. ábra. A könyök lehetséges pontjai, az anatómiai szabályok figyelembe vétele nélkül.

A jobboldali pontot választva kapunk egy körívet, amin belül a könyök bárhol elhelyezkedhet, ha nem vesszük figyelembe a csukló és a könyök lehetséges hajlásszögeit. A körívet a 8. ábra szemlélteti.

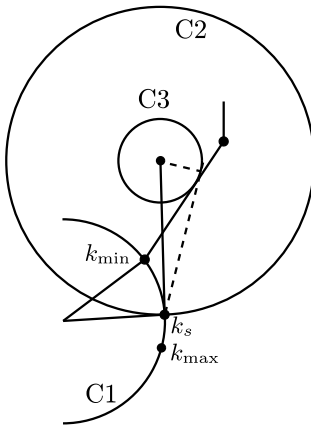
A fent kiszámított két szélsőérték tehát leszűkíti a csukló lehetséges pontjait reprezentáló körívet. Amennyiben nem vesszük figyelembe az anatómiai szabályokat, és feltesszük, hogy az ízületek a csuklóban, könyökben és vállban közel 360 fokban tudnak forogni, akkor a feladatunk végéhez is értünk. A könyök a 8. ábrán látható zöld körívén belül bárhol elhelyezkedhet, biztosan lesz egy olyan pont, amiben a felkart reprezentáló vektor és a csukló által generált körív metszi egymást.

Az algoritmus azonban emberi kéz mozgását szimulálja, így a feltételrendszerünket bővíteni kell újabb szélsőértékekkel, amelyek az anatómia szabályok betartásával szűkíthetők tovább a meglévő körívünket. Két további vizsgálatot kell tehát elvégeznünk az eddigi körívünkön, de ne felejtsük el, hogy ezek eredményeként kapott pontok nem biztos, hogy léteznek!

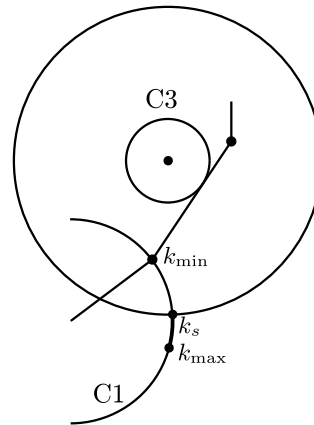
3.4. A csuklóra vonatkozó anatómiai szabály

Az egyik ilyen pont (k_s) a csukló anatómiai szabályaiért felel, nevezetesen nem engedi a könyököt olyan pontra mozogni, ahol a kéz és a felkar (L3 és L2 vektor) 90 foknál kisebb szöget zárna be. A másik pont a könyök anatómiai szabályáért felelős. Az L1 és L2 vektor nem zárhat be 35 foknál kisebb szöget. Emellett 180 foknál nagyobbat sem zárhat be, hiszen kifordulna a könyök.

A csukló helyes tartásához a Pithagorasz tételt kell alkalmaznunk. Számítsuk ki az L2 és L3 vektorok négyzetösszegét, vonjunk gyököt, és a kapott távolságot mérjük a C3 kör középpontjából a C2 körre. Az anatómiai szabályok betartása végett a jobboldali pontot választjuk. (Derékszögű koordinátarendszerben azt a pontot, amelynek y koordinátája kisebb.) Az így képzett kört és a metszéspontot a 9. ábra szemlélteti.



9. ábra. A könyök helyzetének újabb szélsőértéke, figyelembe véve a csukló hajlásszögének anatómiai szabályait.



10. ábra. A csuklóra vonatkozó anatómiai szabályok betartásával csökkentett körív, melyen a könyök elhelyezkedhet.

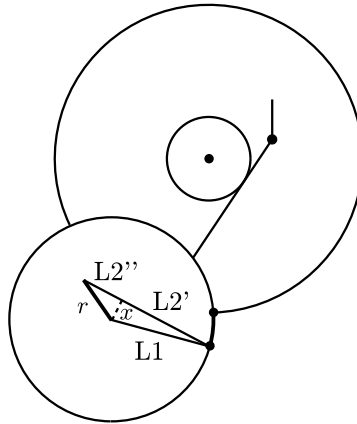
Látható, hogy a metszéspont a korábban kijelölt köríven van, ez azt jelenti, hogy a meglévő ívünket csökkenteni kell. Mivel az első pontban meghatározott metszéspont alkalmazásával az alkar és a kéz párhuzamos, így a második pontban meghatározott metszéspont irányából kell megvalósítania szűkítést. Az így kapott körívet a 10. ábra szemlélteti.

