

Geometriai szélsőérték-feladatok vizsgálata Geogebra segítségével

MARKÓ GÁBOR

Ebben a cikkben néhány nevezetes geometriai szélsőérték-feladatot mutatunk be. Megvizsgáljuk a hegyesszögű háromszög talpponti háromszögének egy minimum tulajdonságát, a háromszög izogonális pontjának tulajdonságait, valamint mutatunk egy bizonyítást az Erdős-Mordell egyenlőtlenségre. Minden feladathoz a Geogebra geometriai szerkesztőprogram segítségével animációk készültek. Ezek a szerkesztések letölthetők a <http://www.math.u-szeged.hu/polygon/markogabor/> címről.

1. A talpponti háromszög minimum tulajdonsága

Feladat. *Adott hegyesszögű háromszögbe írjuk be a legkisebb területű háromszöget!*

A feladatnak több megoldása is ismeretes, három különböző megoldást mutatunk be.

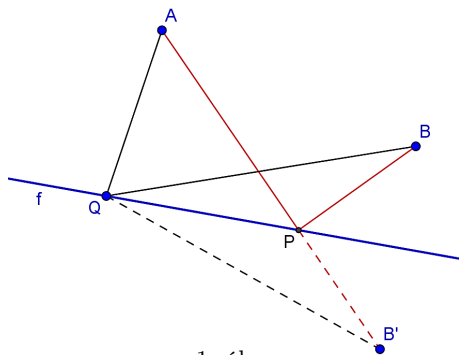
1. megoldás: Schwarz megoldása. Az ismertetésre kerülő megoldás *Hermann Amandus Schwarz* (1843-1921) német matematikus nevéhez fűződik.

Schwarz 1867-ben szerzett tanári diplomát, még ebben az évben a Hallei Egyetem docensének, később a Zürichi Műszaki Egyetem matematika professzorává választották. A Göttingeni Egyetem matematikai tagozatának vezetője lett, majd 1892-ben visszatért Berlinbe, ahol 1918-ig tanított. 1890-ben publikálta munkásságát, leginkább a komplex analízis kapcsán ismerjük, fő munkája a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség.

A bizonyításban felhasználjuk, hogy két pontnak mindig az egyenesvonalú összekötése a legrövidebb, valamint az alábbi ismert probléma megoldását.

Alapfeladat. *Adott egy f egyenes, és ugyanazon az oldalán két pont, A és B . Az A pontból szeretnénk eljutni B -be a legrövidebb úton úgy, hogy közben érintsük az f egyenest. Melyik a legrövidebb út, hol kell érinteni az f egyenest?*

A legrövidebb utat úgy kapjuk meg, hogy a B pontot tükrözzük az f egyenesre, majd a kapott B' tükörképet összekötjük az A ponttal. Így az AB' szakasz kimetszi az f egyenesből a P pontot, amit érintve a legrövidebb úton juthatunk el A -ból B -be. A háromszög-egyenlőtlenség miatt ugyanis az f egyenes bármely más Q pontjára $AQ + BQ = AQ + B'Q > B'A = AP + PB$. Ahogyan az 1. ábra is mutatja, az AQB út minden esetben hosszabb lesz, mint az APB út. Ezen bizonyítás megtalálható az Ábra1.ggb animációban.

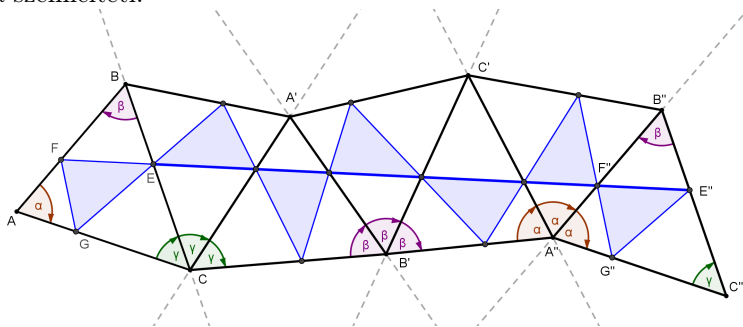


1. ábra

Térjünk vissza az eredeti feladathoz. A megoldás során tengelyes tükrözések sorozatát alkalmazzuk. Először tükrözzük az ABC_{Δ} -et a BC oldalegyenesre, a tükrözött háromszöget az $A'C$ oldalegyenesre, majd ennek a két tükrözésnek az eredményét az $A'B'$ oldalegyenesre, ezután még háromszor tükrözzünk, rendre a $C'B'$, $C'A''$ és $A''B''$ oldalegyenesekre.

