

## Ruth tétele és a területelv

KOZMA JÓZSEF

### 1. Bevezető

A szerző Euler arányösszegformulája [2] egy általánosítása [5] kapcsán találkozott a területelv ügyes alkalmazásával [10], szerzőtársával további eredményekre is jutottak [6]. A területelvet leggyakrabban olyankor alkalmazzák, amikor szakaszok hosszúságának aránya összefüggésbe hozható háromszögek területének arányával. Jó példa erre a Ceva- és a Menelaosz-tétel igazolása. A módszer alkalmazásával Hoehn a Menelaosz-tételt ötszögekre általánosította [4]. Később általános poligonokra is sikerült általánosítani a Ceva- és a Menelaosz-tételt [3].

Ruth tétele a háromszög oldalait osztó pontokat a szemközti csúcsokkal összekötő harántszakaszok által meghatározott háromszög területére vonatkozik [9]. Általánosították tetraéderre [8], illetve magasabb dimenziós szimplexekre [7] is. Coxeter alapkönyvében [1] is szerepel a baricentrikus koordináták alkalmazásának egy szép példájaként. Mindezek ellenére kevés figyelmet kap az itthoni geometriaoktatásban, holott az affin geometria Ceva-tétele is megkapható belőle.

Ebben a rövid tanulmányban a területelv közvetlen szép alkalmazását mutatjuk be a Ruth-tétel igazolására.

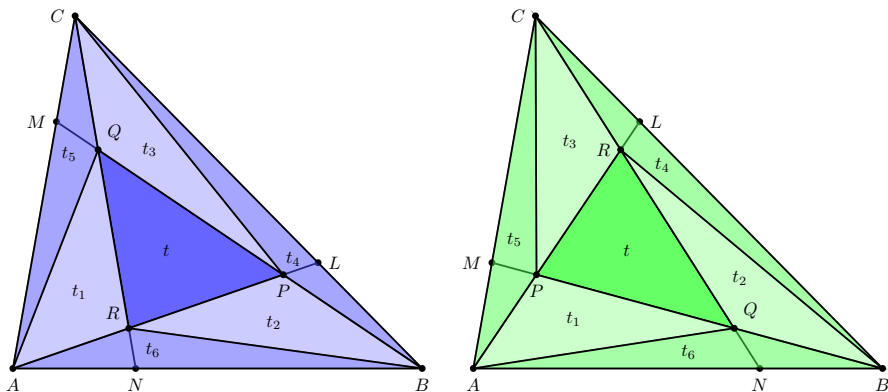
### 2. Ruth tételének megfogalmazása

Legyenek az  $L$ ,  $M$  és  $N$  pontok rendre az  $ABC\triangle$  háromszög különböző oldalain. Az ezeket a szemközti csúcsokkal összekötő harántszakaszok metszéspontjai legyenek  $P = \overline{AL} \cap \overline{BM}$ ,  $Q = \overline{BM} \cap \overline{CN}$  és  $R = \overline{CN} \cap \overline{AL}$ . Az oldalakon kialakuló osztóviszonyokat

$$\lambda = (A, B; N), \quad \mu = (B, C; L), \quad \nu = (C, A; M),$$

az egyes kialakult háromszögek területét pedig

$$T = t_{ABC\triangle}, \quad t = t_{PQR\triangle},$$



1. ábra. A két lehetséges alap-konfiguráció

illetve (lásd az 1. ábrát)

$$\begin{aligned} t_1 &= t_{ARQ\Delta}, & t_2 &= t_{BPR\Delta}, & t_3 &= t_{CQP\Delta}, \\ t_4 &= t_{BCP\Delta}, & t_5 &= t_{CAQ\Delta}, & t_6 &= t_{ABR\Delta} \end{aligned}$$

jelölje. Ha  $P = Q = R$ , akkor a fentiek közül négy háromszög is egy ponttá fajul el, és  $t = t_1 = t_2 = t_3 = 0$ .

**1. Tétel (Ruth Tétele).** *A  $PQR\Delta$  és az  $ABC\Delta$  háromszögek területének aránya:*

$$(1) \quad \frac{t}{T} = \frac{(1 - \lambda\mu\nu)^2}{(1 + \lambda + \lambda\mu)(1 + \mu + \mu\nu)(1 + \nu + \nu\lambda)}.$$

Célunk, hogy ezt az arányt a területelv segítségével vezessük le.

