

A rímek kombinatorikája

NYUL GÁBOR*

1. Költészet és kombinatorika

Carl Friedrich Gauss sokszor idézett gondolata szerint „*A matematika a tudományok királynője, és a matematika királynője a számelmélet.*” Ezt Eric Temple Bell [1] azzal egészítette ki, hogy „*A matematika a tudományok királynője és szolgálóleánya.*” Ez a mondat tömören és költőien fogalmazza meg azt a közismert tényt, hogy a természettudományok mindegyike alkalmazza a matematika eredményeit, ugyanakkor a biológia, a fizika, a földrajz, a kémia, a csillagászat rendszeresen fogalmaznak meg új problémákat is a matematika számára. Hasonlóan nélkülözhetetlen a matematika az informatikában, a közgazdaságtanban, a műszaki tudományokban, de még a nyelvészet bizonyos területein is.

Mindezek mellett széles körben ismertek a képzőművészet vagy a zeneművészet matematikai vonatkozásai, az irodalommal való kapcsolat azonban már sokkal kevésbé nyilvánvaló. Ebben az írásban a költészet és a kombinatorika meglepően sokrétű kapcsolatát járjuk körbe, kiemelten foglalkozva egy, a rímek vizsgálatából származó kombinatorikai problémával.

Magára a kombinatorikára vonatkozó, a fentiekhez hasonló, szállóigészerű idézetről nincs tudásunk, de egy kombinatorikához sorolható tételről költemény is született. A binomiális tétel ugyanis a címadója és a tárgya Fernando Pessoa portugál költő *A Newton-féle* című (eredeti címe: *O binómio de Newton*) rövid versének, mely szerint (Somlyó György fordításában [13], [14])

*„A Newton-féle binomiális ugyanolyan szép, mint a Milói Vénusz.
Legfeljebb kevesen vesznek róla tudomást.”*

*A dolgozat az OTKA 115479 pályázat és az Emberi Erőforrások Minisztériuma ÚNKP-17-4 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának támogatásával készült.

A kombinatorika azonban nemcsak témát, hanem bizonyos versek esetén szerkesztési elvet is szolgáltat a költészet számára. Erre kiváló példa Weöres Sándor *Téma és variációk* című műve, melynek első sora „Ma szép nap van, csupa sugárzás, futkosnak a kutyák az árokszálon és mindenki remekül tölti az időt, még a rabkocsiból is nóta hangzik.”, amit a mondatbeli szótövek különböző permutációiként adódó további 11 verssor követ. Weöres Sándor kombinatorikus költeményeinek részletes elemzését adta Keszei Ernő [10], beleértve ezt a verset is.

Ebben a kategóriában érdemes még megemlíteni Raymond Queneau *Cent mille milliards de poèmes* című (magyarul: *Százezer milliárd költemény*) alkotását. Nyomtatott változatának tíz lapjára egy-egy (14 soros) szonett került. A szöveget úgy szedték, a lapokat pedig úgy kötötték, hogy az azonos sorszámú sorok pontosan egymás alá kerüljenek, majd a lapokat soronként csíkokra vágták. Így az olvasó a verssorokat szabadon választhatja ki, ezáltal a létrehozható szonettek száma 10^{14} , ami messze meghaladja az egy emberélet alatt olvasható mennyiséget. Azóta természetesen elkészült a mű elektronikus verziója is. Az ilyen jellegű kombinatorikus, valamint az ebből kinövő számítógépes versalkotásról például Nádor Zsófia [11] tanulmányában vagy Papp Tibor [12] könyvében olvashatunk.

Ugyanakkor nem csak a költészet merít a kombinatorikából, ennek fordítottjára is találunk példát. Lewis Carroll (valódi nevén Charles Lutwidge Dodgson, aki matematikus is volt) *The Hunting of the Snark* című abszurd elbeszélő költeményének szereplői egy különleges, nehezen fellelhető lényre vadásznak. Legalább ennyire nehéz olyan egyszerű, összefüggő gráfokat találni, melyek bármely élük törlése után is összefüggők maradnak, minden csúcsuk fokszáma három, és éleik nem színezhetők úgy három színnel, hogy mindegyik csúcsból induljon mindhárom színű él, ezért nevezte el ezeket Martin Gardner [7] a mű alapján. Mivel három magyar fordítás is ismert, Rakovszky Zsuzsáé [2], Mann Lajosé [3], [4], valamint Jónai Zs. Balázs amatőr költőé [5], így ennek választásától függően magyarul hívhatjuk az ilyen gráfokat sárkoknak, snyárcoknak vagy sznarkoknak. Érdekeség, hogy ezeknek a gráfoknak a síkbarajzolhatósága a négyzínítéssel van szoros kapcsolatban.