Vegyük észre, hogy a kezdőhelyzeti ABC_{Δ} párhuzamos eltolással a véghelyzetben levő $A''B''C''_{\Delta}$ -be vihető. Ismert, hogy két egymást metsző tengely esetén a két tengelyes tükrözés szorzata forgatással helyettesíthető, melynek középpontja a tengelyek metszéspontja, a forgatás szöge pedig a tengelyek által bezárt szög kétszerese. Ezek alapján, ha az eredeti háromszög szögeit α , β , γ jelölik, akkor az ABC_{Δ} -et átvihetjük az $A'B'C_{\Delta}$ -be (a 3. helyzetbe) egy C csúcs körüli, 2γ szögű, óramutató járásával megegyező irányú forgatással. Hasonló gondolatmenetet követve a 3. helyzetből egy B' pont körüli, 2β szögű, óramutató járásával megegyező irányú forgatással az 5. helyzetbe juthatunk ($A''B'C'_{\Delta}$), innen pedig a 7. helyzetbe ($A''B''C''_{\Delta}$) egy A'' pont körüli, óramutató járásával megegyező irányú, 2α szögű forgatással juthatunk el. Így összességében az ABC_{Δ} -et $2\gamma + 2\beta + 2\alpha = 2(\alpha + \beta + \gamma) = 360^\circ$ -os szöggel forgattuk el. Ez azt jelenti, hogy a 7. helyzetre visszajutottunk a háromszög eredeti állásába, csak egy önmagával párhuzamos eltolást végeztünk rajta a saját síkjában. Tehát az eredeti háromszög oldalai párhuzamosak a véghelyzeti háromszög megfelelő oldalaival, azaz $AB \parallel A''B''$, $BC \parallel B''C''$ és $AC \parallel A''C''$.

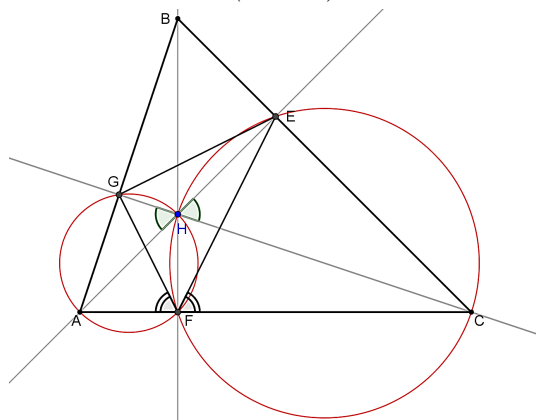
A hegyesszögű háromszög magasságainak talppontjai által meghatározott háromszöget talpponti háromszögnek nevezzük. Most pedig kövessük végig az ABC_{Δ} talpponti háromszögének, az EFG_{Δ} -nek a tükrözések során elfoglalt helyzetét, ezt a 2. ábra szemlélteti.



2. ábra

A bizonyítás során felhasználjuk a talpponti háromszögre vonatkozó alábbi segédtelet.

Segédtelet. Egy hegyesszögű ABC_{Δ} -be írt talpponti háromszög (EFG_{Δ}) oldalai az ABC_{Δ} oldalaira páronként egyenlő szögeket zárnak be, azaz $BGE_{\triangleleft} = AGF_{\triangleleft}$; $EFC_{\triangleleft} = GFA_{\triangleleft}$ és $GEB_{\triangleleft} = FEC_{\triangleleft}$ (3. ábra).



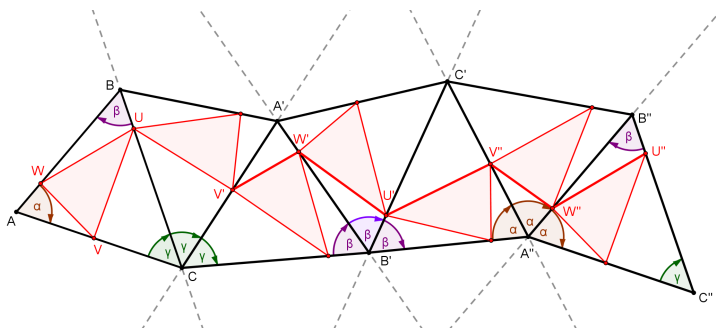
3. ábra

Bizonyítás. Legyen H az ABC_{Δ} magasságpontja. Thálesz tételének megfordításából adódik, hogy az AH átmérő fölé írt kör átmegy az F és G pontokon, a CH átmérő fölé írt kör átmegy az E és F pontokon (a magasság merőleges az oldalakra), továbbá az AG íven nyugvó $AHG_{\triangleleft}$ kerületi szög egyenlő az $AFG_{\triangleleft}$ kerületi szöggel, és hasonlóan $CFE_{\triangleleft} = CHE_{\triangleleft}$ a kerületi szögek tétele miatt. Azonban tudjuk, hogy

$AHG_{\triangleleft} = CHE_{\triangleleft}$, mivel csúcsszőgek. Tehát $AFG_{\triangleleft} = AHG_{\triangleleft} = EHC_{\triangleleft} = CFE_{\triangleleft}$, amelyből következik, hogy $AFG_{\triangleleft} = CFE_{\triangleleft}$, a segédételben pedig éppen ezt állítottuk. Ugyanígy a talpponti háromszög többi csúcsánál is belátható a megfelelő szögek egyenlősége. A bizonyítást a 3. ábra és az Ábra3.ggb szemlélteti. ■

A segédétel alapján következik, hogy ahogyan azt a 2. ábra is mutatja, az EG szakasznak a második helyzete éppen egyenesvonalú meghosszabbítása az első helyzet FE szakaszának, és a további helyzetekben is mindig erre az egyenes vonalra esik a talpponti háromszög valamely oldala. Ebből következik, hogy a talpponti háromszög tükörképeinek megfelelő csúcsai az EE'' szakaszon helyezkednek el. Így ezen csúcsok az EE'' szakaszt 6 részre bontják, a szakaszok hossza pedig rendre az $EFG_{\triangleleft}$ oldalainak hossza, két szakasz EF , két szakasz FG és két szakasz GE hosszúságú. Tehát az EE'' szakasz hossza pontosan a talpponti háromszög kerületének kétszerese.

