

Törtfa és a „Törpe törtek” vizsgálata

KOSZTOLÁNYI JÓZSEF

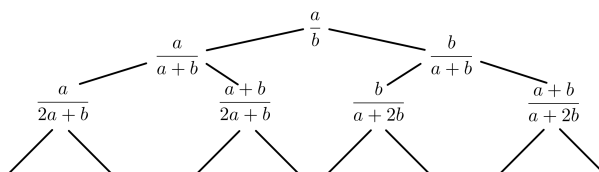
Nemrég elkezdtem rendezgetni az elmúlt 30 év során tartott matematika szakköreim anyagait. Rendezgetés közben találtam rá az itt bemutatandó két problémára. Ezek módszertani értelemben nyitott (vagy nyitottá, tanulók általi kutatásra alkalmassá tett) problémák, amelyeket több alkalommal dolgoztam fel különböző életkorú, matematika iránt érdeklődő diákokkal szakkör keretében. A legfiatalabbak 7. osztályos matematika tagozatos tanulók voltak.

I. Törtfa

Az eredeti feladat 1976-ban volt középiskolás versenyfeladat az akkori NSZK-ban. Én [1]-ben találtam rá, és nagyon megtetszett.

Feladat. Az a és b pozitív egészekre $0 < a < b$, valamint a és b relatív prímek. Az $\frac{a}{b}$ törtből kiindulva képezzük törtek egy végtelen családját a következőképpen:

1. az $\frac{a}{b}$ törtnek két „leszármazottja” van, a bal oldali $\frac{a}{a+b}$ (az eredeti tört számlálójának és a számláló és a nevező összegének hányadosa), a jobb oldali $\frac{b}{a+b}$ (az eredeti tört nevezőjének és a számláló és a nevező összegének hányadosa);
2. a leszármazottként kapott törtekből kiindulva ugyanígy folytatjuk az eljárást (1. ábra)



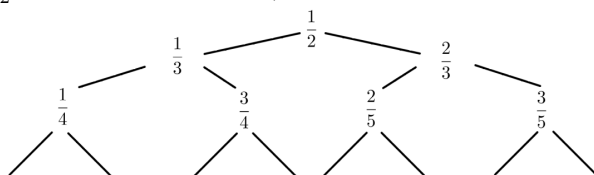
1. ábra

Mely a és b esetén tartalmazza ez a végtelen fa az összes 0 és 1 közé eső racionális számot?

A feladat megoldása $a = 1$, $b = 2$. Ehhez több dolgot be kell bizonyítani, amit a törftfa szisztematikus, irányított (tanári kérdések mentén történő) vizsgálatával fel lehet fedezni.

Két különböző verzióban „tálaltam” a tanulóknak a problémát attól függően, hogy milyen előismeretekkel és képességekkel rendelkeztek.

1. verzió. Induljunk ki az $\frac{1}{2}$ -ből és a fa képzési szabálya alapján készítsük el annak 10 szintjét (az $\frac{1}{2}$ önmagában a 0. szint). A 2. ábrán az első két szint látható.



2. ábra

Kérdések:

1. Találunk-e az így kapott törtek között egyszerűsíthető törtet? Miért?
2. Általánosan is igaz-e, hogy a végtelen törftában mindegyik tört *redukált*, azaz tovább nem egyszerűsíthető?
3. Benne van-e a végtelen törftában az összes 0 és 1 közötti racionális szám?

2. verzió. Induljunk ki az $\frac{a}{b}$ redukált törtből, ahol a és b az eredeti feladat feltételeinek megfelelő (1. ábra).

Kérdések:

1. Van-e a végtelen törftában nem redukált (egyszerűsíthető) tört?
2. Benne van-e (lehet-e) a végtelen törftában az $\frac{1}{2}$? Hol lehet?
3. Ha az $\frac{1}{2}$ benne van a végtelen törftában, akkor benne van-e az összes 0 és 1 közötti racionális szám?
4. Sorozatba szedhetők-e a 0 és 1 közötti racionális számok?

Mivel a 2. verzió kérdései magukban foglalják az 1. kérdéseit, ezért az ezekre adható *válaszokkal* foglalkozunk.