2. Rímképletek száma

A költészetben fontos szerepet játszanak a rímek, egy versen vagy versszakon belül a rímszerkezetet pedig a rímképlettel lehet leírni. A Magyar értelmező kéziszótár megfogalmazásában a rím: Azonos vagy rokon hangzású szavak, szótagok összecsengése ritmikai szakaszok, különböző verssorok végén; a rímképlet: A rímek soronkénti elhelyezését azonos betűkkel szemléltető képlet.

Két rímképletet akkor tekintünk azonosnak, ha ugyanazt a rímszerkezetet írják le, pontosabban, ha ugyanolyan hosszúságúak, és az egyikben két betű pontosan

akkor egyezik meg, ha a megfelelő sorszámú betűk a másokban is megegyeznek. Jellemzően valamely ábécé első néhány betűjét használjuk, a rímképleten belüli első előfordulásuk pedig az ábécésorrendet követi. Így például az ABCB, a BCAC és a ZSBS rímképletek nem számítanak különbözőnek, de leginkább az első alakot használjuk.

Az egyik tipikus versformátum a négysoros, a leggyakoribb 4 soros rímszerkezetek nevet is kaptak: például AAAA a bokorrím, AABB a páros rím, ABAB a keresztrím, ABBA az ölelkező rím, AABA a visszatérő rím, ABCB a félrím rímképlete.

Itt el is érkeztünk a költészet és a kombinatorika újabb lehetséges kapcsolatához, hiszen a különböző rímképletek összeszámolása egy világosan megfogalmazható kombinatorikai feladat. A továbbiakban az összes, valamint az ilyen-olyan megszorításoknak eleget tevő rímképletek számának vizsgálatával foglalkozunk.

Mielőtt azonban ehhez hozzáfognánk, felsoroljuk az összes legfeljebb 5 soros rímképletet. (A felső indexekben szereplő jelöléseknek később lesz jelentőségük, azokat majd a megfelelő helyen magyarázzuk meg.)

Az egyetlen 1 soros rímképlet az A.

2 soros rímképletek:

$$AA^{*cf} \quad AB'^{ocf}$$

3 soros rímképletek:

$$AAA^{*c} \quad AAB^{cf} \quad ABA'^c \quad ABB^{cf} \quad ABC'^{ocf}$$

4 soros rímképletek:

$$\begin{array}{ccccc} AAAA^{*c} & AABB^{*cf} & ABAB'^{o*} & ABBB^c & ABCB'^{oc} \\ AAAB^c & AABC^{cf} & ABAC'^{oc} & ABBC^{cf} & ABCC^{cf} \\ AABA^c & ABAA^c & ABBA^{*c} & ABCA'^c & ABCD'^{ocf} \end{array}$$

5 soros rímképletek:

$$\begin{array}{ccccc} AAAAA^{*c} & AABCA^c & ABACB'^o & ABBCB^c & ABCBD'^{oc} \\ AAAAB^c & AABCB^c & ABACC^c & ABBC^{cf} & ABCCA^c \\ AAABA^c & AABCC^{cf} & ABACD'^{oc} & ABBCD^{cf} & ABCCB^c \\ AAABB^{*c} & AABCD^{cf} & ABBA^{*c} & ABCAA^c & ABCCC^c \\ AAABC^c & ABAAA^c & ABBAB^* & ABCAB'^o & ABCCD^{cf} \\ AABAA^c & ABAAB^* & ABBAC^c & ABCAC'^o & ABCDA'^c \\ AABAB^* & ABAAC^c & ABBBA^{*c} & ABCAD'^{oc} & ABCDB'^{oc} \\ AABAC^c & ABABA'^* & ABBBB^c & ABCBA'^c & ABCDC'^{oc} \\ AABBA^{*c} & ABABB^* & ABBBC^c & ABCBB^c & ABCDD^{cf} \\ AABBB^{*c} & ABABC'^o & ABBCA^c & ABCBC'^o & ABCDE'^{ocf} \\ AABBC^{cf} & ABACA'^c & & & \end{array}$$