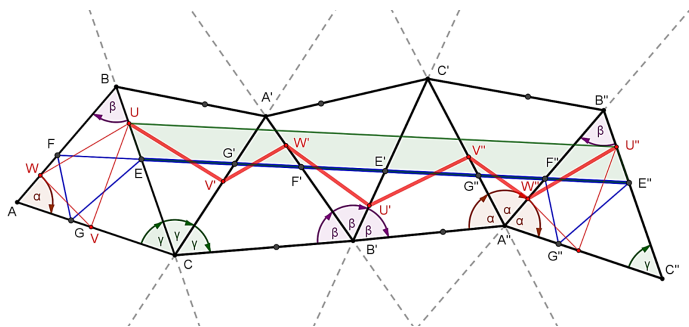
Hasonló módon végigkövethetjük az $ABC_{\triangleleft}$ -be tetszőlegesen beírt $UVW_{\triangleleft}$ útját a 4. ábra, valamint az Ábra4.ggb alapján. Láthatjuk, hogy U -tól U'' -ig a háromszög oldalaiból alkotott $UV'W'U'V''W''U''$ töröttvonal vezet el, aminek hossza pont az $UVW_{\triangleleft}$ kerületének kétszerese.



4. ábra

Mivel $BC \parallel B''C''$, ezért $UE \parallel U''E''$, továbbá $UE = U''E''$, mert egymásnak megfelelő szakaszok az $ABC_{\triangleleft}$ különböző helyzeteiben, azaz az $EE''U''U$ négyszög paralelogramma, ahogyan ezt az 5. ábra is mutatja. Ezért az $EE''U''U$ négyszög másik két oldala is párhuzamos és egyenlő, azaz $EE'' = UU''$, tehát az UU'' szakasz hossza is kétszerese a talpponti háromszög kerületének. Az UU'' szakasz azonban biztosan rövidebb, mint az $UV'W'U'V''W''U''$ töröttvonal, ugyanis két pont egyenesvonalú összekötése mindig a legrövidebb. Ebből egyenesen következik, hogy a talpponti háromszög kerülete kisebb, mint az $UVW_{\triangleleft}$ kerülete, bárhogyan is vesszük fel annak csúcsait feltéve, hogy nem esik egybe a talpponti háromszöggel. Így bebizonyítottuk, hogy a talpponti háromszög kerülete a legkisebb a hegyesszögű háromszögbe írt háromszögek közül. Az 5. ábrához az Ábra5.ggb animáció

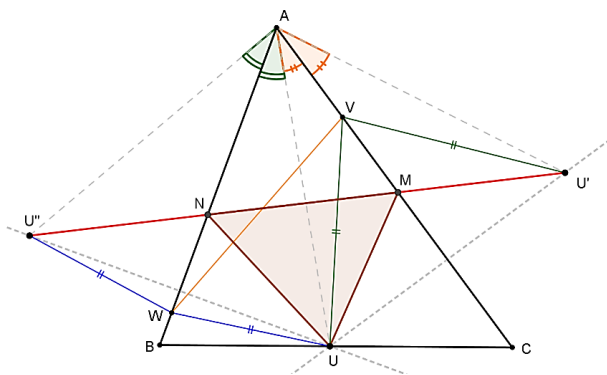
tartozik.



5. ábra

2. megoldás: Fejér Lipót megoldása két tengelyes tükrözéssel. *Fejér Lipót* (1880-1959) magyar matematikus, akit többek között Schwarz is tanított a berlini egyetemen. Egykori tanáránál egyszerűbben, elemi eszközökkel oldotta meg a problémát, nem csoda, hogy diákkori bizonyítása többek között Schwarz tetszését is elnyerte. A bizonyítása két tengelyes tükrözéssel az alábbiakban olvasható.

Legyen a hegyesszögű háromszögünk ABC_Δ , amelybe írjunk egy tetszés szerinti UVW_Δ -et a 6. ábra szerint. Tükrözzük az U pontot AC és AB oldalegyenesekre, a tükörképek legyenek U' és U'' .



6. ábra

A tengelyes tükrözés távolságtartó tulajdonsága miatt $UV = U'V$, továbbá $UW = U''W$. Írjuk fel az UVW_Δ kerületét: $K_{UVW_\Delta} = UV + VW + WU$, ez az összeg pedig az előbbi megállapítások alapján egyenlő az $U'V + VW + U''W$ összeggel, ami pont az $U'VWU''$ töröttvonal hossza. A V, W pontok mozgatása, de U pont rögzítése esetén U' és U'' pontok helyben maradnak, mert U és ABC_Δ meghatározza ezen két pontot. Rögzített U pont esetén az $U'VWU''$ töröttvonal a szintén rögzített U' és U'' pontok között marad kifeszítve, hossza pedig mindig az UVW_Δ kerülete. Mivel két pont között mindig az egyenesvonalú összekötés a

legrövidebb, ezért $U'VWU''$ töröttvonal hossza és UVW_Δ kerülete akkor a legkisebb, ha U' , V , W és U'' pontok egy egyenesre esnek. Tehát rögzített U pont esetén a legkisebb ilyen beírt kerületű háromszöget úgy kapjuk meg, hogy az $U'U''$ szakasz kimetszi az AB és AC oldalakból az N és M pontokat (W , V pontok minimumhelyzete), és az így kapott UMN_Δ kerülete lesz minimális.

