

Egy négyzetgyököt közelítő rekurzív algoritmus

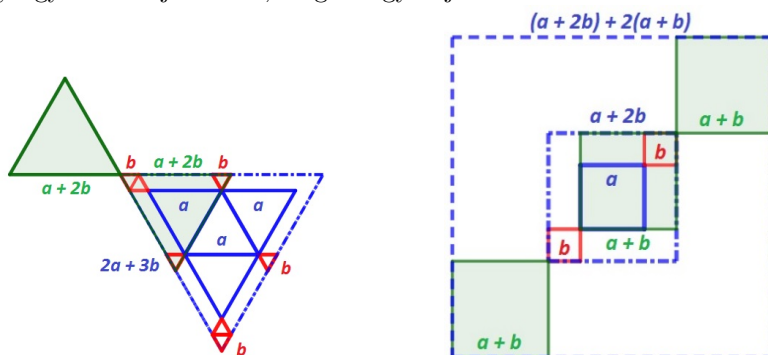
PAPP ZSOMBOR, TREMBECZKI CSABA

Bevezető

Papp Zsombor, a Kaposvári Táncsics Mihály Gimnázium tanulója a következőt írta fel nagybetűkkel egy ragyogó, napsütéses napon, a 2017-2018-as tanév utolsó előtti matekóráján a 22-es terem táblájára:

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= (k-1)a_n + kb_n \\ b_{n+1} &= a_n + (k-1)b_n\end{aligned}$$

Kérdő tekintetemre szóban annyi kiegészítést tett, hogy a két kezdő érték, a_0 és b_0 lehet bármi, csak egyszerre ne legyenek 0 (a telefonján gyorsan negatív értékeket is kipróbáltunk). Továbbá ha elosztja őket egymással, a keletkező a_n/b_n törtek sorozata $\sqrt{k}$ -hoz tart. (Még egy Csaba bácsi is elhangzott, de ettől most tekintsünk el.) Neki az volt a kérése, hogy bizonyítsuk be ezt a konvergenciát – nekem pedig az, hogy ugyan mesélje már el, mégis hogyan jutott erre.



„Egyik este néztem egy Mathologer videót [1], amiben geometriai úton bizonyították, hogy $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ nem lehet két egész hányadosa. Elgondolkodtam a geometriai

módszer átírásán úgy, hogy bármilyen számra működjön. Aznap este már nem, de másnap a buszon újra elővettem a papírt, és kísérleteztem. A $\sqrt{2}$ négyzetekkel való igazolásánál egy a és két b oldalú négyzetből kiindulva a következő lépésben egy $a + 2b$ és két $a + b$ oldalú négyzetet kapunk. A $\sqrt{3}$ esetén $2a + 3b$ és $a + 2b$ oldalú háromszögeket használunk. Ekkor gondoltam a táblára írt sorozatokra. Nekiálltam számolni, a teszteléshez csináltam egy táblázatot a számítógépen. Nagyon örültem, amikor láttam, hogy nagyobb számokra is szépen közelítenek.”

Mit tehet az ember, ha ez fogadja a tanterembe lépve a nyári szünet kapujában? Hát először is megvakarja a fejét, aztán elönti a boldogság, aztán ezek átfedve követik egymást hosszabb-rövidebb időintervallumokban. Igen ám, de hogyan bizonyítsuk, hogy a Zsombor által felírt kettős rekurzió tényleg $\sqrt{k}$ -t közelíti? Az első matematikával kapcsolatos gondolat a rekurzió átírása explicit alakba: a kapott sorozat vizsgálata talán már nem okoz nehézséget. Rekurziót *generátorfüggvényekkel* tudunk explicit alakba írni [2]. Ötletként felmerült, hogy bizonyítsuk a konvergenciát a *sorozatokra vonatkozó tételekkel*, de elvetettük, mert a vizsgált példákban a közelítő sorozatok hol mutattak monotonitást, hol nem (sőt, a konvergencia sem volt minden esetben egyértelmű). Most, a cikk letisztázásakor már látjuk, hogy ez az út milyen feltételekkel járható.