A kapcsolat a Ceva-tétellel és megfordításával könnyen adódik, természetesen csak azokra az esetekre, amikor az osztópontok az oldalakon vannak. Ruth tétele szerint ugyanis  $t = 0$ , vagyis a harántszakaszok egy pontra illeszkedése pontosan akkor következik be, ha az osztóviszonyok szorzata 1. Eszerint Ruth tétele a Ceva-tétel általánosításának tekinthető, ha az oldalak osztópontjaira szorítkozunk.

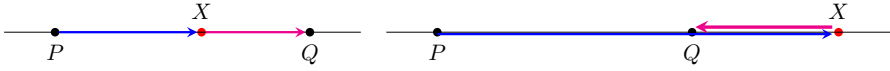
### 3. Előismeretek

Igen kevés előzetes ismeretre lesz szükségünk: a háromszög területének és a közös osztoviszonynak a fogalmán túl csak lineáris egyenletrendszereket kell tudnunk megoldani, praktikusán mátrixok alkalmazásával.

Ha  $P, Q$  és  $X$  olyan kollineáris pontok, hogy  $X \neq Q$ , akkor a  $(P, Q; X)$  *közös osztoviszonyt* a

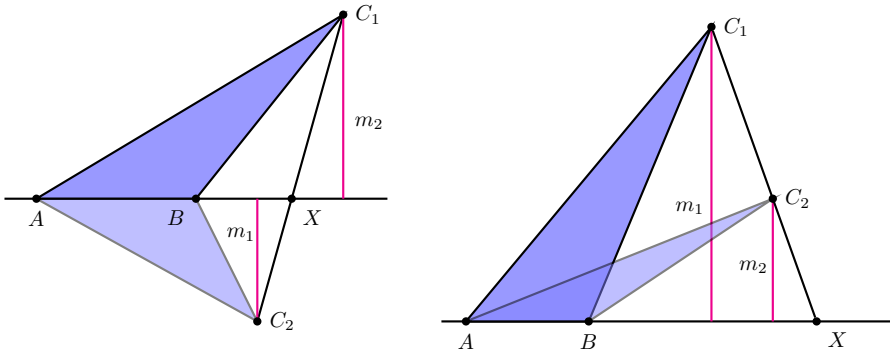
$$\overrightarrow{PX} = (P, Q; X) \cdot \overrightarrow{XQ}$$

vektorösszefüggés definiálja.



2. ábra. A közös osztóviszony fogalma

A területelv a következő egyszerű összefüggést takarja. Ha két háromszögnek közös az egyik oldala, és annak egyenese a harmadik csúcsok egyenesét olyan pontban metszi, mely  $\varrho$  osztóviszonyt létesít e csúcsokkal, akkor a területük aránya  $|\varrho|$  (lásd a 3. Ábrát). Pontos megfogalmazása a következő.



3. ábra. A területelv

**Területelv.** Legyen  $ABC_1\triangle$  és  $ABC_2\triangle$  két nem elfajuló háromszög. Ha a  $C_1C_2$  egyenes az  $AB$  egyenest az  $X$  pontban metszi, akkor

$$(2) \quad \frac{t_{ABC_1\triangle}}{t_{ABC_2\triangle}} = |(C_1, C_2; X)| = |\varrho|.$$

Ha  $C_1C_2$  párhuzamos az  $AB$  egyenessel, akkor  $\frac{t_{ABC_1\triangle}}{t_{ABC_2\triangle}} = 1$ .

#### 4. A Ruth-tétel bizonyítása

Elegendő az 1. ábra bal oldalán látható konfigurációra elvégezni a bizonyítást, hiszen egy tengelyes tükrözés megcseréli a két konfigurációt, miközben a területarányt változatlanul hagyja. A metszéspontok sorrendjére

$$B \prec P \prec Q \prec M, \quad \text{illetve} \quad A \prec R \prec P \prec L$$

teljesül.

