

Egy érdekes egyenletrendszer

RETKES ZOLTÁN

Bevezetés

Az egyenletrendszerrel még Edinburghban, a National Library olvasótermében találkoztam, ahol források és kapcsolatok után kutattam éppen. Így találtam rá Stephen Siklos, *Advanced Problems in Core Mathematics: Preparing for University* című egyetemi előkészítő feladatgyűjteményére, ami online elérhető olvasásra és szabad letöltésre. Mindig kedveltem az elemi problémákat sokszínűségük és inspiratív hatásuk miatt. Ebben a gyűjteményben már a második kidolgozott problémánál megragadt az elmém és elkezdtem elemezni, újabb és újabb megközelítési lehetőségeket találva. A probléma a következő:

Kidolgozott feladat. Az $x_1, x_2, \dots, x_n$, ($n \geq 3$), pozitív számok kielégítik az

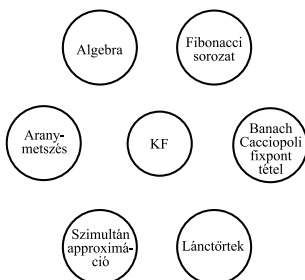
$$x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}, \dots, x_{n-1} = 1 + \frac{1}{x_n}, \quad x_n = 1 + \frac{1}{x_1}$$

egyenleteket. Mutassuk meg a következőket

- i) $x_1, x_2, \dots, x_n > 1$,
- ii) $x_1 - x_2 = -\frac{x_2 - x_3}{x_2 x_3}$,
- iii) $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

és határozzuk meg x_1 értékét.

A cikkben a továbbiakban KF-ként fogunk hivatkozni a fenti problémára. Hogy miért is érdekes a fenti nemlineáris rendszer? A továbbiakban ki fog derülni, hogy KF összeköti a matematika hat területét, amint azt a sematikus 1. ábra szemlélteti, [2]-ben a szerző elemi algebrát használva szorzattá alakítással bizonyítja (iii)-t és adja meg x_1 értékét. Ezt a bizonyítást kissé tömörítve fogom bemutatni az 1.) fejezetben, mivel Siklos professzor igen részletes magyarázattal látta el a megoldást, segítve ezzel a diákokat a gondolkodási stratégiájuk fejlesztésében.



1. ábra. Fő kapcsolódási területek

A közölt megoldás után egy postmortem fejezetben további részletes stratégiai elemzés található, amitől itt eltekintünk, majd felvázol - mintegy utóiratként - egy Fibonacci sorozatot használó ötletet, amit teljesen kidolgozott formájában a 2.) fejezetben mutatunk be. A 3.) fejezetben megmutatjuk, hogyan alkalmazható a Banach-Caccioppoli tétel KF megoldására, illetve ez a fejezet már átvezet a 4.) fejezet szimultán approximációs megközelítésére, melynek keretében bemutatunk egy érdekes, az iterációs sorozat által generált vizuális modellt. Végül a rövid, ám elegáns 5.) fejezetben egy lánc törteket használó "egysoros" bizonyítással fejezzük be a cikket.

1. Algebrai bizonyítás

Ebben a fejezetben és a következő fejezet első bekezdésében megtartottuk a szó szerinti fordítás stílusát és szóhasználatát azzal a szándékkal, hogy az olvasó az egész könyv hangulatáról képet kaphasson.

„Úgy gondolom, először a legutolsó állítást fogom használni és lássuk mi történik. Tegyük fel, hogy $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$. Ezt helyettesítve bármely egyenletbe az $x = 1 + \frac{1}{x}$ egyenlőséget kapjuk, ami ekvivalens az $x^2 - x - 1 = 0$ másodfokú egyenlettel. Innen $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, ami két lehetséges értéket ad (annak ellenére, hogy a feladat kitűzéséből következően egy megoldást várunk). Láthatóan $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$, ami ellentmond az $x_i > 0$ feltételnek. (Nem az (i)-beli állításnak! Azt még használni fogjuk később). Egyedül (iii)-t használtuk x_1 kiszámításához, így arra számíthatunk, hogy vagy (i) $\wedge$ (ii) $\Rightarrow$ (iii), vagy pedig (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). Nem feledve, hogy $x_i > 0$ minden i indexre, láthatóan (i) nyilvánvaló. Mivel $x_2 > 0$, így $1/x_2 > 0$ és az $x_1 = 1 + 1/x_2$ egyenlet mutatja, hogy $x_1 > 1$ és hasonlóan $x_2, \dots, x_n$. Tekintsük most (ii)-t. Az itt szereplő egyenletben x_1, x_2 és x_3 szerepelnek, így bizonyosan az első két egyenletet kell majd használnom az egyenletrendszerből:

$$x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}$$

Mivel $x_1 - x_2$ -re vagyok kíváncsi, nézzük mi történik, ha kivonom a két egyenletet egymásból:

$$(1) \quad x_1 - x_2 = \left(1 + \frac{1}{x_2}\right) - \left(1 + \frac{1}{x_3}\right) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} = \frac{x_3 - x_2}{x_2 x_3} = -\frac{x_2 - x_3}{x_2 x_3}$$

Úgy tűnik ez működik.

Egy tulajdonság, amit eddig nem használtam, az egyenletek ciklikussága - az a mód ahogyan x_n visszacsatolódik x_1 -hez. Nézzük mi történik, ha folytatom a különbségek előállítását. Mivel x_1 és x_2 semmiféle specialitással nem bír, így (1) továbbra is érvényes marad, ha az indexekhez hozzáadok 1-t.

$$(2) \quad x_2 - x_3 = -\frac{x_3 - x_4}{x_3 x_4}$$

Ha most (2)-t beírom (1)-be, kapjuk a következőt:

$$x_1 - x_2 = -\frac{x_2 - x_3}{x_2 x_3} = \frac{x_3 - x_4}{x_2 x_3^2 x_4}$$

Itt már látható, hogy hova vezet ez az eljárás. Ismételve az előző lépést kapjuk

$$x_1 - x_2 = \frac{x_3 - x_4}{x_2 x_3^2 x_4} = -\frac{x_4 - x_5}{x_2 x_3^2 x_4^2 x_5} = \dots$$

és végül visszaérünk $(x_1 - x_2)$ -höz.

$$x_1 - x_2 = -\frac{x_4 - x_5}{x_2 x_3^2 x_4^2 x_5} = \dots = \pm \frac{x_1 - x_2}{x_2 x_3^2 x_4^2 x_5^2 \dots x_n^2 x_1^2 x_2}$$

azaz

$$(3) \quad (x_1 - x_2) \left(1 \mp \frac{1}{x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 x_5^2 \dots x_n^2}\right) = 0$$

Azért írtam $\pm$ jelet, mert minden lépés egy (-) jelet hoz be és nem világos, hogy végül $(-1)^n$ vagy $(-1)^{n-1}$ lesz a helyes előjel. Később kiderül (például kidolgozva az $n=3$ speciális esetet), de ebben a pillanatban nem fontos. (3)-ból nyilvánvalóan következik, hogy vagy

$$x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 x_5^2 \dots x_n^2 = \pm 1 \quad \text{vagy pedig} \quad x_1 = x_2,$$

(amit szeretnénk). Most válik világossá (i) szerepe. Nyilván

$$x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 x_5^2 \dots x_n^2 \neq \pm 1$$

mivel $x_1 > 1, x_2 > 1, \dots$, így $x_1 = x_2$. Mivel semmi speciális nem volt x_1 és x_2 választásában, következik $x_2 = x_3$, és a többi.”

2. A Fibonacci-sorozat

”Utóirat. Most tűnt csak fel, hogy van más út is a megoldáshoz. Használjuk az egyenletek ciklikusságát. x_1 az első egyenletben x_2 -vel van kifejezve, a második egyenletből x_2 -t beírva x_3 -mal és ezt folytatva a ciklikus visszatérés miatt végül x_1 -gyel. Az így kapott egyenlet jó esetben megoldható x_1 -re. Próbáljuk meg! Valószínűleg elő kell állítani egy formulát x_1 -re, x_i -vel kifejezve speciális esetekből, majd indukcióval bizonyítani. Hasznos lesz a következő sorozat: $F_0 = F_1 = 1$ and $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. (A sorozat tagjai a Fibonacci-számok). Azt kell kapnunk, hogy ha $x_n = x_1$ valamely n -re ($n > 1$), akkor $x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.”

