

Miért hajráznak a hosszútáv futók?

BENKŐ DÁVID, VARGA TAMÁS*

1. Bevezetés

Hosszútávú futóversenyeken¹ azt figyelhetjük meg, hogy a (tapasztalt) versenyzők a verseny nagy részét közel egyenletes tempóban futják le, majd a táv végén gyakran növelik tempójukat, hajráznak. Ennél fogva azonos képességű futók között gyakran csak a verseny legvégén dől el a sorrend. A cikkben egyszerű matematikai modellt keresünk ennek a jelenségnek a magyarázatára. „Hosszútáv” alatt azt értjük, hogy a verseny teljesítése jelentősen igénybe veszi a sportoló energiatartalékait és a verseny befejezése után gyakorlatilag teljesen kimerül. Ez praktikusán azt jelenti, hogy a versenytáv legalább 1500 m, de talán még jobb, ha 10 000 m-re, félmaratonra vagy maratonra gondolunk. Semmiképpen sem a 100-200 m-es rövidtávokra, ahol maga a rajtolás is különös gondot igényel és jóval nagyobb szerepet kap a robbanékonyság, a rövid ideig tartó gyors mozgás, ami a rövid és hosszútáv futók közti alkatbeli különbségekben is jól megfigyelhető. Hallgatólagosan azt is feltételezzük, hogy a futópálya tengerszint feletti magassága állandó (sík), nincs szél, nincsenek terepakadályok, éles kanyarok. A „tapasztalt” jelző itt azt jelenti, hogy a futó az edzések és korábbi versenyek alatt elég tapasztalatot gyűjtött ahhoz, hogy elég pontosan meg tudja becsülni energiatartalékait és ehhez igazítsa tempóját, tehát nem fog jóval képességei alatt futni, de az sem valószínű, hogy úgy elfutná magát, hogy fel keljen adnia a versenyt. Mindazonáltal becslése mégsem teljesen tökéletes, és, mint látni fogjuk, ez a kis tökéletlenség is elegendő, hogy a „hajrá” jelenségét tapasztaljuk. Természetesen a futóverseny sikeréhez nagyban hozzájárul a szellemi munka is, amit egyszerű modellünkben úgy értelmezhetünk, hogy a lelkes versenyző több energiával rendelkezik, ha pedig közben lényegesen változik a lelkesedése

*A szerzőt a dolgozat elkészítésében az EFOP 3.6.1-16-2016-00008 „Intelligens élettudományi technológiák, módszertanok, alkalmazások fejlesztése és innovatív folyamatok, szolgáltatások kialakítása a szegedi tudásbázisra építve” megnevezésű projekt támogatta.

¹Futóverseny helyett gondolhatunk gyaloglásra, kerékpározásra, úszásra is.

(lélekben feladja, vagy új erőre kap) az azt jelenti, hogy kevésbé pontosan becsülte fel a verseny kezdetén energiataralékait.

Modellünkben úgy vesszük, hogy a versenyzők 10 kört futnak, azaz ha a szokásos 400 m-es pályán teszik ezt, akkor a versenytáv 4000 m. Ha pedig a táv ettől különböző, akkor egy kört úgy definiálhatunk, mint a versenytáv egytizede, hiszen az is előfordulhat, hogy valójában egyetlen kör sincs, vagy csak túl nagy körök (félmaraton, maraton), amit már célszerűtlen lenne egységnek tekinteni. Arra keressük tehát a matematikai választ, hogy miért növelik a tempót, azaz miért hajráznak a versenyzők az utolsó körben. Természetesen a 10 körös felosztás helyett más felosztást is választhatnánk, de ez modellünk lényegi mondandóján nem változtatna.

2. Az egyenletes futás stratégiája

Ha elmegyünk egy félmaraton, maraton versenyre, akkor gyakran találkozhatunk úgynevezett iramfutókkal, akiket a szervezők arra kérnek fel, hogy egy bizonyos rögzített tempóban (pl. 5 perc/km, 4 perc/km) fussák le a távot. Így, aki eltervez egy adott tempót, az kiválaszthatja a tervéhez legjobban passzoló iramfutót és tervének teljesítéséhez nincs más dolga, mint tartania a tempót az iramfutóval. Ez azt jelenti, hogy az egész távot ugyanabban a tempóban futja le. Jó-e ez az iramstratégia? Nem lenne jobb, ha az elején kicsit gyorsabban kezdene és ahogy fáradna, kicsit lassítana, vagy esetleg az volna jó, hogy lassan kezdjen és majd a végén gyorsuljon fel, esetleg valami harmadik stratégia a legeredményesebb? Válaszunk attól függ, hogy mennyire pontosan ismerjük a futáshoz felhasználható energiataralékunkat.

Ebben a részben azt az ideális esetet vizsgáljuk, amikor a futó minden pillanatban pontosan tudja, hogy mennyi energia áll rendelkezésére a még hátralévő táv teljesítéséhez, és hogy fel is tudja használni ezt az energiát.

Először is határozzuk meg a 10 egység távolság lefutásához szükséges $t_{\text{össz}}$ időt, ha sebességünket az s hátralévő távolság folytonos függvényében $v(s)$ írja le. Ehhez osszuk fel a $[0, 10]$ intervallumot n egyenlő részintervallumra, és tegyük fel, hogy a k -adik intervallum megtételéhez Δt_k idő szükséges. Ekkor a k -adik intervallumon $(10/n)/\Delta t_k$ az átlagsebesség, amit $v(s)$ folytonossága miatt a jobb végpontban mért $v(10k/n)$ sebesség tetszőlegesen megközelíti n növelésével, azaz $(10/n)/\Delta t_k \approx v(10k/n)$.