Írásunkban némi előkészítés után mindkét módszert bemutatjuk. Először a sorozatokra vonatkozó tételekkel, majd generátorfüggvényekkel vizsgáljuk meg a kérdést.

Előkészületek

Az általunk vizsgálni kívánt rekurzió a következő:

$$a_0 = a; \quad b_0 = b; \quad a_{n+1} = (k-1)a_n + kb_n; \quad b_{n+1} = a_n + (k-1)b_n,$$

ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és nem egyszerre 0, illetve tetszőleges $k \in \mathbb{R}^+$ ($k \neq 1$). A kérdés, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{k}$?

Írjuk fel először a törtet és alakítsunk rajt egy kicsit, bevezetve a törtes alak helyett egy lineárist.

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{(k-1)a_n + kb_n}{a_n + (k-1)b_n} = \frac{(k-1)\frac{a_n}{b_n} + k}{\frac{a_n}{b_n} + (k-1)} = \frac{(k-1)c_n + k}{c_n + (k-1)} = c_{n+1}$$

Tételezzük most fel, hogy c_n sorozat tart valahova, jelölje határértékét A . A konvergens sorozatokkal végzett műveletekre vonatkozó tételek alapján az utolsó egyen-

lőség két oldalának határértéke:

$$\begin{aligned}\frac{(k-1)A+k}{A+(k-1)} &= A \\ (k-1)A+k &= A^2 + A(k-1) \\ \sqrt{k} &= |A|\end{aligned}$$

Tehát ha tart valahova a sorozat, akkor csak és kizárólag $\sqrt{k}$ vagy $(-\sqrt{k})$ lehet a határértéke.

Figyeljük meg, hogy a $(k-1)A$ tag kiesik az átalakítás során. Visszafelé olvasva látjuk, hogy a $(k-1)$ együttható helyére más valós szám is írható, a konvergenciát elvileg a csere nem befolyásolja. Írjunk hát az együttható helyére valamely p konstans:

$$c_{n+1} = \frac{pc_n + k}{c_n + p}.$$

Ez a sorozat az eredetileg vizsgált sorozat általánosítása. Helyettesítsünk most konkrét számokat a k , c_0 és p paraméterek helyére! A táblázat minden példájában $k = 9$. A c), e), g) sorozat egész értékei valóban egész értékek, a többi a táblázatkezelő kerekítette a cella mérete miatt.

	k	p	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}
a)	9	5	10	3,9333	3,209	3,0509	3,0126	3,0032	3,0008	3,0002	3	3	3
b)	9	4	2	2,8333	2,9756	2,9965	2,9995	2,9999	3	3	3	3	3
c)	9	3	8	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
d)	9	2	10	2,4167	3,1321	2,9743	3,0052	2,999	3,0002	3	3	3	3
e)	9	0	5	1,8	5	1,8	5	1,8	5	1,8	5	1,8	5
f)	9	-1	100	-0,919	-5,168	-2,297	-3,427	-2,807	-3,101	-2,951	-3,025	-2,988	-3,006
g)	9	-3	12	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
h)	9	-5	2	0,3333	-1,571	-2,565	-2,885	-2,971	-2,993	-2,998	-3	-3	-3
i)	9	-6	8	-19,5	-4,941	-3,532	-3,168	-3,055	-3,018	-3,006	-3,002	-3,001	-3

A következő sejtéseket fogalmazhatjuk meg.

– Ha $|p| > |\sqrt{k}|$, akkor c_n sorozat szigorúan monoton tart ($c_0 \sqrt{k}$ -hoz viszonyított nagyságától függően növe vagy csökkenve) $\sqrt{k}$ -hoz vagy $(-\sqrt{k})$ -hoz, p előjelétől függően.

– Ha $|p| < |\sqrt{k}|$, akkor c_n sorozat „ugrálva” tart ($c_0 \sqrt{k}$ -hoz viszonyított nagyságától függően növe vagy csökkenve) $\sqrt{k}$ -hoz vagy $(-\sqrt{k})$ -hoz, p előjelétől függően.

– Ha $p = 0$, akkor a sorozat két értéket váltogat.

– Ha $|p| = |\sqrt{k}|$, akkor c_n sorozat konstans $\sqrt{k}$ vagy $(-\sqrt{k})$, p előjelétől függően.