Merítve Stephen Siklos fenti gondolatmenetéből, a következőt fogjuk bizonyítani: minden $1 \leq i \leq n$ indexre x_i gyöke a Fibonacci-sorozat $x^2 - x - 1$ karakterisztikus polinomjának. Ez a tény, és az $x_i > 0$ feltétel együtt az $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \phi$ megoldásrendszert adja, ahol $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, az aranymetszés arányszáma. A jobb áttekinthetőség kedvéért a következő állítást fogalmazzuk meg:

1. Állítás. Tegyük fel, hogy $n \geq 2$, $x_i > 0$ $i = 1, \dots, n$ és az x_i -k kielégítik a következő egyenletrendszert:

$$x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}, \quad \dots \quad x_{n-1} = 1 + \frac{1}{x_n}, \quad x_n = 1 + \frac{1}{x_1}.$$

A fenti feltételek mellett

- i) $x_1 = \frac{F_{n+1}x_1 + F_n}{F_n x_1 + F_{n-1}}$
- ii) $x_1^2 - x_1 - 1 = 0$
- iii) $x_i^2 - x_i - 1 = 0$ $i = 2, \dots, n$.

Az i) bizonyításához az $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat definíciója és az $F_1 = F_2 = 1$ kezdeti feltételek elegendők.

$$\begin{aligned} x_1 = 1 + \frac{1}{x_2} &= \frac{x_2 + 1}{x_2} = \frac{F_2 x_2 + F_1}{F_1 x_2} = \frac{F_2 \left(1 + \frac{1}{x_3}\right) + F_1}{F_1 \left(1 + \frac{1}{x_3}\right)} = \frac{F_2 + F_1 + \frac{F_2}{x_3}}{F_1 + \frac{F_1}{x_3}} \\ &= \frac{F_3 + \frac{F_2}{x_3}}{F_2 + \frac{F_1}{x_3}} = \frac{F_3 x_3 + F_2}{F_2 x_3 + F_1} = \dots = \frac{F_n x_n + F_{n-1}}{F_{n-1} x_n + F_{n-2}} = \frac{F_n \left(1 + \frac{1}{x_1}\right) + F_{n-1}}{F_{n-1} \left(1 + \frac{1}{x_1}\right) + F_{n-2}} \\ &= \frac{F_n + F_{n-1} + \frac{F_n}{x_1}}{F_{n-1} + F_{n-2} + \frac{F_{n-1}}{x_1}} = \frac{F_{n+1} + \frac{F_n}{x_1}}{F_n + \frac{F_{n-1}}{x_1}} = \frac{F_{n+1} x_1 + F_n}{F_n x_1 + F_{n-1}}. \end{aligned}$$

Mivel $F_n x_1 + F_{n-1} > 0$ így i) $\iff F_n x_1^2 + F_{n-1} x_1 = F_{n+1} x_1 + F_n = (F_n + F_{n-1}) x_1 + F_n \iff F_n (x_1^2 - x_1 - 1) = 0$ és $F_n \neq 0$, tehát ii) bizonyított.

A ii) segítségével bizonyítunk az $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2$ -re, ebben a fordított sorrendben. Ez egy ritka indukciós útvonal: $1 \Rightarrow n \Rightarrow (n-1) \Rightarrow \dots \Rightarrow 2$, ami a ciklikusság következménye.

$$x_n^2 - x_n - 1 = \left(1 + \frac{1}{x_1}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{x_1}\right) - 1 = -1 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1^2} = -\frac{1}{x_1^2}(x_1^2 - x_1 - 1) = 0$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$x_{n-1}^2 - x_{n-1} - 1 = -\frac{1}{x_n^2}(x_n^2 - x_n - 1) = 0, \dots, x_2^2 - x_2 - 1 = -\frac{1}{x_3^2}(x_3^2 - x_3 - 1) = 0,$$

amivel a bizonyítás teljes.

3. Banach-Caccioppoli tétel

Ez a fejezet komolyabb eszközt fog használni, az úgynevezett kontrakciós elvet, vagy gyakran Banach fixpont tételként is találkozhatunk vele. Én Banach-Caccioppoli tételként ismertem meg ezt az eredményt. Az olvashatóság megkönnyítése érdekében a tételt itt felidézünk, feltételezve az itt szereplő fogalmak ismeretét.