A fenti jelölések értelmében futási időnk a következő módon számolható:

$$t_{\text{össz}} = \sum_{k=1}^n \Delta t_k = \sum_{k=1}^n \frac{(10/n)}{(10/n)/\Delta t_k} \approx \sum_{k=1}^n \frac{1}{v(10k/n)} \left(\frac{10k}{n} - \frac{10(k-1)}{n} \right),$$

ahol a jobb oldal $v(s)$ folytonossága miatt egyrészt $t_{\text{össz}}$ -höz tart, másrészt pedig $\int_0^{10} 1/v(s) ds$ -hez, hisz annak Riemann-féle közelítő összege [8, 10.1.3. Definíció, 141.o. ill. 10.5.5. Tétel, 152.o.]. Ezek szerint tehát a 10 körös verseny teljesítéséhez szükséges idő éppen

$$\int_0^{10} \frac{1}{v(s)} ds.$$

Vezessük még be az $e(v)$ függvényt az egységnyi távolság lefutásához szükséges energia jelölésére, ha sebességünk $v > 0$. Természetes feltételezni, hogy $e(v)$ pozitív, folytonos, szigorúan monoton növény, és szigorúan konvex. Ebből talán csak a konvexitás feltevése nem tűnhet világosnak, de ez csak azt a talán az olvasó által is tapasztalt jelenséget fejezi ki, hogy teljesítményünk határának közelében, már a sebesség egy „kicsi” növelése is igen nagy erőfeszítést igényel, míg kisebb sebességről az ugyanakkora „kicsi” növelés nem kíván akkora erőfeszítést.

Most már megválaszoljuk, hogy ideális esetben, melyik stratégia biztosítja a legjobb versenyidőt.

Állítás. *Ha a futó mindig pontosan ismeri a futásra még felhasználható energiataralékát, akkor a legjobb stratégia, ha konstans sebességgel fut úgy, hogy a verseny végére elfogyjon az energiája.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a futásra felhasználható energia 1 egység. Világos, hogy egy optimális stratégiához tartozó $v(s)$ függvény mellett az összes energiát fel kell használnunk, azaz

$$(1) \quad \int_0^{10} e(v(s)) ds = 1,$$

hiszen ha maradna energia, azt felhasználhatnánk sebességnövelésre, ami javítana az időn.

Vezessük be az $r(v) = e(1/v)$ segédfüggvényt. Mivel $e(v)$ szig. mon. növény, ezért $r(v)$ szig. mon. csökkenő. Sőt, felhasználva $e(v)$ és $1/v$ szig. konvexitását, továbbá $e(v)$ szig. mon. növényét, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} r(\lambda a + (1 - \lambda)b) &= e\left(\frac{1}{\lambda a + (1 - \lambda)b}\right) \leq e\left(\lambda \frac{1}{a} + (1 - \lambda)\frac{1}{b}\right) \\ &\leq \lambda e\left(\frac{1}{a}\right) + (1 - \lambda)e\left(\frac{1}{b}\right) = \lambda r(a) + (1 - \lambda)r(b), \end{aligned}$$

minden $\lambda \in [0, 1]$ és $0 < a < b$ esetén, azaz $r(v)$ szigorúan konvex a pozitív számegyenesen. Ezért alkalmazhatjuk a Jensen-egyenlőtlenséget (lásd pl. [7, 6.1.

fejezet 1. Tétel²] vagy [4, 17. Integrálás: egyenlőtlenségek, 120. o.]), amiért

$$r \left(\int_0^{10} \frac{1}{v(s)} \frac{ds}{10} \right) \leq \int_0^{10} r \left(\frac{1}{v(s)} \right) \frac{ds}{10},$$

ahol egyenlőség csak akkor van, ha $v(s)$ konstans. Mivel $r(v)$ szig. mon. csökkenő ezért létezik r^{-1} inverze és az is szig. mon. csökkenő [8, 5.6.1. Tétel, 56. o.]. Alkalmazzuk ezt az inverz függvényt az előbbi egyenlőtlenségre. Azt kapjuk, hogy

$$\left(\int_0^{10} \frac{1}{v(s)} \frac{ds}{10} \right) \geq r^{-1} \left(\int_0^{10} r \left(\frac{1}{v(s)} \right) \frac{ds}{10} \right) = r^{-1} \left(\frac{1}{10} \int_0^{10} e(v(s)) ds \right),$$

és egyenlőség csak akkor van, ha $v(s)$ konstans. Vegyük még észre, hogy (1) miatt a jobb oldal éppen $r^{-1}(1/10)$. Tehát $v(s)$ valamely rögzített konstans $v_0 > 0$ sebesség kell legyen, és v_0 kielégíti az $r(1/v_0) = 1/10$ egyenletet, azaz $v_0 = e^{-1}(1/10)$. ■

3. A sebesség mint a körönkénti energia függvénye

Az előző részben olyan ideális képességet tételeztünk fel a futókról (pontos energiatartalék-felmérés képessége), ami biológiai lényekről lévén szó valószínűleg sosem teljesül, legfőljebb a legkiválóbbak jól megközelítik. Így a következőkben azt elemezzük, milyen iramstratégiát válasszunk, ha csak hozzávetőlegesen ismerjük a futáshoz rendelkezésre álló energiatartalékainkat.