Utóbbi két sejtés könnyen igazolható, ezek bizonyítását az Olvasóra bizzuk.

Zsombor szándéka szerint a sorozatnak $\sqrt{k}$ -t kell közelíteni, ezért szorítkozzunk a $p > 0$ esetekre. Rögtön adódik, hogy az eredeti koncepcióban a $(k-1)$ együttható csak akkor teljesíti ezt, ha $k > 1$, az eredeti forma csak ebben az esetben tartható. A továbbiakban az általánosított formát használjuk.

Bizonyítani három esetet kell, mi közülük az 1)-t részletezzük. A 2) eset hasonlóan adódik, 3)-at pedig páros és páratlan tagú részsorozatokra bontva ugyanígy vizsgálhatjuk.

1) Ha $p > \sqrt{k}$ és $c_0 > \sqrt{k}$, akkor a sorozat monoton csökkenve konvergál $\sqrt{k}$ -hoz.

2) Ha $p > \sqrt{k}$ és $c_0 < \sqrt{k}$, akkor a sorozat monoton növekedve tart $\sqrt{k}$ -hoz.

3) Ha $1 < p < \sqrt{k}$, akkor a sorozat „ugrálva” konvergál $\sqrt{k}$ -hoz.

I. bizonyítás – A c_n sorozat monoton és korlátos

Az 1) esetben feltételezzük, hogy $p > \sqrt{k}$ és $c_0 > \sqrt{k}$. Alkalmazzunk teljes indukciót.

1. Tudjuk, hogy $c_0 > \sqrt{k}$.

2. Tegyük fel, hogy valamely n -re $c_n > \sqrt{k}$.

3. Induljunk ki az indukciós feltevésből, szorozzuk mindkét oldalt $p - \sqrt{k} > 0$ kifejezéssel:

$$\begin{aligned} c_n(p - \sqrt{k}) &> \sqrt{k}(p - \sqrt{k}) \\ k + pc_n &> p\sqrt{k} + c_n\sqrt{k} \\ c_{n+1} = \frac{k + pc_n}{p + c_n} &> \sqrt{k} \end{aligned}$$

Tehát igazoltuk, hogy minden n -re $c_n > \sqrt{k}$, azaz a sorozat alulról korlátos.

Most induljunk ki abból, hogy $c_n > \sqrt{k}$. Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd pc_n -t hozzáadva a reláció nem változik:

$$\begin{aligned} c_n^2 + pc_n &> k + pc_n \\ c_n &> \frac{k + pc_n}{p + c_n} = c_{n+1} \end{aligned}$$

Ezzel azt is bizonyítottuk, hogy a sorozat szigorúan monoton csökken.

Végül felhasználjuk, hogy monoton csökkenő és alulról korlátos sorozat konvergens. Tehát a sorozat valóban konvergens. Korábban láttuk, hogy a határértékre csak $c_n \rightarrow \sqrt{k}$ adódhat. A többi esetet hasonlóan bizonyíthatjuk.

II. bizonyítás – Generátorfüggvények

II/1. Bevezetés. Legyen adott $a_0, a_1, a_2, \dots$ valós számsorozat, ez meghatározza az

$$a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

hatványsort. Mivel az együtthatók adottak, ezért a kifejezés az x -nek, mint változónak függvénye. Feltesszük, hogy a sor konvergens, legalább egy $(-R; R)$ intervallumon. Megfordítva, ha adott a hatványsor, mint függvény, akkor az *generálja* az $a_0, a_1, a_2, \dots$ sorozat tagjait. Ezért az

$$a(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_nx^n$$

hatványsor összegét, amennyiben az konvergens, *generátorfüggvénynek* nevezzük. A könnyebb kezelhetőség érdekében kiterjeszthetjük a definíciót akár minden egész számra is (ilyenkor $a_i = 0$, ha $i < 0$):

$$a(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_nx^n.$$

Sok esetben ismert formulák és elemi átalakítások segítségével meg tudjuk határozni az összegét. Ilyen eset az, ha minden a_i együttható 1 és $|x| < 1$. Ekkor a hatványsort *végtelen mértani sornak* nevezzük, összege