A Területelvet alkalmazzuk rendre a  $PQR\triangle$  háromszög oldalai mentén csatlakozó háromszögekre (a bal oldali oszlopban lévő összefüggések), majd az  $\overline{AR}$ ,  $\overline{BP}$

és  $\overline{CQ}$  szakaszok mentén csatlakozó háromszögekre (a jobb oldali oszlopban lévő összefüggések):

$$(3) \quad \begin{array}{ll} \frac{t_{RPB\Delta}}{t_{PRC\Delta}} = \frac{t_2}{t+t_3} = \lambda, & \frac{t_{ARB\Delta}}{t_{ARC\Delta}} = \frac{t_6}{t_1+t_5} = \lambda, \\ \frac{t_{PQC\Delta}}{t_{PQA\Delta}} = \frac{t_3}{t+t_1} = \mu, & \frac{t_{BPC\Delta}}{t_{BPA\Delta}} = \frac{t_4}{t_2+t_6} = \mu, \\ \frac{t_{QRA\Delta}}{t_{QRB\Delta}} = \frac{t_1}{t+t_2} = \nu, & \frac{t_{CQA\Delta}}{t_{CQB\Delta}} = \frac{t_5}{t_3+t_4} = \nu. \end{array}$$

Ha  $P = Q = R$ , vagyis  $t = 0$ , és  $t_1 = t_2 = t_3 = 0$  is fennáll, akkor a (3) második oszlopában az egyenlőségek összeszorzásából  $\lambda\mu\nu = 1$  adódik, igazolva az állítást.

A továbbiakban feltesszük, hogy  $t \neq 0$ .

Következésképpen mindegyik háromszög területe pozitív. A (3) egyes oszlopaiban lévő egyenlőségek rendezésével két lineáris egyenletrendszert írhatunk fel:

$$\begin{array}{ll} -t_2 + \lambda t_3 = -\lambda t, & \lambda t_5 - t_6 = -\lambda t_1, \\ \mu t_1 - t_3 = -\mu t, & -t_4 + \mu t_6 = -\mu t_2, \\ -t_1 + \nu t_2 = -\nu t, & \nu t_4 - t_5 = -\nu t_3. \end{array}$$

Ezek mátrixos alakja

$$(4) \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & \lambda \\ \mu & 0 & -1 \\ -1 & \nu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda t \\ -\mu t \\ -\nu t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \mu & -1 \\ -1 & 0 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_5 \\ t_6 \\ t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda t_1 \\ -\mu t_2 \\ -\nu t_3 \end{pmatrix}.$$

Mindkét mátrix determinánsa  $1 - \lambda\mu\nu$ . Könnyen látható, hogy ez nem lehet 0. Ugyanis ha  $\lambda\mu\nu = 1$  lenne, akkor a (3) bal oldali oszlopában lévő egyenlőségek összeszorzásával az

$$\frac{t_2}{t+t_3} \cdot \frac{t_3}{t+t_1} \cdot \frac{t_1}{t+t_2} = \lambda\mu\nu = 1$$

adódik, s ebből átrendezéssel a

$$0 = t^3 + (t_1 + t_2 + t_3)t^2 + (t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1)t$$

egyenlőséget kapjuk, amelyben viszont minden tag és tényező pozitív a jobb oldalon. Ez pedig ellentmondás.

Az együtthatómátrixok eszerint invertálhatók, és az inverzeik:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & \lambda \\ \mu & 0 & -1 \\ -1 & \nu & 0 \end{pmatrix}^{-1} = -\underbrace{\frac{1}{1-\lambda\mu\nu}}_{\omega} \underbrace{\begin{pmatrix} \nu & \nu\lambda & 1 \\ \mu\nu & 1 & \mu \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \mu & -1 \\ -1 & 0 & \nu \end{pmatrix}^{-1} = -\underbrace{\frac{1}{1-\lambda\mu\nu}}_{\omega} \underbrace{\begin{pmatrix} \mu\nu & \nu & 1 \\ 1 & \lambda\nu & \lambda \\ \mu & 1 & \mu\lambda \end{pmatrix}}_{\mathbf{V}},$$

ahol a jobb oldali mátrixokat rendre  $\mathbf{U}$ , illetve  $\mathbf{V}$ , az  $1/(1-\lambda\mu\nu)$  együtthatót pedig  $\omega$  jelöli. Ezekkel a (4) a következő alakot veszi fel:

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = -\omega \mathbf{U} \begin{pmatrix} -\lambda t \\ -\mu t \\ -\nu t \end{pmatrix} = \omega t \mathbf{U} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} t_5 \\ t_6 \\ t_4 \end{pmatrix} = -\omega \mathbf{V} \begin{pmatrix} -\lambda t_1 \\ -\mu t_2 \\ -\nu t_3 \end{pmatrix} = \omega \mathbf{V} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}.$$