2. Tétel. (Banach-Caccioppoli) Legyen $(\mathcal{X}, d)$ teljes metrikus tér, valamint $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ szigorú kontrakció - azaz létezik olyan $0 < \alpha < 1$, hogy minden $x, y \in \mathcal{X}$ esetén $d(f(x), f(y)) < \alpha d(x, y)$. Ekkor f -nek pontosan egy fixpontja létezik, azaz egyetlen olyan $x^* \in \mathcal{X}$, melyre $x^* = f(x^*)$ teljesül. Emellett bármely $x_0 \in \mathcal{X}$ -re az $x_{n+1} = f(x_n)$ $n \geq 0$ iterációs sorozat konvergál az x^* fixponthoz. Az iterációs sorozatot az f x_0 -ból induló orbitjának nevezzük, és $\text{Orb}(f, x_0)$ -al jelöljük.

A továbbiakban a fenti tételre BC-ként fogunk hivatkozni. BC alkalmazásával megmutatjuk, hogy $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Mindenekelőtt gondoljuk meg, hogy minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén $3/2 < x_i < 2$. Ennek igazolását az olvasóra bizzuk. Most definiáljuk a tételbeli $\mathcal{X}$ teljes metrikus teret és az $\mathbf{f}$ leképezést. Legyen

$$\mathcal{X} := \prod_{i=1}^n \left[\frac{3}{2}, 2 \right] \subset \mathbb{R}^n,$$

valamint

$$\mathbf{f} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \quad \mathbf{f}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) := \left(1 + \frac{1}{x_2}, \dots, 1 + \frac{1}{x_n}, 1 + \frac{1}{x_1} \right).$$

A fenti definícióban a produktum jel Descartes szorzatot jelöl, tehát $\mathcal{X}$ nem más, mint egy $\frac{1}{2}$ élhosszúságú n -dimenziós zárt hiperkocka, melynek az origóhoz legközelebbi csúcsa a $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2})$ pont. Világos, hogy $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ pontosan akkor megoldása KF-nek, ha fixpontja $\mathbf{f}$ -nek.

Ahhoz, hogy BC alkalmazható legyen, három feltételt kell ellenőrizni:

1. $\mathcal{X}$ teljes metrikus tér,
2. $\text{Ran}(\mathbf{f}) \subseteq \mathcal{X}$, ahol $\text{Ran}(\mathbf{f}) = \{\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{X}\}$ az $\mathbf{f}$ képtere,
3. $\mathbf{f}$ szigorú kontrakció.

Mivel $\mathbb{R}^n$ teljes metrikus tér a klasszikus Euklideszi metrikával és $\mathcal{X}$ ennek zárt altere, így 1.) teljesül. Az $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ függvényre $f : [\frac{3}{2}, 2] \rightarrow [\frac{3}{2}, 2]$, következésképp $\mathbf{f}$ valóban $\mathcal{X}$ -t önmagába képezi. 3.) bizonyításához legyen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$. Ekkor a következő becslés áll fenn:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\|^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{y_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - y_i)^2}{x_i^2 y_i^2} \leq \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - y_i)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^4} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^4 \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2, \end{aligned}$$

ahonnan következik, hogy $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leq \frac{4}{9} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, ami bizonyítja 3.)-t az $\alpha = \frac{4}{9}$ Lipschitz állandóval. BC értelmében az $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ egyenletnek pontosan egy megoldása van $\mathcal{X}$ -ben, mondjuk jelölje ezt $\mathbf{x}^*$. Emellett az $\mathbf{x}_{j+1} := \mathbf{f}(\mathbf{x}_j)$, $j \geq 0$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ orbit konvergál $\mathbf{x}^*$ -hoz minden $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ esetén. Legyen az orbit kezdőpontja speciálisan az $\mathbf{x}_0 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2})$ pont. Ekkor

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{x}_j = (x^*, x^*, \dots, x^*) = \mathbf{x}^*,$$

és pontosan ezt szeretnénk volna bizonyítani. Innen, a már látott módon, KF megoldása egyszerűen befejezhető.