Összes rímképletek száma. Jelölje az összes n soros rímképletek számát B_n ($n \geq 1$). A következő táblázatban az első néhány bejegyzés a fenti felsorolások alapján adódik. A továbbiak is megkaphatók hosszadalmas kézi vagy számítógépes gyűjtéssel, de le fogunk vezetni egy olyan képletet, melynek segítségével a soron következő érték kiszámolható a korábbiak ismeretében.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975

A további vizsgálódásainkhoz szükséges lesz olyan rímképleteket is összeszámolnunk, amelyekben adott számú különbözőféle betű szerepel. Legyen ezért $S(n, k)$ az n soros rímképletek száma k -féle betűvel ($n, k \geq 1, k \leq n$). Ekkor világos, hogy

$$S(n, 1) + S(n, 2) + \dots + S(n, n) = B_n \quad (n \geq 1).$$

Azonnal adódik, hogy $S(n, 1) = 1$ ($n \geq 1$), hiszen egyetlen rímképlet van, amelyben minden betű azonos (AAA...), és hasonlóan könnyű látni, hogy $S(n, n) = 1$ ($n \geq 1$), mivel egyetlen rímképletben különböző az összes betű (ABC...).

Egy fokkal érdekesebb igazolni, hogy $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$ ($n \geq 2$). Ezt abból kaphatjuk, hogy egy n soros, 2-féle betűt tartalmazó rímképlet első betűje A, utána a többi $n - 1$ betű 2-féle lehet (A vagy B), de nem lehet mindegyik A.

Utolsóként az $S(n, n - 1) = \binom{n}{2}$ ($n \geq 2$) értékre adunk magyarázatot. Itt ugyanis egyszerűen azt kell kiválasztanunk, hogy az n darab sorból melyik legyen az a kettő, melyek rímelnek.

Az utóbb bevezetett számok használatának az az előnye, hogy az $n, k \geq 2, k \leq n - 1$ feltételek mellett az $S(n, k)$ számot ki tudjuk fejezni két $n - 1$ soros érték segítségével. Egy n soros k -féle betűt tartalmazó rímképlet ugyanis kétféle lehet: ha az utolsó sor nem rímel semelyik másik sorral, akkor az első $n - 1$ sorhoz tartozó rímképlet $(k - 1)$ -féle betűt tartalmaz, az n -edik sor jelölésére pedig egy új betűt használunk; ha pedig az utolsó sor rímel legalább egy korábbi sorral, akkor az első $n - 1$ sor k -féle betűt tartalmazó rímképlettel írható le, majd meg kell még mondanunk, hogy ebből a k -féle betűből melyik szerepel az n -edik helyen. Ezek alapján azt kaptuk, hogy

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k) \quad (n, k \geq 2, k \leq n - 1).$$

Térjünk vissza az összes n soros rímképletek számának vizsgálatához ($n \geq 2$). Tegyük fel, hogy az utolsó sor j darab másik sorral rímel ($0 \leq j \leq n - 1$), ezeket $\binom{n-1}{j}$ -féleképpen választhatjuk ki. Továbbá $0 \leq j \leq n - 2$ esetén az elhagyásuk után megmaradó $n - 1 - j$ sor által meghatározott rímképlet B_{n-1-j} -féle lehet,

az elején kiválasztott j darab sort az utolsó sorral együtt pedig egyszerűen egy új betűt felhasználva jelöljük el. Ebből a gondolatmenetből adódik, hogy

$$B_n = \binom{n-1}{0} B_{n-1} + \binom{n-1}{1} B_{n-2} + \dots + \binom{n-1}{n-2} B_1 + \binom{n-1}{n-1} (n \geq 2).$$

Nemszomszédos rímképletek száma. Egy rímképletet akkor nevezünk nemszomszédosnak, ha szomszédos sorok nem rímelnek. Legyen az n soros nemszomszédos rímképletek száma B'_n ($n \geq 2$), az n soros nemszomszédos rímképletek száma k -féle betűvel pedig $S'(n, k)$ ($n \geq 2, k \geq 1, k \leq n$).

Nyilvánvaló, hogy $S'(n, 1) = 0$ ($n \geq 2$), mivel egy legalább 2 soros nemszomszédos rímképlet megadásához legalább 2-féle betű szükséges.