Beláttuk, hogy ha az U pontot rögzítjük, akkor UMN_Δ kerülete lesz a minimális a beírt háromszögek közül, ezt megfigyelhetjük az Ábra6.ggb animációban is. Meg kell még vizsgálnunk, hogy az U pont mozgatásával elérhető-e kisebb kerületű UMN_Δ ugyanezen módszerrel. Mivel $K_{UMN_\Delta} = U'U''$, ezért UMN_Δ kerülete akkor minimális, ha $U'U''$ is minimális. Vegyük észre, hogy $AU = AU' = AU''$ a tükrözés távolságtartó tulajdonsága miatt, tehát $AU'U''_\Delta$ egyenlőszárú, amelyben $U'U''$ szakasz a háromszög alapja. A tükrözés szögtartó tulajdonsága alapján pedig tudjuk, hogy $UAB_\Delta = U''AB_\Delta$ és $UAC_\Delta = U'AC_\Delta$. Ezen megállapítások alapján

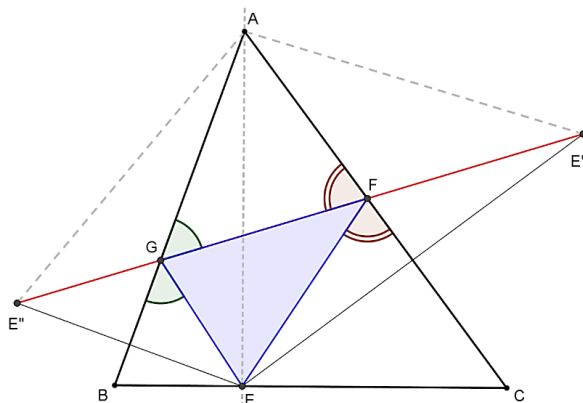
$$\begin{aligned} U''AU'_\Delta &= (UAB_\Delta + U''AB_\Delta) + (UAC_\Delta + U'AC_\Delta) = 2(UAB_\Delta + UAC_\Delta) \\ &= 2CAB_\Delta, \end{aligned}$$

ezért $U''AU'_\Delta$ nagysága független U pont helyzetétől, ABC_Δ határozza meg.

A célunk, hogy az $AU'U''_\Delta$ -ben az $U'U''$ alap a lehető legkisebb legyen úgy, hogy minden $AU'U''_\Delta$ csúcsnál levő szöge megegyezik. Ezen egyenlőszárú háromszögek közül annak a legkisebb az alapja, amelynek a szára is a legrövidebb. Az $AU'U''_\Delta$ szárai azonban AU szakasz hosszának felelnek meg, tehát $U'U''$ szakasz hossza akkor minimális, ha AU hossza is minimális.

Az AU szakasz A pont összeköttetése a BC szakasz egy pontjával. Egy pont és egy egyenes legrövidebb összeköttetése azonban a pontból az egyenesre állított merőleges szakasz hossza. Ebből következik, hogy az AU szakasznak BC -re merőlegesnek kell lennie, azaz AU az ABC_Δ A csúcsához tartozó magassága.

Innen pedig már megszerkeszthetjük a legkisebb kerületű beírt háromszöget a következő módszerrel. Legyen az A -ból induló magasság talppontja E , az E pont AC és AB oldalakra vonatkozó tengelyes tükröképe pedig E' és E'' , ahogyan azt a 7. ábra is mutatja. Az $E'E''$ szakasz kimetszi AC és AB oldalakból a minimális kerületű beírt háromszög másik két csúcsát, F -et és G -t, ezen minimális kerület nagysága pedig az $E'E''$ szakasz hosszával egyezik meg. Minden EFG_Δ -tól eltérő UVW_Δ beírt háromszög kerülete nagyobb, mert ha U pontja nem esik egybe E -vel, ekkor $E'E'' < U'U''$, azaz $K_{EFG_\Delta} < K_{UVW_\Delta}$. Ha pedig V és W közül valamelyik nem esik egybe F -fel vagy G -vel, ekkor pedig az $E'FGE''$ töröttvonal biztosan rövidebb, mint az $E'VWE''$ törött vonal hossza, így $K_{EFG_\Delta} < K_{UVW_\Delta}$ minden esetben teljesül.



7. ábra

A megoldásunk során E pontot az A csúcshoz tartozó magasság talppontjaként, F és G pontokat pedig az E pont megfelelő tükörképei segítségével határoztuk meg. Az $ABC_{\triangle}$ -ben viszont minden A csúcsra vonatkozó eljárást elvégezhetünk volna akár a B ponton is, azaz U pont tükörzése helyett V pontot tükrözhettünk volna az AB és BC oldalakra, és így haladhattunk volna tovább. Ebben az esetben a B -ből kiinduló magasság talppontja F lenne, és F tükrözésével majd E és G pontok kimetszésével kaptuk volna meg a minimális kerületű háromszöget. Azt már beláttuk, hogy pontosan egy legkisebb kerületű háromszög van, ezért az A -ból és B -ből kiinduló konstrukció során kapott két háromszög megegyezik. A C pontból való kiindulás esetén is erre a következtetésre jutnánk, amelyből következik, hogy az E , F és G pontok a háromszög egy-egy magasságának talppontja. Tehát bebizonyítottuk a talpponti háromszög minimum tulajdonságára vonatkozó alábbi tételt, és a feladatot is megoldottuk.