3.5. A könyökre vonatkozó anatómiai szabályok

A negyedik, egyben utolsó vizsgálatunk két pontot ad eredményül (amennyiben a pontok léteznek). Az egyik az a pont ($f_{\min}$), amin túl a felkar és az alkar 35 foknál kisebb szöget, a másik pedig ($f_{\max}$) az, amelyen túl e két végtag 180 foknál nagyobb szöget zárna be. Az algoritmus meghatározta a könyök legtávolabbi

lehetséges pontját a célponttól a 3.2-es alfejezetben. Mivel ez a pont csak abban az esetben eredményez kinyújtott kart, amikor a célpont eléréséhez teljesen ki kell lennie nyújtva a karnak, minden más esetben a felkar és az alkar 180 foknál kisebb szöget fog bezárni, így nem kell vizsgálnunk az $f_{\max}$ pont létezését. Ez a pont a 3.2-es alfejezetben leírt pontként jelenik meg abban az esetben, ha a kar teljesen ki van nyújtva, minden más esetben pedig nem létezik.

Az $f_{\min}$ pont meghatározásához rajzoljuk fel azt az origó középpontú kört, melynek sugarát úgy képezzük, hogy kiszámítjuk a csukló és az origó távolságát abban az esetben, amikor a könyök 35 fokos szöget zár be. Ezen kör és a C3 kör metszéspontja lesz a negyedik szélsőérték. Az alábbi ábra szemlélteti, hogyan kapjuk meg a fent említett sugarat:



11. ábra. A negyedik szélsőérték sugarának meghatározása.

Az x távolság az $L2$, $L1$ és r oldalhosszúságokból képzett háromszög magassága, tehát merőleges az $L2$ vektorra, ahol $L2 = L2' + L2''$.

Először ki kell számolnunk az x oldalt, amit egy egyszerű tangens számítással végzünk: $x = \tan 35^\circ \cdot L1$. Az $L1$ és az x oldal ismeretében Pithagorasz tétel alkalmazásával számítható az $L2'$ oldal, majd az $L2$ -ből kivonva az $L2'$ -t, kapjuk $L2''$ -t. Így az $L2''$ és az x oldal ismeretében ki tudjuk számítani az r oldalt, ami a keresett sugár lesz.

3.6. A könyök optimális pontjának kiválasztása

Amennyiben ismerjük a szélsőértékeinket ki kell választani, hogy melyek fogják határolni a könyök lehetséges pontjaiból alkotott körívet. A könnyebb érthetőség kedvéért használjuk a pontokra a fent is alkalmazott megnevezéseket:

A 3.2-es alfejezetben kiszámított pont a könyök, a célponttól legtávolabbi lehetséges pontja: $k_{\max}$.

A 3.3-as alfejezetben kiszámított pont a könyök, a célponthoz legközelebbi lehetséges pontja: $k_{\min}$.

A 3.4-es alfejezetben kiszámított pont a könyök, a célponthoz legközelebbi pontja úgy, hogy figyelembe vesszük a csukló anatómiai mozgásterét: k_s .

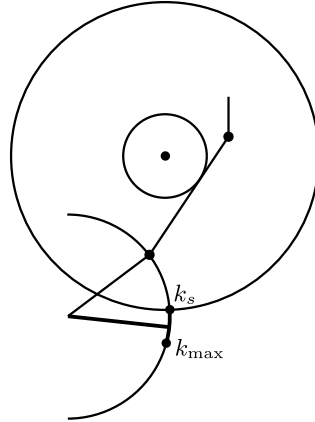
A 3.5-ös alfejezetben kiszámított pont a könyök azon lehetséges pontja, amelyen túl a kar csak olyan célállapotot tud felvenni, melyben a felkar és az alkar 35 foknál kisebb szöget zárna be: $f_{\min}$.

- Amennyiben egyetlen szélsőértéket sem találtunk, akkor az alapállapot szélsőértékei lesznek az irányadóak, melyek az L1 vektorból képzett félkör szélső pontjai, nevezetesen (0,L1) és (0,-L1). Erre az esetre igen csekély az esély.
- Amennyiben csak a $k_{\max}$ pontot találtuk meg, akkor e pont, és a félkör felső végpontja (0,L1) lesznek a határoló pontok.
- Amennyiben csak a $k_{\min}$ pontot találtuk meg, akkor e pont, és a félkör alsó végpontja (0,-L1) fogják határolni a körívet.
- Amennyiben csak a k_s pontot találtuk meg, akkor e pont, és a félkör alsó végpontja (0,-L1) pontok lesznek a szélsőértékek.
- Amennyiben csak az $f_{\min}$ pontot találtuk meg, akkor e pont, és a félkör felső végpontja (0,L1) lesznek a határoló pontok.
- Amennyiben két pontot találtunk meg, akkor mindig az anatómiai szabályokért felelős pontok „erősebbek.”
 - $k_{\max}$ és k_s pontok megléte esetén e két pont lesz a határérték.
 - $k_{\min}$ és k_s pontok megléte esetén azonban már nem e kettő, hanem k_s és a félkör alsó pontja (0, -L1) lesz a határérték, mivel a k_s pont a $k_{\min}$ pont irányából szűkíti a körívet.
- Amennyiben három pontot találunk meg a fentihez hasonló eljárást kell alkalmaznunk.
 - $k_{\max}$, $k_{\min}$, és k_s pontok megléte esetén k_s és $k_{\max}$ lesz a határérték, hiszen a k_s pont a $k_{\min}$ pont irányából szűkíti a körívet.
- Négy pont megléte esetén könnyű dolgunk van, a két belső pont fogja határolni a lehetséges pontokat reprezentáló körívet.