Ehhez már feltételeztünk egy konkrétabb összefüggést a sebesség és a felhasználandó energia között. Nevezetesen feltesszük, hogy a v sebesség és a körönként felhasznált g egységnyi energia között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$(2) \quad v(g) = cg^\alpha, \quad \text{ill.} \quad g(v) = \left(\frac{v}{c} \right)^{1/\alpha},$$

ahol $c > 0$ és $\alpha \in (0, 1]$ rögzített konstansok. A felhasznált energia így szig. mon. nő a sebesség növekedésével és szigorúan konvex függvény, másrészt $v(g)$ definíciója kielégíti azt a tapasztalati tényt, hogy nagyobb energiát befektetve nagyobb a sebesség (szig. mon. növény) és, hogy nagyobb sebesség esetén ugyanakkora gyorsításhoz több energia kell, mint kisebb sebességről (szigorúan konkáv). [Ha sétálunk (mondjuk 13,3 perc/km) és elkezdünk kocogni (6-7 perc/km), szinte erőlködés nélkül megy, de 4 perc/km-ről 3 perc/km-es tempóra váltani, noha csak 1 perc/km

²Az idézett helyen a tétel tetszőleges mérték szerinti integrálra van kimondva, ezért Riemann-integrálra is érvényes, de a bizonyítást akkor is végigkövethetjük, ha csak a Riemann-integrált ismerjük; egyszerűen $d\mu$ helyett írjunk dx -et és az integrálás tartományát jelölő X -et vegyük egy $[c, d]$ intervallumnak.

az eltérés, már jelentős erőfeszítést igényel és még ha sikerül is, olimpikonnak kell lennünk, hogy pl. egy félmaratoni távon tartsuk ezt az iramot.]

Modellünk persze nem tökéletes, mert az is nyilvánvaló tapasztalat, hogy a sebesség növelésének egy nagyság után fiziológiai korlátai vannak (még a csúcsformában lévő Usain Bolt³ sem futott 100 km/h-val), de ettől most eltekintünk, mert fizikai mérések kellenének annak megállapítására, hogy pontosan hogyan válik v korlátossá. Úgyszintén az is igaz, ha v nullához tart, akkor valóságban $g(v)$ nem nullához, hanem egy pozitív konstanshoz tart (nyugalmi energiafelhasználás), de ezt a konstanszt most elhanyagoljuk az egyszerűség kedvéért.

A (2) összefüggés a valóságtól nem teljesen elrugaszkodott, ahogy azt a névsorban előrébb helyezkedő szerző következő észrevétele is megerősíti: a

$$(3) \quad v(d) = \frac{13,3 \text{ m}}{d^{0,08} \text{ s}}$$

formula, ahol d a versenytáv méterben megadott hossza, jó közelítést adja a világcsúcstartó futók (méter/másodperc-ben kifejezett) sebességének (lásd a táblázatot alább). A hibák például kisebbek, mint 0,13 méter/másodperc, avagy 2%, az 1000, 1500, 5000, 10000 méteres, félmaraton és maraton versenyeknél.

Táv	Név	Átlagsebesség (m/s)	Képlet szerinti sebesség (m/s)	Eltérés (m/s)	Eltérés %
800 m	David Lekuta Rudisha	7,93	7,79	0,14	1,72
1000 m	Noah Ngeny	7,58	7,65	-0,08	0,99
1500 m	Hicham El Guerrouj	7,28	7,41	-0,13	1,75
1 mérföld	Hicham El Guerrouj	7,21	7,37	-0,16	2,15
2000 m	Hicham El Guerrouj	7,02	7,24	-0,22	3,10
3000 m	Daniel Komen	6,81	7,01	-0,20	2,96
5000 m	Kenenisa Bekele	6,60	6,73	-0,13	1,92
10000 m	Kenenisa Bekele	6,34	6,37	-0,03	0,42
10 km	Leonard Patrick Komon	6,23	6,37	-0,13	2,11
20000 m	Haile Gebrselassie	5,91	6,02	-0,12	1,96
félmaraton	Zersenay Tadesse	6,02	6,00	0,03	0,43
25000 m	Moses Cheruiyot Mosop	5,75	5,92	-0,16	2,83
30000 m	Moses Cheruiyot Mosop	5,76	5,83	-0,07	1,20
maraton	Dennis Kipruto Kimetto	5,72	5,67	0,05	0,81
100 km	Takahiro Sunada	4,46	5,29	-0,83	18,67

Táblázat. A táblázat a Nemzetközi Atlétikai Szövetség (IAAF) 2017.12.20-i hivatalos adatai alapján készült (<https://www.iaaf.org/records/by-category/world-records>).

Átlagsebesség: a versenyző rekordideje alapján számolt átlagsebesség.

Képlet szerinti sebesség: a (3) képlet szerint számolt sebesség.

Eltérés = Átlagsebesség – Képlet szerinti sebesség.

Eltérés% = $100 \cdot \frac{\text{Átlagsebesség} - \text{Képlet szerinti sebesség}}{\text{Átlagsebesség}}$.

(A 10000 m-es és a 10 km-es táv között az a különbség, hogy az előbbi 400 m-es pályán, míg az utóbbi utcán zajló verseny.)

³A cikk írásakor ő a 100m-es síkfutás világcsúcásának birtokosa, rekordideje 9,58 másodperc, ami kb. 37,58 km/h-ás átlagsebességet jelent. Forrás: <https://www.iaaf.org/records/by-category/world-records>

Ha most egy kört 400 méternek tekintünk, akkor $13,3/d^{0,08} = 8,24/(d/400)^{0,08}$, ezért, ha egységnyi energiánk van a versenyre, akkor $g = 1/(d/400)$ lesz az egy körre jutó energia, mert $d/400$ a körök száma. Így a $c = 8,24$ és az $\alpha = 0,08$ választás mutatja, hogy a (2) összefüggés jól modellezi a valóságot.

4. Sprintelés az utolsó körben

Tekintsünk egy tapasztalt futót, aki hozzávetőlegesen jól felbírja becsülni, hogy egy adott pillanatban mennyi futásra felhasználható energiával rendelkezik még. Becslését egy az $[1/Q, Q]$ intervallumon egyenletes eloszlású E véletlen változónak tekintjük (egyenletes eloszlásról lásd pl. [10, IV.6.§, 171.o.] vagy [4, 11.2. Példa, 72.o.]). Ez azt is jelenti, hogy kb. egységnyi energiával rendelkezik. A $Q > 1$ érték 1-hez való közelsége azt fejezi ki, hogy a sportoló mennyire pontosan tudja felmérni energiatartalékait.