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n \in \mathbb{N}} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Ebből levezethető, hogy ha $|x| < 1$, akkor

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad S' &= d + dx + dx^2 + dx^3 + \dots = \sum_{n \in \mathbb{N}} dx^n = d(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) \\ &= d \sum_{n \in \mathbb{N}} x^n = dS = d \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

Tovább lépve (feltesszük, hogy $|cx| < 1$):

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad S'' &= 1 + cx + c^2x^2 + c^3x^3 + \dots = \sum_{n \in \mathbb{N}} c^n x^n = 1 + (cx) + (cx)^2 + (cx)^3 + \dots \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (cx)^n = \frac{1}{1-cx}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(III)} \quad S''' &= d + dcx + d(cx)^2 + d(cx)^3 + \dots = d[1 + cx + (cx)^2 + d(cx)^3 + \dots] \\ &= d \sum_{n \in \mathbb{N}} (cx)^n = d \frac{1}{1-cx}. \end{aligned}$$

Az (I) esetben a „generált” sorozat az $a_i = d$, a (II) esetben $a_i = c^i$, a (III) esetben pedig $a_i = dc^i$.

Fordítsuk végül meg a dolgot: ha látunk egy kifejezést, amely $u \frac{1}{1-vy}$ alakú és $|vy| < 1$, akkor fel tudunk írni egy olyan $u + u(vy) + u(vy)^2 + u(vy)^3 + \dots$ hatványsort, amelynek pontosan ez az összege.

És ez utóbbi fontos nekünk: ha ki tudjuk fejezni a rekurzióhoz tartozó generátorfüggvényt zárt alakban, akkor abból felírhatjuk a hatványsor együtthatóit is zárt alakban: uv^i .

II/2. A rekurzió átírása. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, a, b nem egyszerre 0, $k \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges és p a legegyszerűbb $p = 1$, akkor az alábbi

$$a_0 = a; \quad b_0 = b; \quad a_{n+1} = a_n + kb_n; \quad b_{n+1} = a_n + b_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

rekurzióval megadott sorozatra teljesül, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{k}$.

Mivel $k = 1$ -re a törtsorozat azonosan 1, ezért ezt az esetet a továbbiakban nem vizsgáljuk. Nézzünk meg pár n értéket tetszőleges $a + b \neq 0$ valós számokra, mielőtt igazolnánk az állításunkat.

n	0	1	2	3	...
a_n	a	$a + kb$	$(k+1)a + 2kb$	$(3k+1)a + k(k+3)b$	...
b_n	b	$a + b$	$2a + (k+1)b$	$(k+3)a + (3k+1)b$	...

Most kialakítjuk az x hatványokkal szorzott összegeket, csak két külön sorozatra:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n = x \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n + kx \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n x^n + a; \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n x^n = x \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n + x \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n x^n + b.$$

Ismét vezessük be a generátorfüggvényeket, legyen $a(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n$ és $b(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n x^n$. Ezzel az

$$a(x) = xa(x) + kxb(x) + a; \quad b(x) = xa(x) + xb(x) + b$$

formulákhoz jutunk. Tekintsünk az előző két kifejezésre, mint egyenletrendszerre, melyben $a(x)$ és $b(x)$ a két ismeretlen. Oldjuk meg! A második egyenletből talán egy fokkal könnyebb kifejezni $b(x)$ -t:

$$b(x) = \frac{b}{1-x} + \frac{xa(x)}{1-x}.$$

Adódik egy feltétel x alkalmasságára: $x \neq 1$. Az első egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$a(x) = xa(x) + kx \left(\frac{b}{1-x} + \frac{xa(x)}{1-x} \right) + a.$$