A fenti szabályrendszer úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a $k_{\min}$ és k_s pontok a félkör felső pontjának irányából (0,L1), a $k_{\max}$ és $f_{\min}$ pontok pedig a félkör alsó pontjának irányából (0, -L1) szűkíti a meglévő körívet. A könyök lehetséges pontjai mindig a legkisebb körív, amit a fenti szabályrendszer képez.

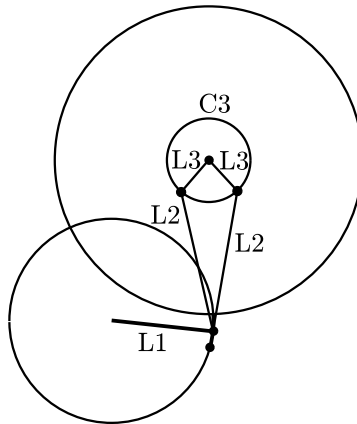
Ezen a köríven bárhol elhelyezkedhet a könyök. A legnagyobb mozgási szabadságot akkor garantálhatjuk, ha a körív közepére pozicionáljuk a könyököt, ilyenkor

a könyök jobbra és balra is ugyanakkora távolságot mozoghat el, ha arra van szükség.



12. ábra. A könyök lehetséges pontjaiból a kapott körív közepét választjuk a könyök új pontjának.

A kapott pontból érjük az L2 vektort a C3 körre. Ha a kar teljesen ki van nyújtva egy, ellenkező esetben két metszéspontot fogunk kapni. Mindkét pont anatómiai helyes a csuklóra nézve!



13. ábra. A könyök kiszámítása után általában két jó megoldásunk is lesz a végállapot meghatározására.

4. Az algoritmus előnyei

4.1. Az algoritmus a mentes a számítási hibáktól, természetesen figyelembe véve a műszereink pontosságát. A Jacobi mátrix-szal történő számítás során számítási hi-

bával kell számolnunk, amit csak sokszoros iterációval tudunk csökkenteni. A fenti algoritmus azonban körök metszéspontjaival számol, ami mindig pontos, figyelembe véve természetesen azt, hogy milyen pontosságig tudjuk kiszámítani a másodfokú egyenletekből származó lebegőpontos számokat.

4.2. *Az algoritmus kizárólag geometriai eszközkészletet használ, így futási időben megspórolható a mátrix invertálás és a hibák csökkentésének iterációjából származó időtöbblet.* A 4.1-es pontból adódik, hogy egy-egy elmozgatás során csak egyszer kell kiszámolnunk a fenti pontokat, így a többszöri lefuttatásból származó időtöbblettől megszabadulunk. Emellett az algoritmus futási időben lineáris problémákat old meg, ami szintén alacsony lépésszámot jelent.

4.3. *Az algoritmus működik a kar teljes kinyújtása után is, ellentétben a mátrixos megoldással.* Az algoritmus egyik fő előnye, hogy a kar teljes kinyújtásakor is működik. A Jacobi mátrix szinguláris lesz ebben az esetben, ami óriási hibához vezet, és többszöri iterációval sem csökkenthető kellőképpen. A körök metszéspontjából adódó számításoknak ez nem okoz problémát, hiszen csak az lesz a különbség a kis-sé behajlított karral szemben, hogy nem köríveken lesznek a megoldásaink, hanem minden körünk csak egy pontban érinti egymást. A kar ismételt behajlítása során ezen pontjainkból ismét körívek lesznek.

5. Gyakorlati felhasználás

Az algoritmus a térbeli kiterjesztés után alkalmas lehet a biomechanika több területén. A fő cél a kar és lábmozgások szimulációja, mely hozzásegíthet a sérült idegpályával rendelkező emberek rehabilitációjához.

Felhasznált irodalom

- [1] H. Asada, Introduction to Robotics, Department of Mechanical Engineering, Cambridge, MIT, 2005.
- [2] Laczkó József, Az emberi mozgás szabályozásának matematikai modelljei, *Matematikai Lapok*, Bolyai János Matematikai Társulat, 1999.
- [3] Laczkó József és társai, Components of the End-Effector Jerk During Voluntary Arm Movements, *Journal of Applied Biomechanics*, 16. évf. 1. szám, 2000, 14-25.
- [4] A. Moroz, Physical Therapy (PT), Merck Manual, <http://www.merckmanuals.com/professional/special-subjects/rehabilitation/physical-therapy-pt>, 2013.
- [5] Wettl Ferenc, Lineáris algebra, BME TTK, 2011.
- [6] Wikipedia, Jacobi-mátrix, <https://hu.wikipedia.org/wiki/Jacobi-m%C3%A1trix>