A második sor utolsó oszlopvektorának helyébe az első sor szerintit helyettesítve

$$\begin{pmatrix} t_4 \\ t_5 \\ t_6 \end{pmatrix} = \omega \mathbf{V} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \omega t \mathbf{U} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \omega^2 t \mathbf{V} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \mathbf{U} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$$

adódik. A  $T - t = (t_1 + t_2 + t_3) + (t_5 + t_6 + t_4)$  területösszeget megkapjuk a  $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$  sorvektorral balról szorzás utáni összeadással (a  $3 \times 3$ -as egységmátrixot  $\mathbf{E}$ -vel jelölve):

$$\begin{aligned} T - t &= \mathbf{w} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + \mathbf{w} \begin{pmatrix} t_5 \\ t_6 \\ t_4 \end{pmatrix} = \mathbf{w} \omega t \mathbf{U} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} + \mathbf{w} \omega^2 t \mathbf{V} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \mathbf{U} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{w} \omega^2 t \left[ (1 - \lambda\mu\nu) \mathbf{E} + \mathbf{V} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \right] \mathbf{U} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{w} \omega^2 t \left[ \begin{pmatrix} 1 - \lambda\mu\nu & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda\mu\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda\mu\nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda\mu\nu & \mu\nu & \nu \\ \lambda & \lambda\mu\nu & \lambda\nu \\ \lambda\mu & \mu & \lambda\mu\nu \end{pmatrix} \right] \mathbf{U} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \mathbf{w} \omega^2 t \begin{pmatrix} 1 & \mu\nu & \nu \\ \lambda & 1 & \lambda\nu \\ \lambda\mu & \mu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu & \nu\lambda & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda\mu \\ \mu\nu & 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$$

Eszerint

$$T = \frac{t}{(1 - \lambda\mu\nu)^2} \left[ \mathbf{w} \begin{pmatrix} 1 & \mu\nu & \nu \\ \lambda & 1 & \lambda\nu \\ \lambda\mu & \mu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu & \nu\lambda & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda\mu \\ \mu\nu & 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} + (1 - \lambda\mu\nu)^2 \right].$$

A mátrixok szorzását elvégezve a szögletes zárójelben lévő rész:

$$\begin{aligned} & \mathbf{w} \begin{pmatrix} \nu + \mu\nu + \mu\nu^2 & \lambda\nu + \lambda\mu\nu + \nu & 1 + \lambda\mu^2\nu + \mu\nu \\ \lambda\nu + 1 + \lambda\mu\nu^2 & \lambda^2\nu + \lambda + \lambda\nu & \lambda + \lambda\mu + \lambda\mu\nu \\ \lambda\mu\nu + \mu + \mu\nu & \lambda^2\mu\nu + \lambda\mu + 1 & \lambda\mu + \lambda\mu^2 + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} + 1 - 2\lambda\mu\nu + \lambda^2\mu^2\nu^2 \\ &= \mathbf{w} \begin{pmatrix} \lambda\nu + \lambda\mu\nu + \lambda\mu\nu^2 + \mu\lambda\nu + \mu\lambda\mu\nu + \mu\nu + \nu + \nu\lambda\mu^2\nu^2 + \mu\nu^2 \\ \lambda\lambda\nu + \lambda + \lambda^2\mu\nu^2 + \mu\lambda^2\nu + \mu\lambda + \mu\lambda\nu + \lambda + \lambda\mu + \lambda\mu\nu \\ \lambda^2\mu\nu + \lambda\mu + \lambda\mu\nu + \mu\lambda^2\mu\nu + \mu\lambda\mu + \mu + \nu\lambda\mu + \nu\lambda\mu^2 + \nu\mu \end{pmatrix} + \\ &+ 1 - 2\lambda\mu\nu + \lambda^2\mu^2\nu^2. \end{aligned}$$