Továbbra is 10 körre osztjuk a versenyt és feltesszük, hogy az utolsó körben a futó már pontosan ismeri a futásra felhasználható energiáját, azaz a becsléséből származó hiba ekkor már mérési hibahatáron kívül esik.

Legyen q a körönként felhasználni tervezett energia az első 9 körben, vagyis $g_n = q$, $n = 1, \dots, 9$, ahol $q \in [1/(10Q), Q/10]$ az $E/10$ érték becslése. Ekkor a futónak az utolsó körre $g_{10} = E - 9q$ energiája fog maradni, amit fel is fog használni. Világos, hogy $E = 9q + (E - 9q) \geq 9q$, ezért $q \leq E/9$. Mivel E értékét nem ismerjük, még azt a megszorítást is feltesszük, hogy $q < 1/(9Q)$, így q „új” értékkészlete $[1/(10Q), 1/(9Q)) \cap [1/(10Q), Q/10]$. [Egyébként, ha versenyzőnk olyan jól felbecsüli energiáját, hogy Q kisebbnek vehető $\sqrt{10}/3$ -nál, akkor ez nem jelent megszorítást, hisz ekkor $Q/10 < 1/(9Q)$.]

Feltevéseink mellett az első 9 körben cq^α , az utolsó körben pedig $c(E - 9q)^\alpha$ a futó sebessége, így ha v_n jelöli a futó sebességét az n -edik körben, akkor a futás összeideje

$$(4) \quad T_q(E) = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{c} \left(\frac{9}{q^\alpha} + \frac{1}{(E - 9q)^\alpha} \right).$$

Célunk az összidő minimalizálása q függvényében. Mivel azonban E véletlen változó, ezért a $T_q(E)$ q -val paraméterezett mennyiség is a véletlen függvénye, így $T_q(E)$ minimalizálása helyett, jobb híján, annak várható értékét minimalizáljuk q függvényében. Feltevésünk szerint E az $[1/Q, Q]$ intervallumon egyenletes eloszlású, ezért $T_q(E)$ várható értéke⁴ $(Q - 1/Q)^{-1} \int_{1/Q}^Q T_q(E) dE$.

⁴Itt lényegében a $T_q(\cdot)$ függvényt komponáljuk az E véletlen változóval, így $T_q(E)$ is véletlen változó, és várható értékét úgy kapjuk meg, hogy a $T_q(\cdot)$ függvényt integráljuk az E eloszlása által

4.1. $\alpha = 1$

Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor a sebesség és az energia közti összefüggést leíró (2) modellben $\alpha = 1$. (Ez egyébként, mint később látni fogjuk, megkapható az $\alpha < 1$ esetekből is határátmenet segítségével.) Ekkor

$$c \int_{1/Q}^Q T_q(E) dE = 9(Q - 1/Q) \frac{1}{q} + \ln(Q - 9q) - \ln(1/Q - 9q) =: t(q).$$

Mivel $t(q)$ és $T_q(E)$ várhatóértékének q -ban vett minimumhelye(i) megegyeznek, elég megkeresnünk $t(q)$ minimumhelyé(i)t. Ehhez első lépésben megkeressük

$$t'(q) = -9(Q - 1/Q) \frac{1}{q^2} + \frac{9}{1/Q - 9q} - \frac{9}{Q - 9q}$$

zérushelyeit. Egyszerű átrendezés mutatja, hogy a zérushelyek egybeesnek a

$$80q^2 - 9 \left(Q + \frac{1}{Q} \right) q + 1 = 0,$$

egyenlet gyökeivel, azaz

$$(5) \quad q_{1,2} = \frac{9(Q + \frac{1}{Q}) \pm \sqrt{81(Q^2 + 1/Q^2) - 158}}{160}.$$

A „+” ághoz tartozó gyököket, mint könnyen ellenőrizhető, el kell vetnünk a $q < 1/9Q$ feltétel miatt. Ezek után jelölje q_0 az egyetlen figyelembe vehető (azaz a „-” ághoz tartozó) zérushelyet. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy ez $1/10Q$ és $\min(1/9Q, Q/10)$ közé esik (ne feledjük, $Q > 1$), ezért az $(1/10Q, 1/9Q) \cap (1/10Q, 10/Q)$ halmazon ez az egyetlen hely lehet szélsőértékhely. Ha még figyelembe vesszük, hogy $t(q)$ folytonos a $(0, 1/9Q)$ intervallumon, és féloldali határértékei a végpontokban

$$\lim_{q \rightarrow 0^+} t(q) = \lim_{q \rightarrow (1/9Q)^-} t(q) = +\infty,$$

akkor látjuk, hogy $t(q)$ -nak kell legyen legalább egy minimumhelye a $(0, 1/9Q)$ intervallumon. Mivel q_0 -n kívül más belső szélsőértékhely nem lehet, ezért q_0 minimumhely, sőt az egyetlen minimumhely a $(1/10Q, 1/9Q) \cap (1/10Q, 10/Q)$ halmazon. Ezzel azt is beláttuk, hogy $t(q)$ szigorúan csökkenő a $(0, q_0]$ intervallumon és szigorúan növekedő a $[q_0, 1/(9Q))$ intervallumon, ezért az optimális energia az első 9 körben valóban q_0 .

generált mérték szerint, azaz egy Stieltjes-integrálról van szó. [4, 16. fejezet, Transzformációtétel, 114. o., továbbá lásd még 19. és 20. fejezetek]

Összegezve, ha a versenyző úgy becsüli a verseny kezdetekor, hogy a futáshoz felhasználható energia mennyisége valahol $1/Q$ és Q között helyezkedik el egyenletes eloszlás szerint, akkor az első 9 körben körönként q_0 energiát kell felhasználnia (pontosabban a körönként felhasznált energia mennyiségének várható értéke q_0 kell legyen), amit a (2) formula szerint úgy érhet el, ha cq_0 (várható értékű) sebességgel fut.