1. A tanulók mindkét verzió kapcsán azt sejtették, hogy nem lesz a fában egyszerűsíthető tört. Ennek általános bizonyítása már – érthető módon – nehezebben ment. A bizonyítás alap gondolatának megtalálása végett megcsináltuk egy olyan fának néhány kezdő szintjét, amelynek kiinduló törtje a $\frac{15}{21}$ volt, azaz egy egyszerűsíthető tört. Ez alapján rájöttek, hogy ha lenne egyszerűsíthető tört a fában, akkor utána (a belőle származók) mindegyike egyszerűsíthető lenne. De vajon milyen tört lenne közvetlenül előtte (az egyszerűsíthető tört öse)? A kérdés után már jött a gondolat, hogyan is bizonyítsunk. Közösen, irányítva beszéltük meg a következő indirekt bizonyítást:

Tegyük fel, hogy $\frac{p}{q}$ redukált, de $\frac{p}{p+q}$ nem redukált, azaz egyszerűsíthető. Ez azt

jelenti, hogy van olyan 1-nél nagyobb d egész szám, hogy p is és $p + q$ is osztható d -vel. Ekkor viszont $(p + q) - p = q$ is osztható d -vel. Ha p is, q is többszöröse d -nek akkor $\frac{p}{q}$ egyszerűsíthető d -vel, vagyis nem redukált. Ez ellentmond az indirekt feltételünknek, ami azt bizonyítja, hogy ha a kiinduló tört redukált, akkor a végtelen törtfa összes törtje redukált.

Megjegyzések:

- A leírt indirekt bizonyítás egy *kontrapozíciós* bizonyítás.
- Középiskolában tagozaton vagy szakkörön a *végtelen leszállás* irányába is „kanyarodhatunk” a fenti bizonyítás során.

2. Ennek a kérdésnek a megválaszolásához azt kell észrevenni (több tanuló észre is vette), hogy ha balra megyünk, akkor $\frac{1}{2}$ -nél kisebb, ha jobbra megyünk, akkor $\frac{1}{2}$ -nél nagyobb törtet kapunk. Az $\frac{1}{2}$ tehát csak az „őstört” lehet.

3. Ha az $\frac{1}{2}$ az „őstört”, akkor minden 0 és 1 közötti racionális szám benne van a fában. Itt előbb próbákat csináltunk konkrét törtekre visszafelé haladva a fában, és több-kevesebb lépésben eljutottunk az $\frac{1}{2}$ -ig. Általánosan megfigyelhetjük, hogy akármelyik törtből visszafelé indulva a tört nevezője minden lépésnél csökken. A számláló mindig kisebb a nevezőnél, ezért a nevező csökkenésével a számláló sem nőhet. Ezekből a megállapításokból következik, hogy véges sok lépésben el kell érnie a számlálónak az 1-et és a nevezőnek a 2-t.

4. Felülről kezdve szintenként balról jobbra haladva sorszámozni tudjuk a törteket, mivel minden szinten véges sok tört van. A 0 és 1 közötti racionális számok tehát sorozatba szedhetők.

Megjegyzések:

- Ezzel beláttuk, hogy 0 és 1 között megszámlálhatóan végtelen sok racionális szám van. Ennek „mentén” már felső tagozaton lehet mesélni a végtelen számosságokról.
- A tanulók szemléletesen, a számegyenesen rajzolgatva könnyen belátják, hogy bármely két racionális szám között van racionális szám, például a számok által meghatározott szakasz felezőpontjában. Ez azt jelenti, hogy a racionális számok *sűrűn* vannak a számegyenesen, így a 0 és az 1 között is. Szemléletesen ez nehezen fér össze azzal, hogy sorozatba lehet őket szedni. Itt kezdenek el „dolgozni” az absztrakt fogalmak.

Címszavakban néhány, a törtfa vizsgálata során megjelenő új matematikai tartalom: redukált tört; fragráf; indirekt bizonyítás; inverz algoritmus; csökkenő sorozat; megszámlálhatóan végtelen számosság; sűrűség.

További kérdések lehetnek az $\frac{1}{2}$ -del induló törtfára vonatkozóan:

1. Mekkora az egyes szinteken levő törtek átlaga? Miért?
2. Hol jelennek meg a törtfában a Fibonacci-sorozat tagjai? Miért?

II. Törpe törtek

A tanulók kiindulásképpen a következő – mai szemmel nézve kicsit talán bugyuta, de emlékeim szerint jól működő – szöveget kapták:

TÖRPE TÖRTEKNEK nevezzük a 0 és 1 közé eső racionális számokat. A 0 (teljes „nevén” $\frac{0}{1}$) és az 1 (teljes „nevén” $\frac{1}{1}$) tiszteletbeli TÖRPE TÖRT. A TÖRPE TÖRTEK országot alapítottak a derékszögű koordináta-rendszer első síknegyedében az alábbi Letelepelési Tört-Törvény alapján:

(1) Mivel minden egyes törtnek végtelen sok „neve” van, ezért az egységes nyilvántartás végett minden tört azt a „nevét” köteles használni, amelyre a számláló és a nevező relatív prím.