Az utolsó szorzás egy 27-tagú összeget ad, az eredmény pedig a rendezést követően szintén egy 27-tagú összeg. Az áttekinthetőség érdekében csoportosítsuk a tagokat, és a tényezőket is, a sorrendjüket pedig úgy állapítsuk meg, hogy a  $\lambda$ ,  $\mu$  és  $\nu$  tényezők ciklikusan változzanak:

$$\begin{aligned} & [1 \cdot 1 \cdot 1 + \lambda\mu\nu + (\lambda\mu)(\mu\nu)(\nu\lambda)] + \\ & + [\lambda \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot \mu \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot \nu] + [\lambda\mu \cdot 1 + 1 \cdot \mu\nu + \lambda \cdot 1 \cdot \nu] + \\ & + [(\lambda\mu) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot (\mu\nu) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (\nu\lambda)] + [(\lambda\mu) \cdot 1 \cdot \nu + \lambda(\mu\nu) \cdot 1 + 1 \cdot \mu(\nu\lambda)] + \\ & + [(\lambda\mu)(\mu\nu) \cdot 1 + 1 \cdot (\mu\nu)(\nu\lambda) + (\lambda\mu) \cdot 1 \cdot (\nu\lambda)] + \\ & + [\lambda\mu(\nu\lambda) + \lambda(\mu\nu)\nu + \lambda\mu(\nu\lambda)] + [\lambda \cdot 1(\nu\lambda) + 1 \cdot (\mu\nu)\nu + (\lambda\mu)\mu \cdot 1] + \\ & + [(\lambda\mu)(\mu\nu)\nu + (\lambda\mu)\mu(\nu\lambda) + \lambda(\mu\nu)(\nu\lambda)]. \end{aligned}$$

Innen már látható, hogy ez 3 darab 3-tagú tényező szorzata:

$$(5) \quad [1 + \lambda + (\lambda\mu)][1 + \mu + (\mu\nu)][1 + \nu + (\nu\lambda)].$$

Ez éppen az (1) jobb oldalán a nevező, ami igazolja az állításunkat. ■

A szerző köszönetét fejezi ki Kurusa Árpádnak, aki felhívta figyelmét Ruth tételének aktualitására, és hasznos tanácsokkal látta el e dolgozattal kapcsolatban is.

## Irodalomjegyzék

- [1] Coxeter H. S. M., *A geometriák alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.
- [2] L. Euler, Geometrica et sphaerica quaedam, *Memoires de l'Academie des Sciences de Saint-Petersbourg*, **5** (1815), 96–114; Opera Omnia Series 1, vol. XXVI, 344–358; eredeti: <http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E749.pdf>; angol fordítás: <http://eulerarchive.maa.org/Estudies/E749t.pdf>.
- [3] B. Grünbaum and G. C. Shephard, Ceva, Menelaus and the area principle, *Math. Magazine* **68** (1995), 254–268.  
[http://www-irm.mathematik.hu-berlin.de/~agricola/elemgeo\\_dateien/grunbaum-shepard.pdf](http://www-irm.mathematik.hu-berlin.de/~agricola/elemgeo_dateien/grunbaum-shepard.pdf)
- [4] L. Hoehn, Menelaus-type theorem for the pentagram, *Math. Magazine* **66** (1993), 121–123. <https://www.maa.org/sites/default/files/Menelaus-Type-Hoehn09625.pdf>
- [5] Á. Kurusa and J. Kozma, Eulers' ratio-sum formula in projective-metric spaces, *Beitr. Algebra Geom.* (2018).  
[https://www.researchgate.net/publication/328251958\\_Euler's\\_ratio-sum\\_formula\\_in\\_projective-metric\\_spaces](https://www.researchgate.net/publication/328251958_Euler's_ratio-sum_formula_in_projective-metric_spaces)
- [6] Á. Kurusa and J. Kozma, Eulers' ratio-sum formula revisited,  
[http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa/\\_site/index.php/about/publ-to-dl?download=141](http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa/_site/index.php/about/publ-to-dl?download=141)
- [7] F. Marko and S. Litvinov, Routh's theorem for simplices, arXiv:1408.1929 [math.MG]. <https://arxiv.org/pdf/1408.1929.pdf>
- [8] F. Marko and S. Litvinov, Routh's theorem for tetrahedra, *Geom Dedicata* (2015) 174: 155. <https://arxiv.org/pdf/1405.4418.pdf>
- [9] B. J. Routh, A Treatise on Analytical Statics with Numerous Examples, Cambridge University Press, London, 1909, **Vol. 1:3** (1999), 148–153;  
<http://www.archive.org/details/texts..>
- [10] G. C. Shephard, Euler's Triangle Theorem, *Crux Mathematicorum*, **25:3** (1999), 148–153; <https://cms.math.ca/crux/v25/n3/page148-153.pdf>.