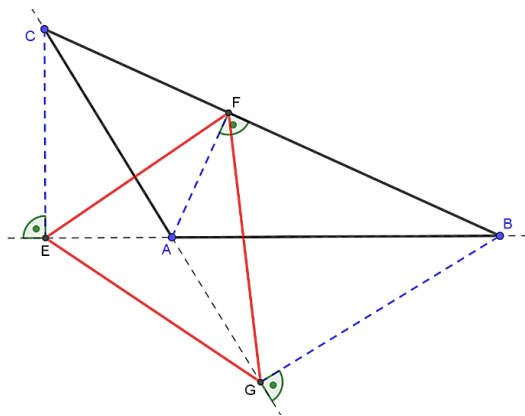
Tétel. *Adott hegyesszögű háromszögbe írt háromszögek közül a talpponti háromszög a legkisebb kerületű.*

Miért „értékesebb” a magyar matematikus megoldása?

Fejér megoldásának nagyszerűsége abban rejlik, hogy a tükrözés tulajdonságain és a legrövidebb út elvén kívül semmilyen más segédeszközt nem használ, ellentétben Schwarz bizonyításával (Thálesz tétele, kerületi szögek tétele), továbbá hat helyett két tükrözéssel oldja meg a problémát.

Megjegyzés. A feladatnak csak hegyesszögű háromszög esetén van megoldása, tompaszögű és derékszögű háromszög esetén nem jön létre talpponti háromszög, ahogyan azt a 8. ábrán és a mellékelt animációban is megfigyelhetjük (Ábra8.ggb). Derékszögű háromszög esetén a befogókhoz tartozó magasságok egybeesnek a háromszög oldalaival, így a befogók magasságainak talppontjai valójában egybeesnek,

a derékszögnél levő csúccsal egyeznek meg. Azaz ebben az esetben a talppontok nem alkotnak háromszöget. Tompaszögű háromszög esetén pedig valamely magasság nem metszi a háromszög oldalát, csak az oldalegyenesét a háromszögon kívül, így a talppontok által meghatározott háromszög nem lesz beírt háromszög. Schwarz a magasságok talppontjainak összekötését beírt háromszögnek tekinti, ez azonban csak hegyesszögű háromszög esetén teljesül. Ezzel ellentétben Fejér levezetésében a talpponti háromszög csak az eredményben jelenik meg, a hegyesszögűség kikötése pedig ott jön elő, hogy az $U'AU''_{\triangle} < 180^\circ$, valamint az $E \in BC$ feltételeknek teljesülnie kell.



8. ábra

A matematika sokszínűségét ismerve nem csoda, hogy még két megoldása is van a feladatnak. Az egyik Giulio Fagnano dei Toschi (1715-1797) nevéhez fűződik, aki differenciálszámítással oldotta meg a problémát. Az alábbiakban egy területszámításon alapuló megoldást mutatunk be.

3. megoldás. A 3. megoldás levezetése az Ábra9.ggb animációban is megtalálható, a bizonyításhoz a 9. ábra tartozik. Ismert, hogy egy háromszög magasságpontjának az oldalegyenesekre vonatkozó tükörképe a háromszög köré írt körön van. Legyen a hegyesszögű $ABC_{\triangle}$ magasságpontja M , az M pont AC és BC oldalegyenesekre vonatkozó tükörképe pedig B' illetve A' . Ekkor az $A'CB'_{\triangle}$ egyenlőszárú, mivel a tükrözés távolságtartása miatt $B'C = CM = A'C$.

Legyen az $ABC_{\triangle}$ köré írt körének középpontja O , a kör sugara r . Mivel az $A'CB'_{\triangle}$ egyenlőszárú, ezért CO sugár merőleges $A'B'$ -re. A tükrözés tulajdonságai miatt a háromszög magasságainak B'' és A'' talppontja (ld. 9. ábra) felezi az MB' , illetve MA' szakaszokat, tehát $B''A''$ szakasz középvonal az $MA'B'$ háromszögben. Ebből adódik, hogy $B''A'' \parallel B'A'$, és így $B''A''$ is merőleges CO -ra. Tegyük fel, hogy az $ABC_{\triangle}$ egy tetszőlegesen beírt háromszöge a $PQR_{\triangle}$, melynek

PR , PQ és QR oldalai rendre α , β és γ szöveget zárnak be az OA , OB és OC sugarakkal (ld. 9. ábra). Az ABC_{Δ} területe legyen t , ami egyben az $APOR$, $BQOP$ és $CROQ$ négyszögek területének összegével egyenlő. Mivel a konvex négyszög területe feleakkora, mint az átlók és az általuk közbezárt szög szinuszána szorzata, ezért

$$2t = r \cdot RP \cdot \sin \alpha + r \cdot PQ \cdot \sin \beta + r \cdot QR \cdot \sin \gamma.$$