(2) Az $\frac{m}{n}$ tört lakhelye a koordináta-rendszer $(n; m)$ pontja (rácspontja).

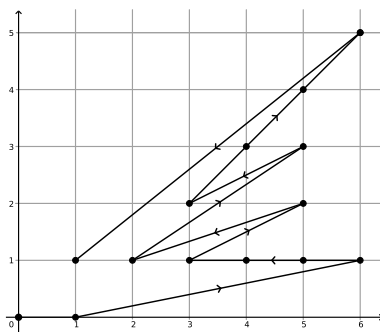
(3) Az n -edik családba tartoznak azok a törtek, amelyek „nevében” a nevező nem nagyobb n -nél. Ha a család tagjai nagyság szerint állnak növekvő sorban, akkor n -edik sorozatnak hívjuk őket.

A fent definiált, „letelepedett” törpe törtek n -edik sorozatai az n -edik Farey-sorozatok, amelyekről bővebben például [2] 269-272. oldalain lehet olvasni.

Először is írjuk fel $n = 2; 3; 4; 5; 6$ esetén az n -edik sorozatokat.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & & & & & \frac{0}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{1} \\
 & & & & & & & & \frac{0}{1}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{2}, & \frac{2}{3}, & \frac{1}{1} \\
 & & & & & & & & \frac{0}{1}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{2}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{4}, & \frac{1}{1} \\
 & & & & & & & & \frac{0}{1}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{3}, & \frac{2}{5}, & \frac{1}{2}, & \frac{3}{5}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{4}, & \frac{4}{5}, & \frac{1}{1} \\
 \frac{0}{1}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{3}, & \frac{2}{5}, & \frac{1}{2}, & \frac{3}{5}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{4}, & \frac{4}{5}, & \frac{5}{6}, & \frac{1}{1}
 \end{array}$$

A 6-odik sorozat tagjainak „lakhelyei” a növekedésnek megfelelő bejárás szerint a 3. ábrán láthatók.



3. ábra

Kérdések:

1. Az ábráról észrevehető, hogy $n = 6$ esetén lakhelyéről mindegyik törpe látja az origót, azaz lakhelyét az origóval összekötő szakaszon nem lakik másik törpe. Általánosan is igaz ez? Próbáljuk bizonyítani.

2. A felírt sorozatokat vizsgálva észrevehető, hogy ha $\frac{p}{q}$ tagja az n -edik sorozatnak, akkor $\frac{q-p}{q}$ is tagja. Általánosan is igaz ez? Próbáljuk bizonyítani.

3. A konkrét sorozatokat tanulmányozva az is észrevehető, hogy mindegyik sorozatra teljesül, hogy a bennük levő törtek átlaga $\frac{1}{2}$. Általánosan is igaz ez? Próbáljuk bizonyítani.

4. A felírt sorozatok mindegyikében két szomszédos tört különbsége olyan tört, amelynek számlálója 1, nevezője pedig a két nevező szorzata. Általánosan is igaz ez? Próbáljuk bizonyítani.

Válaszok, bizonyítások:

1. Ha valamelyik törpe nem látná az origót, az azt jelentené, hogy az origóból induló megfelelő félegyenesen legalább két törpe lakik. Mivel a félegyenes mereksége a rá illeszkedő törpék számlálójának és nevezőjének hányadosa, ezért a távolabbi tört egyszerűsíthető lenne, ami a törvény értelmében nem lehet.

Megjegyzések:

- Nem kell, hogy a tanulók ismerjék a merekség fogalmát, mert az például éppen ennek a kérdésnek a segítségével alakítható ki.
- Itt is indirekt módon bizonyítottunk. Alkalmas ez a kérdés arra, hogy a tanulók számára egyre természetesebbé, kézenfekvőbbé tegyük ezt a gondolatot.