Habár (5) „–” ága pontosan megadja q_0 értékét, keresünk egy egyszerű közelítő megoldást is. E célból a Q értéket $1 + \epsilon$ alakban írjuk fel, azaz $Q = 1 + \epsilon$. Vegyük észre, hogy ekkor $1/Q \approx 1 - \epsilon + \epsilon^2$, $Q^2 = 1 + 2\epsilon + \epsilon^2$, $1/Q^2 \approx 1 - 2\epsilon - \epsilon^2 + (2\epsilon + \epsilon^2)^2 \approx 1 - 2\epsilon + 3\epsilon^2$. Így

$$q_0 \approx \frac{9(2 + \epsilon^2) - \sqrt{4(1 + 81\epsilon^2)}}{160}.$$

Tekintve, hogy $\sqrt{1 + \epsilon} \approx 1 + \epsilon/2$, azt kapjuk, hogy

$$(6) \quad q_0 \approx \frac{9(2 + \epsilon^2) - 2(1 + 81\epsilon^2/2)}{160} = \frac{1}{10} - \frac{9}{20}\epsilon^2.$$

Az első kilenc körben tehát a $c(1/10 - 9\epsilon/20)$ érték egy jó közelítése az optimális sebességnek.

Mit mondhatunk az utolsó körrel? Verseny kezdetén csak annyit tudunk, hogy arra $E - 9q_0$ energia marad, így azt $c(E - 9q_0)$ sebességgel lehet a leggyorsabban lefutni. Feltevésünk szerint ennek pontos értéke az aktuális verseny tizedik körének kezdetekor ugyan kiderül, de a mi szempontunkból egy véletlen változó, így, jobb híján, a várható értékét adjuk meg. Mivel E várható értéke (pongyolán átlaga) $(Q + 1/Q)/2 \approx 1 + \epsilon^2/2$, ezért a tizedik kör optimális sebességének várható értéke $c(1 + \epsilon^2/2 - 9q_0) \approx c(1 + \epsilon^2/2 - 9/10 + 81\epsilon^2/20) = c(1/10 + 91\epsilon^2/20)$, vagyis a versenyzőnek várhatóan hajráznia kell az utolsó körben.

Hányszor gyorsabb az utolsó körben alkalmazandó sebesség várható értéke a korábbi körök ajánlott optimális sebességénél? A válasz eddigi számolásaink szerint jó közelítéssel a következő:

$$\frac{\frac{1}{10} + \frac{91}{20}\epsilon^2}{\frac{1}{10} - \frac{9}{20}\epsilon^2} = \frac{1 + \frac{91}{2}\epsilon^2}{1 - \frac{9}{2}\epsilon^2} \approx \left(1 + \frac{91}{2}\epsilon^2\right) \left(1 + \frac{9}{2}\epsilon^2\right) \approx 1 + 50\epsilon^2.$$

Ha például $Q = 1,05$ ($\epsilon = 0,05$), a fenti hányados körülbelül 1,13.

4.2. $\alpha \in (0, 1)$

Ismét a (4) általános alakból indulunk ki, és most azt tesszük fel, hogy $\alpha \in (0, 1)$. Megint keressük azt a q értéket, ami minimalizálja $T_q(E)$ várható értékét. Ezt

hasonlóan határozzuk meg, mint az előbb: kiindulunk a $c \int_{1/Q}^Q T_q(E) dE$ integrálból és azt q szerint deriváljuk:

$$c \int_{1/Q}^Q T_q(E) dE = 9(Q - 1/Q) \frac{1}{q^\alpha} + \frac{(Q - 9q)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(1/Q - 9q)^{1-\alpha}}{1-\alpha} =: t(q),$$

$$(7) \quad t'(q) = -9\alpha(Q - 1/Q)q^{-1-\alpha} - 9(Q - 9q)^{-\alpha} + 9(1/Q - 9q)^{-\alpha}.$$

Sajnos jelen esetben ($\alpha < 1$) lehetetlen megoldani a $t'(q) = 0$ egyenletet, így egy közelítő megoldást keresünk. Ahogyan korábban is tettük, legyen $Q = 1 + \epsilon$. Az $\alpha = 1$ eset alapján (lásd (6)) q_0 közelítését

$$(8) \quad \frac{1}{10} - d\epsilon^2 =: q$$

alakban végezzük. Mint látni fogjuk, ez a forma eredményre fog vezetni.

Idézzük fel az $(1+x)^\beta$ alakú kifejezések binomiális sorfejtését [8, 31.2. fejezet, 397.o.]:

$$(1+x)^\beta = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} x^k, \quad \text{ahol} \quad \binom{\beta}{k} = \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2) \cdots (\beta-k+1)}{k!}.$$

Ez alapján az $(1+x)^{-\alpha}$ függvényt úgy közelítjük, hogy binomiális sorából elhagyjuk a harmadnál nagyobb fokú tagokat (azért hagyjuk még meg a harmadfokú tagot, mert az ϵ -től nem függő ill. az ϵ -től lineárisan vagy kvadratikusan függő tagok ki fognak esni):

$$\begin{aligned} (1+x)^{-\alpha} &\approx 1 + \binom{-\alpha}{1}x + \binom{-\alpha}{2}x^2 + \binom{-\alpha}{3}x^3 \\ &= 1 - \alpha x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}x^2 - \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{6}x^3, \quad \text{ha } x \approx 0. \end{aligned}$$

Mínthogy $1/Q \approx 1 - \epsilon + \epsilon^2 - \epsilon^3$, így

$$(9) \quad Q - 1/Q \approx 2\epsilon - \epsilon^2 + \epsilon^3.$$

Az $(1+x)^{-1-\alpha}$ binomiális sorfejtéséből elhagyva az elsőnél nagyobb fokú tagokat, és x helyébe $(-10d\epsilon^2)$ -et helyettesítve adódik, hogy

$$\begin{aligned} (10) \quad q^{-1-\alpha} &= \left(\frac{1}{10} - d\epsilon^2 \right)^{-1-\alpha} = 10^{1+\alpha} (1 - 10d\epsilon^2)^{-1-\alpha} \\ &\approx 10^{1+\alpha} (1 - (-1-\alpha)10d\epsilon^2). \end{aligned}$$