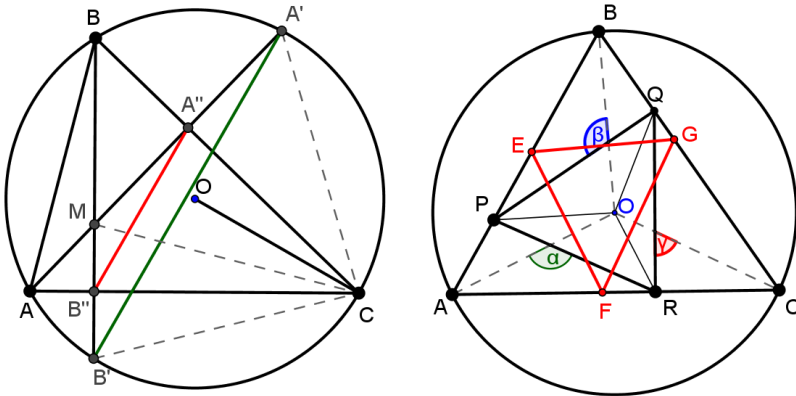
Ha azonban PQR_{Δ} helyett az EFG talpponti háromszög esetét vizsgáljuk, akkor $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$, ezért:

$$2t = r \cdot EF + r \cdot FG + r \cdot GE = r \cdot k,$$

ahol k a talpponti háromszög kerülete. A terület kétszeresére kapott összefüggéseket összevetve, majd r -rel osztva

$$k = RP \cdot \sin \alpha + PQ \cdot \sin \beta + QR \cdot \sin \gamma$$

adódik. Ebből látszik, hogy: $k \leq RP + PQ + QR$, egyenlőség pedig akkor és csak akkor teljesül, ha $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$, azaz a talpponti háromszög esetén. Így beláttuk, hogy a talpponti háromszög kerülete minden más beírt háromszög kerületénél kisebb.



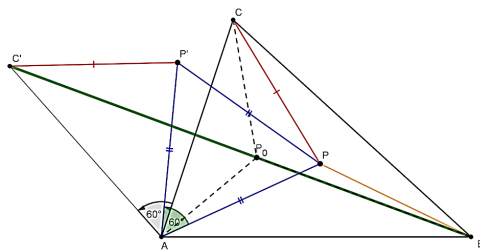
9. ábra

2. Az izogonális pont szélsőérték tulajdonsága

Feladat. Adott hegyesszögű háromszög belsejében van-e olyan pont, amelynek a háromszög csúcsaitól vett távolságösszege minimális?

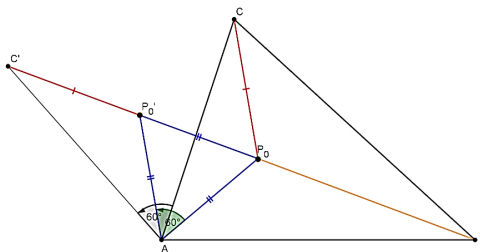
Megoldás. Legyen P tetszőleges pont az ABC_{Δ} belsejében. Ahogyan azt a 10. ábra, valamint az Ábra10.ggb animáció is mutatja, forgassuk el az APC_{Δ} -et az

A pont körül 60° -kal. Így az APC_Δ átkerül az $AP'C'_\Delta$ helyzetébe. A forgatás távolságtartása miatt az APP'_Δ egyenlő szárú, a szárszöge pedig PAP'_Δ a forgatás szögével egyenlő, azaz 60° . Ebből következik, hogy az APP'_Δ szabályos, tehát $AP = PP'$. Szintén a távolságtartás miatt $CP = C'P'$, ezért a P pont csúcsoktól vett távolságösszegére $AP + BP + CP = BP + PP' + P'C'$. Így a $BPP'C'$ töröttvonal hossza az ABC_Δ P pontjának az A , B és C csúcsoktól való távolságának összege.



10. ábra

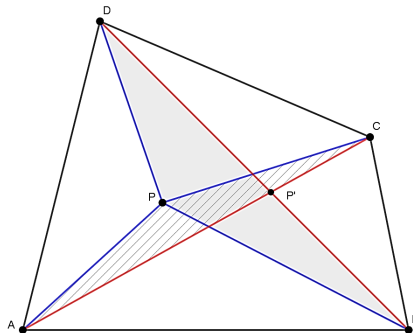
Tudjuk azonban, hogy a C' pont helyzete a P helyzetétől teljesen független, ezért a $BPP'C'$ töröttvonal hosszának minimális értéke megegyezik a $C'B$ szakasz hosszával, ugyanis két pont egyenesvonalú összeköttetése mindig a legrövidebb, ezt mutatja a 11. ábra is. Ebből adódik, hogy a $PA + PB + PC$ összeg minimuma éppen a $C'B$ szakasz hosszával egyenlő, ez a minimum pedig úgy érhető el, ha a P és P' pontok illeszkednek a $C'B$ szakaszra. Legyen P pont minimális helyzete P_0 , amelynek helyzete pontosan meg van határozva, mert az $AP_0C'_\Delta$ 60° -os. Így az $AP_0C'_\Delta$ mellékszöge, azaz AP_0B_Δ 120° -os. A szerkesztésből az is látszik, hogy egyetlen ilyen minimumtulajdonságú pont van, tehát ha A pont helyett B vagy C pontból indulunk ki, a szerkesztés ugyanahhoz a P_0 ponthoz vezet. Ebből az alábbi következtetésre juthatunk. Ez a P_0 pont tehát olyan pont, amelyből a háromszög mindegyik oldala 120° -os szög alatt látszik, valamint egy hegyesszögű háromszögnek a csúcsoktól vett távolságösszege ebben a pontban minimális. Az ilyen tulajdonságú pontot a háromszög izogonális vagy Fermat-féle pontjának nevezzük.