A legfeljebb 5 soros rímképletek felsorolásánál a nemszomszédosakat vesszővel jelöltük meg. Ebből kiindulva elkészíthető a következő táblázat.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B'_n	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147

Észrevehetjük, hogy ezek az értékek megegyeznek a korábbi táblázatban szereplőkkel, annyi eltéréssel, hogy a sorszámok 1-gyel el vannak tolva. Ahhoz, hogy ezt igazolni tudjuk, először n szerinti teljes indukcióval belátjuk, hogy

$$S'(n, k) = S(n-1, k-1) \quad (n, k \geq 2, k \leq n).$$

$n = 2$ esetén egyszerűen kapjuk, hogy $S'(2, 2) = 1 = S(1, 1)$. Ezután tegyük fel, hogy $n \geq 2$ esetén igaz az állítás, majd bizonyítsunk $(n+1)$ -re:

$k = 2$ -re $S'(n+1, 2) = 1 = S(n, 1)$, mivel egyetlen nemszomszédos rímképlet tartalmaz 2-féle betűt, amelyben a betűk váltakozva szerepelnek (ABAB...). Még könnyebben kapjuk $k = n+1$ -re, hogy $S'(n+1, n+1) = 1 = S(n, n)$.

Végül $2 \leq k \leq n-1$ esetén egy $n+1$ soros $(k+1)$ -féle betűt tartalmazó nemszomszédos rímképlet kétféle lehet: ha az utolsó sor nem rímel korábbi sorral, akkor az első n sor k -féle betűből álló nemszomszédos rímképletéhez kell még hozzávenni egy új betűt; ha pedig az utolsó sor rímel valamelyik másik sorral vagy sorokkal, akkor az első n sor $(k+1)$ -féle betűt tartalmazó nemszomszédos rímképletet alkot, az n -edik sort jelölő betű pedig az $(n-1)$ -edik sor betűje kivételével bármelyik másik, azaz k -féle lehet. Innen az indukciós feltevést is felhasználva már adódik, hogy

$$S'(n+1, k+1) = S'(n, k) + kS'(n, k+1) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k) = S(n, k).$$

Ebből pedig azonnal következik, hogy

$$B'_n = B_{n-1} \quad (n \geq 2),$$

hiszen

$$B'_n = S'(n, 1) + S'(n, 2) + \dots + S'(n, n) = 0 + S(n-1, 1) + \dots + S(n-1, n-1) = B_{n-1}.$$

Ciklikusan nemszomszédos és teljesen rímelő rímképletek száma. Egy rímképletet akkor nevezünk ciklikusan nemszomszédosnak, ha nemszomszédos és az első sor nem rímel az utolsó sorral. Továbbá egy rímképletet akkor hívunk teljesen rímelőnek, ha minden sor rímel legalább egy másik sorral. Jelölje az n soros ciklikusan nemszomszédos rímképletek számát B_n° ($n \geq 2$), az n soros teljesen rímelő rímképletek számát pedig B_n^* ($n \geq 2$).

A korábbi felsorolásnál a ciklikusan nemszomszédos rímképleteket körrel, a teljesen rímelőket csillaggal jelöltük meg. Számukat a következő táblázatban foglaljuk össze.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n°, B_n^*	1	1	4	11	41	162	715	3425	17722

Érdekes, hogy a két sorozat egybeesik, sőt kicsit alaposabb vizsgálattal azt is megfigyelhetjük, hogy ha két szomszédos értéket összeadunk, akkor összegként éppen a korábbi táblázatokban szereplő számok adódnak. Most ezt fogjuk bizonyítani.

Vegyünk egy n soros nemszomszédos rímképletet ($n \geq 3$). Ha ennek első és utolsó sora nem rímel, akkor ez egy n soros ciklikusan nemszomszédos rímképlet. Ha viszont rímel az első és az utolsó sor, akkor az első $n-1$ sor alkot ciklikusan nemszomszédos rímképletet. Tehát

$$B_n^\circ + B_{n-1}^\circ = B'_n = B_{n-1} \quad (n \geq 3).$$

Másrészt $n \geq 3$ esetén az n soros teljesen rímelő rímképleteket kölcsönösen egyértelmű módon meg tudjuk feleltetni az $n-1$ soros nem teljesen rímelő rímképleteknek: kiindulva ugyanis egy n soros teljesen rímelő rímképletből, hagyjuk el az utolsó sort, a vele rímelő sorokat jelölő betűket pedig cseréljük ki különböző új betűkre; fordítva pedig, ha van egy $n-1$ soros nem teljesen rímelő rímképletünk, akkor a más sorral nem rímelő sorok betűjelét cseréljük ki egy új, azonos betűre, és ugyanezt a betűt írjuk az n -edik helyre is. Ebből adódóan $B_n^* = B_{n-1} - B_{n-1}^*$, azaz