Ugyanakkor (8) alapján

$$\begin{aligned} 9(Q - 9q)^{-\alpha} &= 9 \left(\frac{1}{10} + \epsilon + 9d\epsilon^2 \right)^{-\alpha} = 9 \cdot 10^\alpha (1 + 10(\epsilon + 9d\epsilon^2))^{-\alpha} \\ &\approx 9 \cdot 10^\alpha \left(1 - \alpha 10(\epsilon + 9d\epsilon^2) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} 100(\epsilon + 9d\epsilon^2)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{6} 1000(\epsilon + 9d\epsilon^2)^3 \right), \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} 9 \left(\frac{1}{Q} - 9q \right)^{-\alpha} &= 9 \left(\frac{1}{10} - \epsilon + (1 + 9d)\epsilon^2 - \epsilon^3 \right)^{-\alpha} \\ &= 9 \cdot 10^\alpha (1 + 10[-\epsilon + (1 + 9d)\epsilon^2 - \epsilon^3])^{-\alpha} \\ &\approx 9 \cdot 10^\alpha \left(1 - \alpha 10[-\epsilon + (1 + 9d)\epsilon^2 - \epsilon^3] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} 100[-\epsilon + (1 + 9d)\epsilon^2 - \epsilon^3]^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{6} 1000[-\epsilon + (1 + 9d)\epsilon^2 - \epsilon^3]^3 \right). \end{aligned}$$

Térjünk vissza a $t'(q) = 0$ egyenlethez, amit, mint említettük, most nem tudunk analitikusan megoldani. Ezért a $t'(q)$ kifejezésben a megfelelő részkifejezéseket rendre cseréljük le a (9)-ben, a (10)-ben, a $9(Q - 9q)^{-\alpha}$ -ra, ill. a $9(1/Q - 9q)^{-\alpha}$ -ra kapott közelítésekkel, és az így nyert most már d -től és ϵ -től függő egyenletet oldjuk meg d -re. A számolás során (miután elhanyagoljuk a negyed és magasabb fokú tagokat) kiesnek az ϵ -től nem függő, ill. az ϵ -től lineárisan és négyzetesen függő tagok, így végül a

$$10^{\alpha+1} \alpha(\alpha+1)[-1800d + 300(\alpha+2) - 90]\epsilon^3 = 0$$

egyenlethez jutunk, amiből már könnyen kapjuk, hogy

$$d = \frac{10\alpha + 17}{60}.$$

Ezt visszahelyettesítve (8)-ba, a következő közelítést nyerjük:

$$q_0 \approx \frac{1}{10} - \frac{10\alpha + 17}{60} \epsilon^2.$$

Vegyük észre, hogy ez az $\alpha = 1$ esetnek is megfelel, mert α helyébe 1-et írva újra megkapjuk (6)-ot. Végül, mivel $\alpha \in (0, 1]$, adódik, hogy $d \in (17/60, 27/60]$.

5. Ha pontosan tudjuk az energiát

Ismét tételezzünk föl egy olyan ideális futót, aki mindig pontosan tudja, hogy mennyi energiája van még futásra. Azonban úgy határoz, hogy kicsit lassabban fut, mint amit a rendelkezésére álló energiához tartozó optimális sebesség megengedne.

Tegyük fel továbbra is, hogy a sebesség és a rendelkezésünkre álló energia közti kapcsolatot (2) írja le, amelyben α -t most 1-nek választjuk. Tehát, ha egy kör lefutására g egységnyi energiát használunk fel, akkor sebességünk cg .

Jelölje $E(s)$ az atléta futásra felhasználható energiatartalékát, ha a 10 „körös” versenyből még s környi van hátra, s tehát a $(0, 10]$ intervallum eleme. Feltehető, hogy a futó kezdő pillanatbeli energiáját tekintjük egységnyi energiának, azaz $E(10) = 1$. Kezdetben tehát $1/10$ egységnyi energia jut egy körre. Így, ha a versenyző a rendelkezésére álló energiamennyiség mellett a lehető legrövidebb idő alatt szeretné lefutni a 10 kört és igaz a $v(g) = cg$ összefüggés, akkor a „Az egyenletes futás stratégiája” című rész szerint végig $c/10$ sebességgel kéne futnia. Ugyanígy látható, ha a futónak pontosan $E(s)$ energiája van még s környire a céltól, és ezért ekkor egy körre $E(s)/s$ energia jutna, akkor a verseny befejezéshez, a $v = cE(s)/s$ konstans sebesség lenne az optimális. Azonban a futó valamiért úgy viselkedik, mintha $E(s)/\beta$ energiája lenne, ahol β egy rögzített pozitív szám (például, ha $\beta > 1$, azt óvatosságnak, tartalékolásnak értelmezhetjük). Tempóját ehhez igazítja, sebessége ezért

$$(11) \quad v(s) = cE(s)/(\beta s)$$

lesz.