Ebből $a(x)$ -re rendezve

$$a(x) \left[1 - x - \frac{kx^2}{1-x} \right] = a + \frac{kbx}{1-x},$$

$$a(x) = \frac{a - ax + kbx}{(1-x)^2 - kx^2} = \frac{a + (kb - a)x}{(1-k)x^2 - 2x + 1}$$

adódik. Ha visszahelyettesítünk $b(x)$ -be, az alábbiakra jutunk:

$$b(x) = \frac{b}{1-x} + \frac{x}{1-x} a(x) = \frac{b}{1-x} + \frac{x}{1-x} \frac{a + (kb - a)x}{(1-k)x^2 - 2x + 1}$$

$$= \frac{b(1-k)x^2 - 2bx + b + ax + (kb - a)x^2}{(1-x)[(1-k)x^2 - 2x + 1]} = \frac{bx^2 - bx + b - bx + ax - ax^2}{(1-x)[(1-k)x^2 - 2x + 1]} =$$

$$= \frac{(1-x)[ax + b - bx]}{(1-x)[(1-k)x^2 - 2x + 1]} = \frac{ax + b - bx}{(1-k)x^2 - 2x + 1}.$$

Összesítve az eredményinket az

$$a(x) = \frac{a + (kb - a)x}{(1-k)x^2 - 2x + 1}, \quad b(x) = \frac{b + (a - b)x}{(1-k)x^2 - 2x + 1}$$

formába írhatjuk függvényeinket. Alakítsuk szorzattá a nevezőt! Újabb feltételt kapunk x -re, hiszen a nevezőben szereplő másodfokú kifejezésre

$$x_{1,2} \neq \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1-k)}}{2(1-k)} = \frac{2 \pm 2\sqrt{k}}{2(1-k)} = \frac{1 \pm \sqrt{k}}{1-k},$$

ahonnan $x_1 \neq \frac{1}{1-\sqrt{k}}$; $x_2 \neq \frac{1}{1+\sqrt{k}}$. A nevező így

$$(1-k)x^2 - 2x + 1 = [(1 + \sqrt{k})x - 1][(1 - \sqrt{k})x - 1],$$

ami alapján

$$a(x) = \frac{a + (kb - a)x}{[(1 + \sqrt{k})x - 1][(1 - \sqrt{k})x - 1]} \quad \text{és} \quad b(x) = \frac{b + (a - b)x}{[(1 + \sqrt{k})x - 1][(1 - \sqrt{k})x - 1]}.$$

Következzen $a(x)$ törtre bontása!

$$a(x) = \frac{A}{(1 + \sqrt{k})x - 1} + \frac{B}{(1 - \sqrt{k})x - 1},$$

ezért összegükben az x összevont szorzótényezője megegyezik $(kb - a)$ -val, a konstans tag pedig a -val egyenlő. Belőlük ismét építhetők egy egyenletrendszer, melyben A -t és B -t keressük:

$$\begin{cases} A + B = -a \\ A + B + (B - A)\sqrt{k} = kb - a \end{cases},$$

megoldása $B = \frac{b\sqrt{k}-a}{2}$ és $A = -\frac{b\sqrt{k}+a}{2}$. Hasonlóan

$$b(x) = \frac{C}{(1+\sqrt{k})x-1} + \frac{D}{(1-\sqrt{k})x-1},$$

amelyből a

$$\begin{cases} C+D = -b \\ C+D+(D-C)\sqrt{k} = a-b \end{cases},$$

egyenletrendszer megoldása $D = \frac{a-b\sqrt{k}}{2\sqrt{k}}$ és $C = -\frac{a+b\sqrt{k}}{2\sqrt{k}}$.

Eddigi eredményeink segítségével fel tudjuk írni $a(x)$ és $b(x)$ hatványsorainkat más, zárt alakban.

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{A}{(1+\sqrt{k})x-1} + \frac{B}{(1-\sqrt{k})x-1} \\ &= \frac{a+b\sqrt{k}}{2} \frac{1}{1-(1+\sqrt{k})x} + \frac{a-b\sqrt{k}}{2} \frac{1}{1-(1-\sqrt{k})x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(x) &= \frac{C}{(1+\sqrt{k})x-1} + \frac{D}{(1-\sqrt{k})x-1} \\ &= \frac{a+b\sqrt{k}}{2\sqrt{k}} \frac{1}{1-(1+\sqrt{k})x} + \frac{b\sqrt{k}-a}{2\sqrt{k}} \frac{1}{1-(1-\sqrt{k})x} \end{aligned}$$

Hatványsor-formába visszaírva:

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{a+b\sqrt{k}}{2} [1 + (1+\sqrt{k})x + (1+\sqrt{k})^2 x^2 + \dots] + \\ &\quad + \frac{a-b\sqrt{k}}{2} [1 + (1-\sqrt{k})x + (1-\sqrt{k})^2 x^2 + \dots] \\ &= \frac{a+b\sqrt{k}+a-b\sqrt{k}}{2} + \frac{(a+b\sqrt{k})(1+\sqrt{k}) + (a-b\sqrt{k})(1-\sqrt{k})}{2} x + \\ &\quad + \frac{(a+b\sqrt{k})(1+\sqrt{k})^2 + (a-b\sqrt{k})(1-\sqrt{k})^2}{2} x^2 + \\ &\quad + \frac{(a+b\sqrt{k})(1+\sqrt{k})^3 + (a-b\sqrt{k})(1-\sqrt{k})^3}{2} x^3 + \dots, \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy az $a(x)$ hatványsorban az együtthatók alakja:

$$a_n = \frac{(a+b\sqrt{k})(1+\sqrt{k})^n + (a-b\sqrt{k})(1-\sqrt{k})^n}{2}.$$

Elég bonyolultnak tűnik a kapott formula. Tényleg előállítja azokat a számlálók, amiket a rekurzió meghatároz? Ellenőrzésképpen helyettesítsünk be 0,1,2,3 számokat n helyére: az

$$a_0 = a; \quad a_1 = a + kb; \quad a_2 = (k+1)a + 2kb; \quad a_3 = (3k+1)a + k(k+3)b$$

értékeket kapjuk, ami megfelel az elején kiszámolt számlálók értékeinek. Működik! A fenti átalakításokat $b(x)$ hatványsorra is elvégezve a szereplő együtthatók

$$b_n = \frac{(b\sqrt{k} + a)(1 + \sqrt{k})^n + (b\sqrt{k} - a)(1 - \sqrt{k})^n}{2\sqrt{k}}.$$

Ezt ismét ellenőrizve, $n = 0, 1, 2, 3$ esetén az eredeti táblázatban kiszámított értékeket kapjuk.

II/3. A konvergencia bizonyítása. Miután előállítottuk a rekurzívan felírt hányados-sorozatunk számlálóját, nevezőjét, vizsgáljuk meg magát a törtet! Az átalakítások közben emlékezzünk rá, hogy a, b, k megfelelő konstansok és $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} &= \sqrt{k} \frac{(a + b\sqrt{k})(1 + \sqrt{k})^n + (a - b\sqrt{k})(1 - \sqrt{k})^n}{(b\sqrt{k} + a)(1 + \sqrt{k})^n + (b\sqrt{k} - a)(1 - \sqrt{k})^n} \\ &= \sqrt{k} \frac{a + b\sqrt{k} + (a - b\sqrt{k}) \left(\frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} \right)^n}{b\sqrt{k} + a + (b\sqrt{k} - a) \left(\frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} \right)^n} \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy q_n sorozat konvergens és 0-hoz tart, ha $|q| < 1$. Tekintsük a pozitív nevezőjű törtet:

$$\begin{aligned} -1 &< \frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} < 1 \\ -1 - \sqrt{k} &< 1 - \sqrt{k} < 1 + \sqrt{k} \end{aligned}$$

Az első egyenlőtlenség biztosan teljesül, hiszen $-1 < 1$. A második esetén $-\sqrt{k} < \sqrt{k}$, ami szintén teljesül. Tehát mivel $\left| \frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} \right| < 1$, ezért $\left(\frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} \right)^n \rightarrow 0$. A konvergens sorozatokkal végzett műveletekre vonatkozó tételek miatt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \sqrt{k} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + b\sqrt{k} + (a - b\sqrt{k}) \left(\frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} \right)^n}{b\sqrt{k} + a + (b\sqrt{k} - a) \left(\frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} \right)^n} \\ &= \sqrt{k} \frac{a + b\sqrt{k} + (a - b\sqrt{k}) \cdot 0}{b\sqrt{k} + a + (b\sqrt{k} - a) \cdot 0} = \sqrt{k}, \end{aligned}$$

ami tételünk állítását bizonyítja.