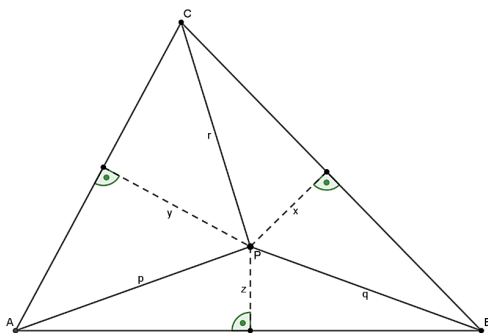
11. ábra

A feladat továbbgondolása. Adott konvex négyszögben van-e olyan pont, amelynek a négyszög csúcsaitól vett távolságösszege minimális?

Megoldás. Ennek a feladatnak a bizonyításához elég felhasználnunk a háromszög-egyenlőtlenséget. Ahogyan azt a 12. ábra és az Ábra12.ggb szerkesztés is mutatja, a csúcsoktól vett távolságösszeg a $PA+PB+PC+PD$ összegnek felel meg. Húzzuk be a négyszög átlóit, legyen az átlók metszéspontja P' . A háromszög-egyenlőtlenség teljesül az APC_{Δ} -ben és a BPD_{Δ} -ben, ez alapján $AC = P'A + P'C \leq PA + PC$, és $BD = P'B + P'D < PB + PD$. Azaz a kérdéses összeget alulról becslülve $PA + PC + PB + PD \geq P'A + P'C + P'B + P'D$. Egyenlőség akkor és csak akkor lehetséges, ha a P és P' pontok egybeesnek, ekkor a $PA + PB + PC + PD$ összeg minimális értéke az átlók összege, azaz $AC + BD = P'A + P'C + P'B + P'D$, ahol P' az átlók metszéspontja.



12. ábra



13. ábra

3. Erdős-Mordell egyenlőtlenség

Feladat. Ha az ABC háromszög belsejében levő P pont távolsága a csúcsoktól p , q , r , az oldalaktól x , y , z , akkor keressük meg a $\frac{p+q+r}{x+y+z}$ tört minimális értékét!

Megoldás. Az elkészült Geogebra animáció (Ábra13.ggb) alapján megfogalmazható sejtés szerint

$$\frac{p+q+r}{x+y+z} \geq 2, \quad \text{azaz} \quad p+q+r \geq 2(x+y+z).$$

A sejtés Erdős Páltól (1913-1996) származik, az első megoldást L. J. Mordell adta. Tegyük fel, hogy p , q , r rendre a P pontnak az A , B , C csúcsoktól, x , y , z pedig a BC , CA , AB oldalaktól mért távolsága, ahogyan azt a 13. ábra mutatja.

Segédteétel. $ap \geq bz + cy$; $bq \geq cx + az$; $cr \geq az + bx$.

A bizonyításhoz tükrözzük a B és C csúcst a BAC szög szögfelezőjére, a tükröképek C' , illetve B' , a P pont helyben marad. Ahogyan azt a 14. ábra és az Ábra14.ggb szerkesztés is mutatja, az $AB'C'_\Delta$ oldalai most a tükrözés távolságtartása miatt $AC' = b$, $B'C' = a$ és $B'A = c$, továbbá a P pont távolsága $B'C'$, $C'A$, AB' oldalaktól rendre x' , z , y .

Legyen az $AB'C'_\Delta$ A -hoz tartozó magassága m_a . Ez a szakasz biztosan nem hosszabb, mint az A csúctól a P ponton át a $B'C'$ egyenesig vezető bármely „út”, azaz $m_a \leq p + x'$, ezt mutatja a 14. ábra is. Szorozzuk be a kapott egyenlőtlenséget mindkét oldalát a -val, ekkor az $am_a \leq ap + ax'$ egyenlőtlenséget kapjuk, ahol az am_a kifejezés pontosan az $AB'C'_\Delta$ területének kétszerese. Az $AB'C'_\Delta$ területét azonban felírhatjuk az APC' , $C'PB'$, $B'PA$ háromszögek területének összegeként is, így az $am_a = ax' + bz + cy \leq ap + ax'$ egyenlőtlenséget, majd ax' levonásával a bizonyítandó $ap \geq bz + cy$ összefüggést kapjuk. Hasonló módon a $bq \geq cx + az$, $cr \geq ay + bx$ egyenlőtlenségek is beláthatók.