Figyeljük meg, mi történik, miközben a céltól s környire lévő futó egy kis $\Delta s > 0$ környit halad és ezért már csak $s - \Delta s$ köre lesz hátra! A futó ezalatt közelítőleg

$$\frac{E(s)}{\beta s} \Delta s$$

egységnyi energiát használ fel energiatartalékából, vagyis

$$E(s) - E(s - \Delta s) \approx \frac{E(s)}{\beta s} \Delta s.$$

Ha most mindkét oldalt elosztjuk Δs -el és Δs -t 0-hoz tartatjuk, akkor $E(10) = 1$ kezdeti érték feltétel mellett a következő

$$E'(s) = \frac{E(s)}{\beta s}, \quad s \in (0, 10],$$

szétválasztható változójú differenciálegyenlethez (lásd pl. [8, 15.2. fejezet, 208.o.]) jutunk. Osztva $E(s)$ -sel, majd s_0 -tól 10-ig integrálva, azt kapjuk, hogy

$$\ln E(10) - \ln E(s_0) = \int_{s_0}^{10} \frac{E'(s)}{E(s)} ds = \int_{s_0}^{10} \frac{1}{\beta s} ds = \frac{1}{\beta} (\ln 10 - \ln s_0).$$

Fejezzük ki ebből $E(s_0)$ -t, felhasználva, hogy $E(10) = 1$, és ennél fogva $\ln E(10) = 0$. Lecserélve az s_0 változót az s változóra, nyerjük, hogy

$$E(s) = \left(\frac{s}{10}\right)^{1/\beta}, \quad s \in [0, 10].$$

Ha most ezt behelyettesítjük (11)-be, akkor a következő összefüggésre jutunk:

$$v(s) = c \frac{E(s)}{\beta s} = \frac{c}{\beta} 10^{-1/\beta} \frac{1}{s^{1-1/\beta}}, \quad s \in [0, 10].$$

Elemezzük az energiára és a sebességre imént kapott formulákat:

- Ha $\beta = 1$, azaz a futó nem óvatos, akkor $v(s) = c/10$, tehát az optimális stratégiához tartozó egyenletes sebességgel fog futni.
- Mivel $E(0) = 0$, modellünk azt mondja, hogy még ha β nagyobb is mint 1, a futó akkor is felhasználja minden energiáját. Sebessége végtelenhez tart ahogy közelít a célhoz (azaz $s \rightarrow 0^+$), vagyis a verseny végén sprintelni fog.
- Ha $\beta < 1$, azaz a futó nem hogy nem óvatos, hanem úgy fut, mintha többlet energiával rendelkezne, akkor fenti megfontolásunk szerint a futó bár befejezi a versenyt, de a végére nagyon lelassul. A futó pedig verseny után úgy panaszkodik futó ismerőseinek, hogy elfutotta magát.

6. Egy folytonos stratégia

Ebben a részben egy olyan atlétát tételezünk fel, aki folyamatosan becsüli a futásra még felhasználható energiataralékát és ez alapján alakítja ki sebességprofilját. Mindig úgy alakítja sebességét, hogy az pont a becsült energiataralékhoz tartozó optimális sebesség legyen. Még az utolsó körben is csak becsül, de a becslések egyre jobbakká lesznek, mert feltételezzük, hogy becslés relatív hibája⁵ állandó.

Az energia és a sebesség között továbbra is a (2) összefüggést tesszük fel $\alpha = 1$ választással. Ugyancsak az eddigi jelölésnek megfelelően $E(s)$ jelöli a még felhasználható energia mennyiségét, ha $s \in [0, 10]$ távolság (kör) van még hátra. A

⁵Tegyük fel, hogy egy mennyiség pontos értéke $m \neq 0$, a becsült értéke b , akkor a becslés relatív hibája $|m - b|/|m|$, tehát a relatív hiba megadja, hogy az abszolút hiba hogyan viszonyul a becslendő mennyiséghez (lásd pl. [3, 2.1. fejezet, 5.o.]).

futó saját energiatartalékára vonatkozó becslését jelölje $F(s)$ és tegyük fel, hogy a becslés relatív hibája $Q - 1$, ahol Q egy 1-nél nagyobb rögzített szám. Ennek megfelelően $E(s)$ és $F(s)$ között a következő kapcsolat áll fenn:

$$(12) \quad \frac{1}{Q}F(s) \leq E(s) \leq QF(s).$$

(A relatív hiba definíciója szerint a felső becslésnek valójában $F(s)/(2 - Q)$ -nak kéne lennie, de ettől a pongyolaságtól most eltekintünk, mert ha Q közel van 1-hez, akkor $1/(2 - Q) \approx Q$.) A relatív hiba állandósága mellet még azt is feltesszük, hogy a becslésben elkövetett hiba is állandó, azaz

$$E(s) = qF(s),$$

valamilyen s -től független rögzített $q \in [1/Q, Q]$ érték mellett. Azt is tudjuk q -ról, hogy a futó számára minden egyes versenyen egyenletes eloszlást követve véletlenszerűen kerül ki az $1/Q$ és Q közötti számok közül.

A futó tudatában van a (12) egyenletnek, ezért korrigálandó tévedését, úgy fut, mintha $zF(s)$ lenne az energiatartaléka (ahol $z \in [1/Q, Q]$ az ő választása), nem pedig $F(s)$. Ezzel az a célja, hogy minimalizálja a futás várható idejét. A sebességét mindig úgy változtatja ezért, hogy az éppen a korrigált $zF(s)$ energiatartalék becsléshez tartozó optimális sebesség legyen, azaz (2) szerint

$$(13) \quad v(s) = c \frac{zF(s)}{s}$$

lesz a sebessége. A továbbiakban meghatározzuk z optimális értékét, azaz azt az értéket, amely mellett minimális lesz a futás várható ideje.