2. Ha $\frac{p}{q}$ nem egyszerűsíthető, akkor $\frac{q-p}{q}$ sem egyszerűsíthető. Ez hasonlóan látható be, mint azt a törtfa esetén tettük. (Kontrapozíciós indirekt bizonyítás.) Emellett teljesül, hogy $\frac{q-p}{q}$ is 1-nél nem nagyobb tört. $\frac{p}{q} = \frac{q-p}{q}$ akkor és csak akkor, ha $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$. Megfigyelhető az is, hogy $\frac{p}{q}$ és $\frac{q-p}{q}$ az $\frac{1}{2}$ -re szimmetrikusan helyezkedik el az n -edik sorozatban.

3. Megfigyelhető, hogy mindegyik sorozatban páratlan számú tört van. Ha az $\frac{1}{2}$ -et külön vesszük, akkor az előző kérdésre adott válasz alapján a többiek $\left(\frac{p}{q}; \frac{q-p}{q}\right)$ párokba rendezhetők, amely párokban az összeg 1. Ha egy sorozatban $2k+1$ darab tört van, akkor a sorozat elemeinek összege $k + \frac{1}{2}$, így az átlag valóban $\frac{1}{2}$.

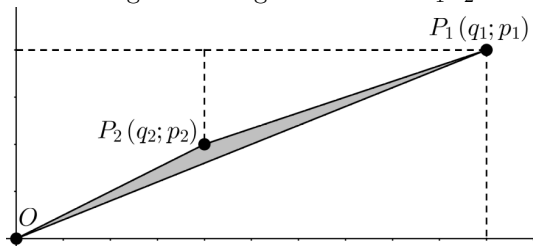
Megjegyzések:

- Megjelenik itt az összegzés könnyebbé (általános esetben elvégezhetővé) tételére egy sokszor és hatékonyan alkalmazható gondolat, a *párosítás* gondolata.
- A gyerekek a szimmetriát is, a párosítás lehetőségét is észrevették, és nagy volt az öröm, hogy milyen szép így.

4. Ennek az észrevételnek az általános bizonyítása a korábbiaknál lényegesen nehezebb és összetettebb. Viszont geometriai természetű, ami az eddigiekhez képest

reprezentációváltást jelent.

Vegyünk egy tetszőleges sorozatból két szomszédos törtet és tekintsük a „lakhelyeiket”, azaz a megfelelő rácspontokat: $P_1(q_1; p_1)$, $P_2(q_2; p_2)$. Legyen $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$, és tekintsük a két pont és az origó által meghatározott OP_1P_2 háromszöget (4. ábra).



4. ábra

Mivel a két tört szomszédos az adott sorozatban, és nem egyszerűsíthetők, ezért (ld. 1. kérdésre adott válasz) az OP_1P_2 háromszögnek sem a határán, sem a belsejében nincs rácspont, azaz *üres rácsháromszög*. Előbb részfeladatként azt vizsgáltuk meg a gyerekekkel, hogy mekkora egy ilyen háromszög területe. A vizsgálat a [2] 258. oldalán leírtaknak megfelelően történt, ezért erre részletesen nem térek ki. Kaptuk, hogy minden üres rácsháromszög területe $\frac{1}{2}$.

Mivel $\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2q_1 - p_1q_2}{q_1q_2}$, ezért azt kell bizonyítanunk, hogy $p_2q_1 - p_1q_2 = 1$. Evégett a 4. ábrán látható téglalap területét írjuk fel kétféleképpen. Egyrészt p_1q_1 . Másrészt egy derékszögű trapéz, két derékszögű háromszög és az OP_1P_2 háromszög területének összege, azaz $\frac{(p_1 + (p_1 - p_2)) \cdot q_2}{2} + \frac{(p_1 - p_2) \cdot (q_1 - q_2)}{2} + \frac{p_1 \cdot q_1}{2} + \frac{1}{2}$. A két kifejezést egyenlővé téve, nem túl bonyolult számolás után adódik, hogy $p_2q_1 - p_1q_2 = 1$.

Megjegyzések:

- Az észrevétel, és annak bizonyítása a rácsgéometriai alapismeretek felé terel. Bizonyos állításokat (pl. üres rácsháromszög területe) felső tagozatos matematikatudással lehet tárgyalni. A gyerekek szerették ezt a kis rácsgéometriai kiruccanást.
- Az algebrai természetű állítást geometriai úton bizonyítottuk. Ez a tipikus reprezentációváltás nagy sikert aratott a diákok körében.

Irodalom

- [1] Cofman, Judita, *What to Solve? – Problems and Suggestions for Young Mathematicians*, Clarendon Press, Oxford, 1990.
- [2] Reiman István, *A geometria és határterületei*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1986.