A segédétel egyenlőtlenségeit átrendezve juthatunk el a

$$p \geq \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}y, \quad q \geq \frac{c}{b}x + \frac{a}{b}z, \quad r \geq \frac{a}{c}y + \frac{b}{c}x$$

összefüggésekhez. A kapott három egyenlőtlenség összeadása pontosan az Erdős–Mordell egyenlőtlenséghez vezet ugyanis

$$p + q + r \geq \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}y + \frac{c}{b}x + \frac{a}{b}z + \frac{a}{c}y + \frac{b}{c}x = \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right)x + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)y + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)z,$$

és mivel egy pozitív számnak és reciprokának összege legalább 2, ezért

$$p + q + r \geq \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right)x + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)y + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)z \geq 2(x + y + z).$$

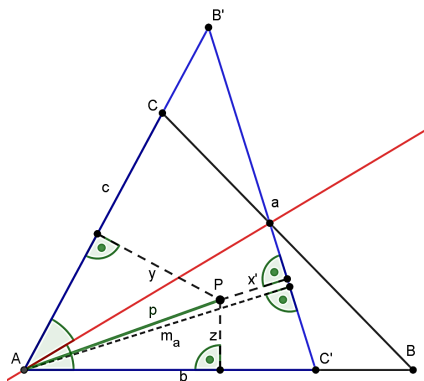
Az egyenlőtlenség két végét összevetve kapjuk, hogy $p + q + r \geq 2(x + y + z)$, tehát bebizonyítottuk az Erdős–Mordell egyenlőtlenséget.

Az egyenlőség egyik feltétele, hogy az oldalak és a reciprokaik összege pontosan 2 legyen, ez pedig csak $a = b = c$ esetén teljesül, azaz amikor a háromszög szabályos. Szabályos háromszög esetén azonban a levezetésben szereplő ABC és $AB'C'$ háromszögek egybeesnek, így az AP és az x' szakasz helyzete azonos az AP és az x szakasz helyzetével. Továbbá m_a akkor és csak akkor lehet egyenlő a $p + x$ összeggel, ha P pont rajta van az m_a szakaszon, és ugyanígy a P pontnak rajta kell lennie az m_b és m_c szakaszokon is, azaz a B és C pontokhoz tartozó magasságokon is. Ebből következik, hogy egyenlőség esetén a P pont csakis egy szabályos háromszög magasságpontja lehet.

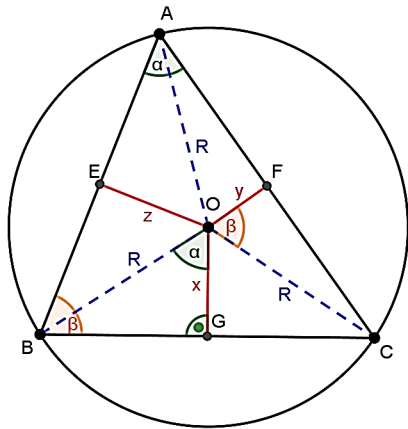
Sugáregyenlőtlenség bizonyítása az Erdős–Mordell egyenlőtlenség segítségével.

Az Erdős–Mordell egyenlőtlenség felhasználásával például a sugáregyenlőtlenséget

is igazolhatjuk. Legyen az $ABC_{\triangle}$ köré írt kör O középpontjának a háromszög oldalaitól mért távolsága rendre x , y és z , ahogyan azt a 15. ábra is mutatja. Jelöljük továbbá a körülírt kör sugarát R -rel. A bizonyításhoz felhasználjuk a közismert összefüggéseket, amelyek szerint $x = R \cos \alpha$, $y = R \cos \beta$ és $z = R \cos \gamma$ (bizonyítása az Ábra15.ggb animációban megtalálható). Ezek után használjuk fel az ismert képletet (bizonyítása például megtalálható [4]-ben), amely szerint $R \cos \alpha + R \cos \beta + R \cos \gamma = R + r$, ahol r a háromszög beírt körének sugara. Helyettesítsünk be $R \cos \alpha$, $R \cos \beta$ és $R \cos \gamma$ helyére x -et, y -t és z -t, így $x + y + z = R + r$.



14. ábra



15. ábra

Az Erdős-Mordell egyenlőtlenség szerint pedig ha O a háromszög belső vagy határpontja, akkor mivel R a csúcsoktól, x , y és z pedig az oldalaktól vett távolság, ezért teljesül, hogy $R + R + R \geq 2(x + y + z) = 2(R + r)$, tehát $3R \geq 2R + 2r$. Ebből pedig $2R$ levonása után megkapjuk sugáregyenlőtlenséget, vagyis hogy $R \geq 2r$, egyenlőség pedig csakis szabályos háromszög esetén áll fenn.

Irodalomjegyzék

- [1] RADEMACHER, TOEPLITZ, Számokról és alakzatokról, Typotex Kiadó, 2010
- [2] KOSZTOLÁNYI JÓZSEF, MAKAY GÉZA, PINTÉR KLÁRA, PINTÉR LAJOS, Matematikai problémakalauz I., Polygon Kiadó, 1999
- [3] GYAPJAS FERENC, REIMAN ISTVÁN, Elemi matematikai feladatgyűjtemény I., Tankönyvkiadó, 1992
- [4] REIMAN ISTVÁN, Fejezetek az elemi geometriából, Tankönyvkiadó, 1987
- [5] <http://www.geogebra.org>
- [6] <http://www.wikipedia.org>