Követve az előző rész logikáját, az $E'(s) = zF(s)/s$ szétválasztható változójú differenciálegyenlethez jutunk. Felhasználva az $E(s) = qF(s)$ összefüggést, az alábbi kezdeti érték problémát kapjuk:

$$F'(s) = \frac{zF(s)}{qs}, \quad F(10) = 1,$$

melynek megoldása $F(s) = (s/10)^{z/q}$, $s \in [0, 10]$. Ebből pedig

$$(14) \quad v(s) = c \frac{z}{10^{z/q}} s^{z/q-1}, \quad s \in [0, 10].$$

A futó ideje (feltéve, hogy $z/q < 2$, ami igaz, ha $Q < \sqrt{2} \approx 1.41$)

$$T_z(q) = \int_0^{10} \frac{1}{v(s)} ds = \frac{10^{z/q}}{cz} \frac{s^{2-z/q}}{2 - z/q} \Big|_0^{10} = 50 \frac{1}{cz} + \frac{50}{c(2q - z)},$$

így a q véletlen változóra nézve a várható ideje

$$(15) \quad \frac{1}{Q - \frac{1}{Q}} \int_{1/Q}^Q T_z(q) \, dq = 50 \frac{1}{cz} + \frac{1}{Q - \frac{1}{Q}} \left[\frac{25}{c} \ln(2Q - z) - \frac{25}{c} \ln \left(\frac{2}{Q} - z \right) \right].$$

Ennek a kifejezésnek keressük a minimumhelyeit z -ben. Ezek nyilván ugyanazok, mint a

$$t(z) := c \int_{1/Q}^Q T_z(q) \, dq = 50 \left(Q - \frac{1}{Q} \right) \frac{1}{z} + 25 \ln(2Q - z) - 25 \ln \left(\frac{2}{Q} - z \right)$$

kifejezés minimumhelyei (ugyanis csak $(Q - 1/Q)c$ -vel szoroztuk be (15)-öt). Ehhez határozzuk meg a

$$t'(z) = -50 \left(Q - \frac{1}{Q} \right) \frac{1}{z^2} - \frac{25}{2Q - z} + \frac{25}{\frac{2}{Q} - z} = 0,$$

egyenlet zérushelyeit. Ha beszorzunk $z^2(2Q - z)(2/Q - z)$ -vel, majd elvégezzük a megfelelő z hatványok csoportosítását, a következő elsőfokú egyenlethez jutunk:

$$-200 \left(Q - \frac{1}{Q} \right) + 100 \left(Q - \frac{1}{Q} \right) \left(Q + \frac{1}{Q} \right) z = 0,$$

melyből

$$(16) \quad z = \frac{2}{Q + \frac{1}{Q}} \in [1/Q, Q]$$

egyszerűen adódik. Könnyű ellenőrizni, hogy ez az érték tényleg optimális. Tehát a futónak úgy kell futnia, mintha energiája $2F(s)/(Q + 1/Q)$ lenne. Vegyük észre, hogy az $F(s)$ érték éppen az $F(s)/Q$ alsó korlát és a $QF(s)$ felső korlát geometriai közepe, míg az optimális $2F(s)/(Q + 1/Q)$ érték pedig a harmonikus közepe.

Behelyettesítve (13)-ba a z -re imént talált optimális $2/(Q + 1/Q)$ értéket, kapjuk, hogy az optimális stratégiát követő futó sebessége

$$v(s) = c \frac{2}{Q + \frac{1}{Q}} \frac{F(s)}{s},$$

ahol $F(s)$ ismert a futó számára. Másrészt (14)-be helyettesítve, az optimális sebességre az is adódik, hogy

$$v(s) = c \frac{z}{10^{z/q}} s^{z/q-1}, \quad \text{ahol } z = \frac{2}{Q + \frac{1}{Q}},$$

viszont $q \in [1/Q, Q]$ nem ismert a futó számára. Ebből a formulából azt olvashatjuk ki, hogy a futó akkor és csak akkor sprintel a verseny végén, ha $z/q < 1$, azaz, ha q nagyobb, mint $1/Q$ és Q harmonikus közepe.

Látszólag (16) tökéletes megoldása a problémánknak, de valójában ennél sokkal jobb válasz is adható. Hogyan? Először a futó választ egy z értéket, például $z = 1$, és megoldja a fenti differenciálegyenletet. Azt kapja, hogy

$$F(s) = \left(\frac{s}{10}\right)^{1/q}, \quad s \in [0, 10].$$

Azután fut egy kis távot, például 0.01 egységet, és megbecsüli, hogy mennyi energiatartaléka van még. Ez lesz $F(9.99)$. Végül megoldja az

$$F(9.99) = \left(\frac{9.99}{10}\right)^{1/q}$$

egyenletet q -ra, és kiszámolja, hogy az energiája $E(9.99) = qF(9.99)$. Ezt az egzakt energiaértéket használja, hogy befejezze a futást $cE(9.99)/9.99$ egyenletes sebességgel.

Következésképpen azzal az érdekes megállapítással fejezzük be cikkünket, hogy ha a futó képes úgy felbecsülni futásra felhasználható energiatartalékát, hogy mindig ugyanazt a relatív hibát véti a becslés során – legalábbis a futás legelején, akkor arra is képes, hogy megmondja egzakt energiaszintjét, miután még csak 0.01 egységet futott. Ezzel pedig gyakorlatilag eléri, hogy optimális sebességgel fussa le az egész távot.

Felhasznált és ajánlott irodalom

- [1] Anderson, O., Running Science Paperback, Human Kinetics, 2013.
- [2] Brewer, J., Running Science: Optimizing Training and Performance Hardcover, Origin Press, 2017.
- [3] Csendes Tibor, Közelítő és szimbolikus számítások, Polygon, 2007.
- [4] Csörgő Sándor, Fejezetek a valószínűségelméletből, Polygon, 2010.
- [5] Goff, J.E., Gold Medal Physics: The Science of Sports Kindle Edition, Johns Hopkins University Press, 2010.
- [6] Hadfield, C. és Aldrin, B., Guinness World Records 2017, Guinness World Records Press, 2016.
- [7] Kérchy László, Valós és Funkcionálanalízis, Polygon, 2008.
- [8] Leindler László, Analízis, Polygon, Szeged, 2001.

- [9] Magness, S., The Science of Running: How to find your limit and train to maximize your performance, Origin Press, 2014.
- [10] Rényi Alfréd, Valószínűesszámitás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.

Benkő Dávid, Dept. of Mathematics and Statistics, ILB 325, University of South Alabama, 411 University Boulevard North, Mobile, AL 36688, USA
dbenko@southalabama.edu

Varga Tamás, SZTE Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.
vargata@math.u-szeged.hu