Az itt definiált $\{\mathbf{x}_j\}_{j=0}^\infty$ orbit szerkezetéről többet is tudunk mondani, nevezetesen $x_j^k = \frac{F_{j+4}}{F_{j+3}}$, ahol x_j^k az $\mathbf{x}_j$ vektor k -adik koordinátája, ahonnan

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j^k = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{F_{j+4}}{F_{j+3}} = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \forall 1 \leq k \leq n,$$

ami a Fibonacci-sorozat explicit előállításának egyszerű következménye. Ezzel lassan átnyúlunk a következő fejezet kérdéskörébe.

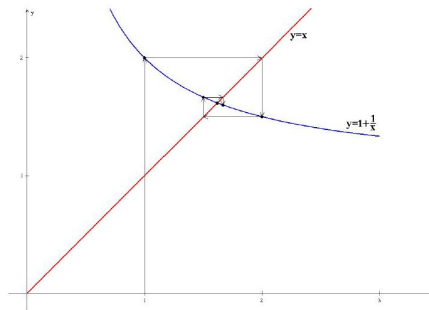
4. Szimultán approximáció

Láttuk, hogy BC alkalmazása előállít egy $\{\mathbf{x}_j\}_{j=0}^\infty \subseteq \mathcal{X}$ vektorsorozatot, ami nem más mint az $\mathbf{f}$ leképezés $\mathbf{x}_0 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2})$ -ból induló orbitja. Emellett $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{x}_j = \Phi = (\phi, \phi, \dots, \phi)$. Más szavakkal az $\{\mathbf{x}_j\}_{j=0}^\infty$ sorozat fokozatosan approximálja a Φ aranymetszés vektort, melynek minden koordinátája $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ez egy speciálisan egyszerű szerkezetű szimultán approximáció, amikor is minden

koordináta ugyanúgy működik, generálva egy jól áttekinthető struktúrát, amely a Fibonacci számokból épül fel az alábbi ábra szerint:

$$\begin{array}{cccc}
 \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \cdots & \frac{3}{2} \\
 \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \cdots & \frac{5}{3} \\
 \frac{8}{5} & \frac{8}{5} & \cdots & \frac{8}{5} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 \frac{F_{n+1}}{F_n} & \frac{F_{n+1}}{F_n} & \cdots & \frac{F_{n+1}}{F_n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 \phi & \phi & \cdots & \phi
 \end{array}$$

Ez a mintázat az általános esetben, amikor is az $\mathbf{x}_0$ induló vektor koordinátái nem mind egyenlők, sokkal érdekesebb. Ebben a szakaszban ezeket az általános pályákat fogjuk szemléltetni. Ahhoz, hogy teljes egészében lássuk mi történik, először az 1-dimenziós problémát tekintjük át, majd kihasználva a ciklikusságot az orbit koordinátáit színskóddal azonosítjuk és a keletkező sorozatokat egy hengerre feltekerve reprezentáljuk. Ha most $n \rightarrow \infty$, akkor ez a reprezentáció egy hengerre feltekert szivárványt eredményez, ami lefedi a látható színspektrumot. Az $n = 2$ speciális esetben egy kettős spirál (ami erősen emlékeztet a DNS szerkezetére) keletkezik a hengeren (lásd 4. ábra). Először összefoglaljuk az $f(x) = 1 + \frac{1}{x} = x$ egyenlettel kapcsolatos alaperedményeket, melyek gyakorló feladatnak tekinthetők a rekurzív sorozatok tárgyalásakor.



2. ábra. Egydimenziós KF

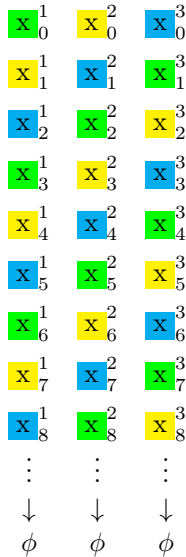
3. Tétel. Ha $x_0 > 0$ és $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, $n \geq 0$, akkor a következők állnak fenn:

- i) Ha $x_0 < \phi$, akkor $x_0 < x_2 < \cdots < x_{2n} < \cdots < x_{2n+1} < \cdots < x_3 < x_1$.
- ii) Ha $x_0 > \phi$, akkor $x_1 < x_3 < \cdots < x_{2n+1} < \cdots < x_{2n} < \cdots < x_2 < x_0$.
- iii) Ha $x_0 = \phi$, akkor $x_n = \phi$ minden $n \geq 1$ esetén.

iv) A $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j$ határérték létezik és $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ -vel egyenlő.