$$B_n^* + B_{n-1}^* = B_{n-1} \quad (n \geq 3).$$

Ezekből pedig már egyszerű teljes indukciós gondolatmenettel következik, hogy

$$B_n^\circ = B_n^* \quad (n \geq 2).$$

Megjegyezzük, hogy a korábban látottakhoz hasonlóan, értelemszerűen bevezethetnénk az $S^\circ(n, k)$ és $S^*(n, k)$ számokat is ($n \geq 2$, $k \geq 1$, $k \leq n$), a most bizonyított $B_n^\circ = B_n^*$ azonossággal ellentétben azonban általában $S^\circ(n, k) \neq S^*(n, k)$.

Nemkeresztező rímképletek száma. Egy rímképletet akkor hívunk nemkeresztezőnek, ha nincsenek keresztező rímpárok, azaz nem választható ki négy (nem feltétlenül egymást követő) sor úgy, hogy közülük az első rímel a harmadikkal, a második pedig a negyedikkel. Az n soros nemkeresztező rímképletek számára a C_n ($n \geq 1$) jelölést használjuk.

A nemkeresztező rímképletek megjelölésére a c felső indexet használtuk, számukat pedig az alábbiakban gyűjtjük össze.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

Ezen számokra vonatkozóan belátunk egy Segner János András nevéhez fűződő, a gyorsabb kiszámolásukat elősegítő azonosságot.

Induljunk ki egy n soros nemkeresztező rímképletből ($n \geq 2$). Ha az utolsó sor nem rímel semelyik másik sorral, akkor az első $n - 1$ sor önmagában is egy nemkeresztező rímképlettel írható le, az n -edik helyen pedig egy korábbiaktól különböző betű áll. Ha az n -edik sor rímel legalább egy másik sorral, akkor legyen ezek közül a legnagyobb sorszámú a j -edik ($1 \leq j \leq n - 1$). Ezesetben az első j sor C_j -féleképpen, míg $1 \leq j \leq n - 2$ esetén a j -edik és n -edik sor közé eső $n - 1 - j$ sor C_{n-1-j} -féleképpen alkothat nemkeresztező rímképletet, a két részletben különböző betűket használva. Innen következik, hogy

$$C_n = C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \dots + C_{n-2} C_1 + C_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

A Segner-féle formulából kiindulva belátható (a részletek megtalálhatók például a [8], [17] könyvekben), hogy $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Jelölések magyarázata, kiegészítések. A fentiek során szándékosan nem neveztük meg a tárgyalt számokat, ezáltal viszont a jelöléseik magyarázat nélkül maradtak. Most ezt pótoljuk néhány kiegészítő megjegyzés kíséretében.

A B_n számokat Bell-számoknak, az $S(n, k)$ számokat pedig (másodfajú) Stirling-számoknak hívjuk. A szokásosan használt matematikai definíciójukban természetesen nem rímképleteket számolunk össze, hanem véges halmazok osztályozásait. Ez a fajta felépítés és a számok néhány további alapvető tulajdonsága megtalálható magyar nyelven például a [8] könyvben. A rímképleteken keresztül történő tárgyalás ötlete John Riordantól [15] származik.

A B'_n nemszomszédos Bell-számokkal sokan foglalkoztak különféle (többek között a Fibonacci, megszorított, redukált, reguláris, ritka, szeparált jelzőkkel ellátott) nevek alatt, erre vonatkozó hivatkozásokat a [9] cikkben gyűjtöttük össze. A $B'_n = B_{n-1}$ tulajdonság számos szerzőnél megtalálható, ezek közül kiemeljük Winston Yang [18] bizonyítását, aki kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést adott

meg egy n elemű halmaz nemszomszédos osztályozásai, valamint egy $n - 1$ elemű halmaz összes osztályozásai között.

A [9] munkában a Bell-számok egy további általánosítását vizsgáltuk, ami olyan rímképleteket számol össze, ahol tetszőlegesen kiválasztott két sor esetén előírhatjuk, hogy nem rímelhetnek. Ebbe speciálisan beleférnek a B_n° ciklikusan nemszomszédos Bell-számok is. A Bell-számok B_n^* változatával is többen foglalkoztak, ezeket asszociált Bell-számoknak nevezzük. Tudomásunk szerint azonban egyelőre nem ismert kölcsönösen egyértelműségen alapuló, közvetlen bizonyítása a $B_n^\circ = B_n^*$ összefüggésnek.