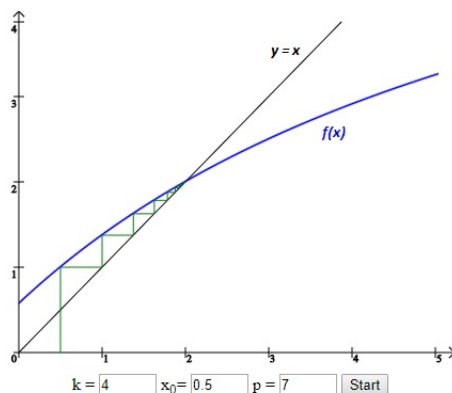
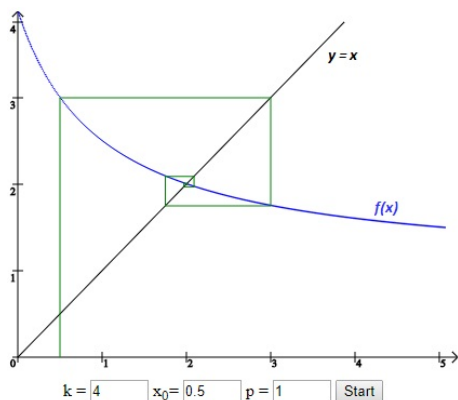
Nyugodt szívvel kijelenthetjük, hogy Zsombor algoritmusa valóban $\sqrt{k}$ -hoz konvergál, mégpedig (a feltételeken belül adott) a és b értékétől *függetlenül*.

A hatványsoros számolás hosszabb és nehezebb volt, mint a monotonitás és korlátosság vizsgálata. Azonban többet is kaptunk eredményül: az első szakaszban csak a c_n törtek sorozatának egyes tulajdonságairól tudtunk nyilatkozni, most viszont az n -edik tag pontos képletét is megkaptuk.

Végszó

Tegyük egy kis kitekintést: vegyük a rekurziót leíró, $\mathbb{R} \setminus \{-p\}$ halmazon értelmezett $f(x) = \frac{px+k}{x+p}$ függvényt, melyre $x = c_n$ esetén $f(x) = c_{n+1}$ bármely n indexre. Matematikai szakzsargonnal élve *iterációt* végzünk, ha alkalmas x_0 -ból kiindulva, a függvényből kapott értéket újra és újra visszahelyettesítjük. Most ezzel a módszerrel megkapjuk a sorozat tagjait: $c_0 = x_0$, $c_1 = f(x_0)$, $c_2 = f(f(x_0))$, $c_3 = f(f(f(x_0)))$ stb. Figyeljük meg: $f(\sqrt{k}) = \sqrt{k}$. Ezt úgy nevezzük, hogy $x = \sqrt{k}$ az $f(x)$ függvény *fixpontja*. (Általában, $f : D^f \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek $x_0 \in D^f$ fixpontja, ha $f(x_0) = x_0$).

Az immár bizonyított konvergencia gyönyörűen láthatóvá válik, ha számítógépen megjelenítjük. Az alábbi két ábrán az x_0 kiindulási értékből iterálva határozzuk meg a fixponthoz tartó sorozatot. Szépen látható, hogy $p > \sqrt{k}$; $x_0 < \sqrt{k} = 2$ esetén szigorúan növekvő sorozattal, $0 < p < \sqrt{k}$ esetben „ugrálva” tartunk a 2 fixponthoz. A kialakuló ábrát az iteráció *pókháló-diagramjának* nevezzük.



Köszönetnyilvánítás. Szeretnénk köszönetet mondani a cikk lektorának, aki nagyon hasznos megjegyzésekkel járult hozzá írásunk végső formájához.

Megjegyzések

- [1] *Burkard Polster* ausztrál matematikus *Mathologer* nevű Youtube-csatornáján a *Visualising irrationality with triangular squares* című videóról van szó.
<https://www.youtube.com/watch?v=yk6wbvNPZW0>.
- [2] Ronald L. Graham – Donald E. Knuth – Oren Patashnik, *Konkrét Matematika*, Műszaki Könyvkiadó, 1998, 1422 old.