Az 2. ábrán jól látható az $n = 1$ esetben az oszcilláló orbit.

Tekintsük most az általános esetet azzal a megszorítással, hogy az induló $\mathbf{x}_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$ vektor minden koordinátája különböző. A $c_1, c_2, \dots, c_n$ különböző színekkel szemléltetjük rendre az $x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n$ értékekből induló egyedi orbitokat ahhoz, hogy láthatóvá tegyük az egyes iterációs lépésekben a változásokat. Az $n = 3$ esetben bemutatjuk az ábrázolást részletesen, az általános eset ebből már világosan látható. A 3. ábrán jól látható, hogy minden oszlop három különböző kezdőértékből induló egyedi orbit fésűs egyesítéseként áll elő. Minden ilyen orbit konvergál ϕ -hez, tehát az oszlopok lefelé konvergálnak ugyancsak ϕ -hez. Ez az a pont, amikor az egyenletrendszer ciklikusságát használjuk. Ha most az így kapott téglalapot a hosszanti élei mentén összeragasztjuk, akkor egy olyan hengerfelület keletkezik, amelyen három különböző színű spirál látható. Ha most a színspektrumot n egyenlő részre felbontjuk (nagy n -ek esetére) az n -dimenziós probléma ilyenén szemléltetése egy hengeres szivárványt eredményez (lásd 4. ábra).



3. ábra. Orbitok fésűs egyesítése.



4. ábra. Kettős spirál és henger-szivárvány

Az ábrán az $n = 20$ eset látható a jobb oldalon. A bal oldali ábrán az $n = 2$ eset kettős spirálja.

5. Lánc törtek

Ez a rövid kis fejezet – mintegy a pont a mondat végén – zárja a különböző nézőpontok sorát, amit mindenki kedve szerint bővíthet. Az alábbi megközelítés nagyon testreszabottnak tűnt számomra. Az $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ szimbolika a lánc törtek elméletében a következő törtet jelöli:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

A lánc törtekről részletesebben olvashatunk pl. [1] könyv 9. fejezetében vagy [4]-ben. Felhasználva az első, második,... egyenletet a következőt kapjuk

$$\begin{aligned} x_1 = [1; x_2] &= [1; 1, x_3] = \dots = [\overbrace{1; 1, \dots, 1}^{n \text{ db } 1}, x_1] = [\overbrace{1; 1, \dots, 1}^{n \text{ db } 1}, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^{n \text{ db } 1}, x_1] = \dots \\ &= [\overbrace{1; 1, \dots, 1}^{n \text{ db } 1}, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^{n \text{ db } 1}, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^{n \text{ db } 1}, \dots]. \end{aligned}$$

Másrészt $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ aranymetszésre $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$, így

$$\phi = [1; \phi] = [1; 1, \phi] = [1; 1, 1, \phi] = \dots = [1; 1, 1, 1, \dots],$$

ezért $x_1 = \phi$, és ugyanez áll fenn minden x_i -re a ciklikusság miatt.

Köszönetnyilvánítás. Köszönettel tartozom Stephen Siklos professzornak, aki tapasztalatával és értékes megjegyzéseivel segítette ezen írás megszületését, a lektor-nak, aki segített véleményével kialakítani a végleges változatot, valamint a Kocsis családnak, akik szállást adtak nekem és nap mint nap elviseltek.

Irodalomjegyzék

- [1] Megyesi László: Bevezetés a számelméletbe (2005), Polygon, Szeged.
- [2] Stephen Siklos, Advanced Problems in Core Mathematics: Preparing for University. Cambridge, UK: Open Book Publishers, 2015. <http://dx.doi.org/10.11647/OBP.0075>
- [3] Walter Rudin, Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill, 1976
- [4] A.Ya. Khinchin, Continued Fractions, Dover Publications, Inc., 2015