A C_n számokat Catalan-számoknak nevezzük. Meglepő, hogy mennyi és milyen különböző feladatok megoldásaként bukkannak fel, például C_n adja meg egy konvex $(n+2)$ -szög háromszögekre bontásainak számát egymást nem metsző átlókkal, vagy egy $n+1$ tényező szorzat teljes zárójelzéseinek a számát. De ez csak két kiragadott példa, Richard P. Stanley [16] évtizedeken keresztül gyűjtötte a Catalan-számokra vezető problémákat, számuk már meghaladja a 200-at.

Végül megemlítünk még egy további rímképlettípust. Ha az olyan n soros rímképletek számára vagyunk kíváncsiak, ahol minden sor legfeljebb egy másikkal, méghozzá csak valamelyik szomszédjával rímelhet (ezeket a rímképleteket a felsorolásban f -fel jelöltük meg), akkor az eredmény F_{n+1} , az $(n+1)$ -edik Fibonacci-szám.

3. Epilógus

Befejezésként álljon itt a közelmúltban elhunyt, egyébként matematikus végzettségű Esterházy Péter [6] egy ide kívánczó, az irodalom és a matematika összekapcsolódásáról szóló gondolata, mellyel a Középiskolai Matematikai Lapok alapításának 100. évfordulója alkalmából 1994-ben rendezett előadóülésen, a Magyar Tudományos Akadémián elhangzott előadását zárta:

„De a matematika nem valami távoli érthetlenség, amelyhez külön ész kéne, ugyanavval az (egy szál) eszünkkel közelítünk a regényhez, mint őhozzá. A matematika is a létezésünkről, annak gazdagságáról ad hírt. Mindig ugyanarról beszélünk, hol Flaubert, hol Bolyai, hol Pólya, hol Gödel hangját halljuk.

Ha fülelünk.”

Irodalomjegyzék

- [1] Eric Temple Bell, *Mathematics, Queen and Servant of Science*, McGraw-Hill Book Company, 1951.

- [2] Lewis Carroll, *A Sárkvadászat*, in: Klasszikus angol költők, II. kötet, Európa Könyvkiadó, 1986, 387–408.
- [3] Lewis Carroll, *A Snyárk-vadászat*, Irodalmi Jelen **6/9** (2006), 7–9.
- [4] Lewis Carroll, *A Snyárk-vadászat*, Drámatéka, 2011.
- [5] Lewis Carroll, *Sznark-vadászat*, <http://mek.oszk.hu/10200/10242/>.
- [6] Esterházy Péter, *Ha fülelünk*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok **44** (1994), 149–151.
- [7] Martin Gardner, *Snarks, Boojums and other conjectures related to the four-color-map theorem*, Scientific American **234** (1976), 126–130.
- [8] Hajnal Péter, *Összeszámlálási problémák*, Polygon, 1997.
- [9] Zsófia Kereskényi-Balogh and Gábor Nyul, *Stirling numbers of the second kind and Bell numbers for graphs*, Australasian Journal of Combinatorics **58** (2014), 264–274.
- [10] Keszei Ernő, *Weöres Sándor kombinatorikus versei*, Természet Világa **139** (2008), 13–16.
- [11] Nádor Zsófia, *Gödel tétele a kombinatorikus költészetben*, Világosság **46/4** (2005), 21–32.
- [12] Papp Tibor, *Avantgárd szemmel költészetről, irodalomról*, Magyar Műhely Kiadó, 2004.
- [13] Fernando Pessoa, *A Newton-féle*, Nagyvilág **14** (1969), 869.
- [14] Fernando Pessoa, *A Newton-féle*, in: Ez az ősi szorongás, Magvető Könyvkiadó, 1998, 112 (1. kiadás: Európa Könyvkiadó, 1969).
- [15] John Riordan, *A budget of rhyme scheme counts*, Annals of the New York Academy of Sciences **319** (1979), 455–465.
- [16] Richard P. Stanley, *Catalan Numbers*, Cambridge University Press, 2015.
- [17] N. J. Vilenkin, *Kombinatorika*, Műszaki Könyvkiadó, 1971.
- [18] Winston Yang, *Bell numbers and k-trees*, Discrete Mathematics **156** (1996), 247–252.

Nyul Gábor, Matematikai Intézet, Debreceni Egyetem, 4002 Debrecen, Pf. 400.
e-mail: gnyul@science.unideb.hu

